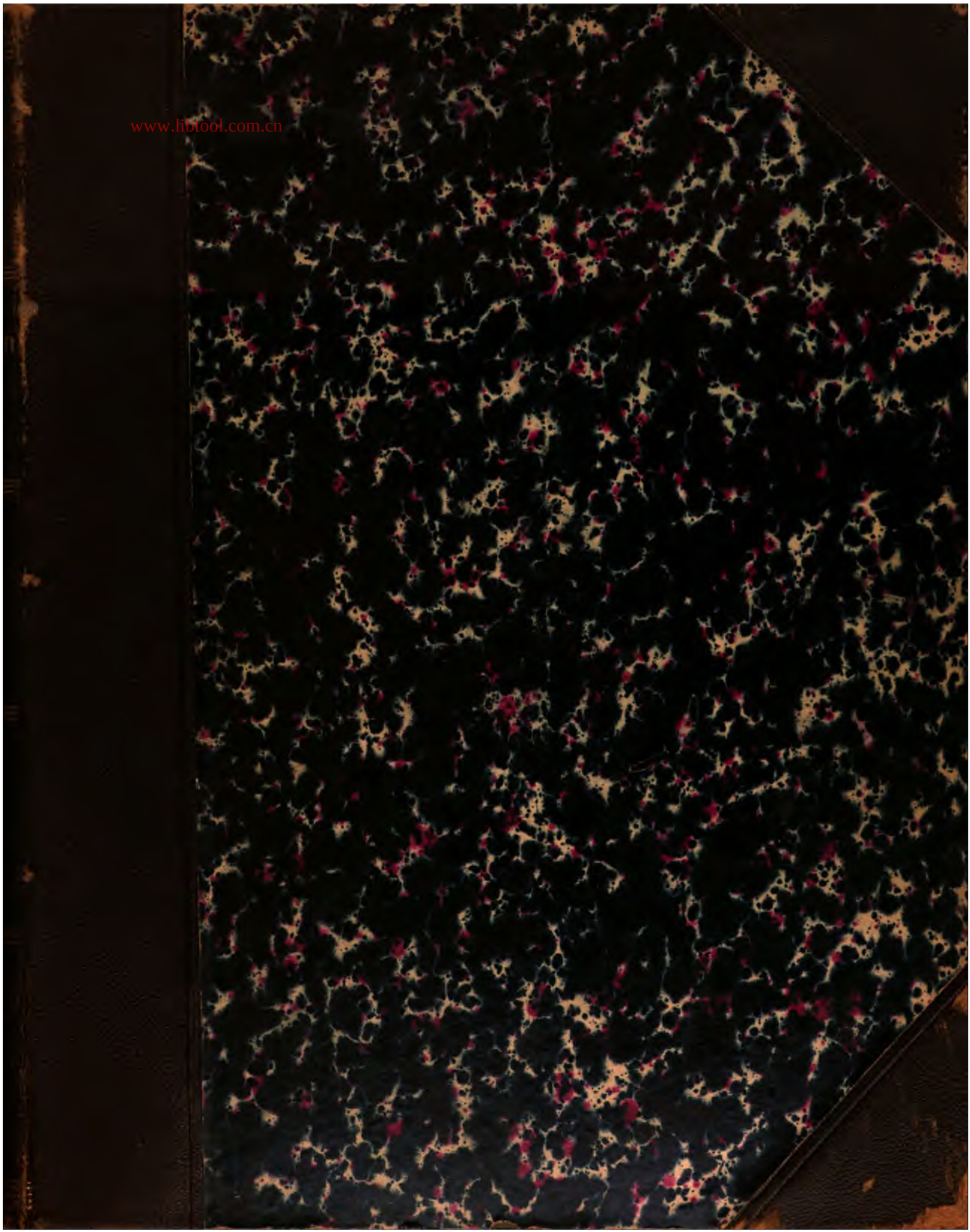
www.libtool.com.cn



www.libtool.com.cn

L Soc 1721.16

Bound

FEB 21 1907

Harvard College Library

FROM THE BEQUEST OF

JOHN AMORY LOWELL,

(Class of 1815).

This fund is $20,000, and of its income three quarters
shall be spent for books and one quarter
be added to the principal.

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU GÖTTINGEN.

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.

NEUE FOLGE. BAND II.

AUS DEN JAHREN 1902—1903.

BERLIN.

WEIDMANNSCHE BUCHHANDLUNG.

1903.

1-½
www.libtool.com.cn
L Soc 1721.16

www.libtool.com.cn

Inhalt.

E. Wiechert, Theorie der automatischen Seismographen.

Julius Kramer, Theorie der kleinen Planeten. Die Planeten vom Hecuba-Typus.

Ph. Furtwängler, Über das Reciprocitätsgesetz der l^{ten} Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet.

G. Prasad, Constitution of Matter and Analytical Theories of Heat. An Essay in four Parts.

www.libtool.com.cn

2 Soc 1721.16

www.libtool.com.cn

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND II. Nro. 1.

HARVARD COLL...
APR 29 19..
CAMBRIDGE, M...

Theorie der automatischen Seismographen.

Von

E. Wiechert.

Berlin.
Weidmannsche Buchhandlung.
1903.

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND II. Nro. 1.

Theorie der automatischen Seismographen.

Von

E. Wiechert.

Berlin.
Weidmannsche Buchhandlung.
1903.

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

HARVARD COLLEGE LIBRARY
APR 29 1902
CAMBRIDGE, MASS.

Theorie der automatischen Seismographen.

Von

E. Wiechert.

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung am 23. Februar 1901.

Einleitung.

1. Vorwort. Die bisher mit den automatischen Seismographen gewonnenen Resultate erwecken in erfreulichster Weise die Hoffnung auf werthvolle Aufschlüsse über die Umgestaltungen der Erdrinde, deren Begleiterscheinung die Erdbeben sind, und über die physikalische Beschaffenheit der Erde. So ist denn heute das Interesse an der seismischen Forschung reger als je; der Bau von seismischen Apparaten und Warten wird mit Eifer betrieben, und man ist bemüht, die Organisation des Beobachtungssystemes auf der Erde zu verbessern. — Diesen Bestrebungen entspricht es nicht ganz, dass vielfach noch recht unbestimmte Vorstellungen über die Wirksamkeit der Apparate herrschen, und dass sogar sehr wesentliche Irrthümer wieder und wieder ausgesprochen werden. So scheint es mir ein dankbares Unternehmen, einmal die Apparate und ihre Leistungen einer eingehenden Prüfung zu unterziehen, um so ein wenig dazu beizutragen, dass dem Forscher auch die rechten Werkzeuge in die Hand gegeben werden. Dieser Gesichtspunkt hat im Folgenden die unbedingte Herrschaft. Dennoch darf ich hoffen, dass auch unabhängig von der Seismik sich für die mathematische Physik manches Interessante ergeben wird.

Da mechanische Probleme behandelt werden müssen, durfte ich eine weitgehende Anwendung der Mathematik nicht scheuen; andererseits verkenne ich nicht, wie sehr es gerade in diesem Falle darauf ankommt, auch denjenigen Lesern das Verständniss thunlichst zu erleichtern, welche der Handhabung mathematischer Formeln nicht gewohnt sind. Um einen Ausweg zu finden, habe ich mich bemüht, das Einfache vom Komplicirten möglichst zu trennen und durch öfters eingeschaltete Zusammenstellungen sowie durch reichliche Anwendung von cursivem Druck die Uebersichtlichkeit zu erhöhen.

www.libtool.com.cn

2. Bei der *Auswahl des Stoffes* musste ich mich fragen, was denn eigentlich von den Diagrammen der Seismographen zu verlangen sei. Mit der einfachen Feststellung, dass ein Erdbeben stattgefunden hat, ist der Wissenschaft jedenfalls zu wenig gedient, *man wird mindestens noch Angaben über Zeit und Intensität beanspruchen*. Schon hierbei kommt die Theorie in einem Maasse in Betracht, das meist unterschätzt wird. Nehmen wir zum Beispiel an, es handele sich um die *Bestimmung der Geschwindigkeit*, mit der sich die Erschütterungen über die Erde ausbreiten. Man könnte meinen, dass es dann hinreichend wäre, festzustellen, wann der Seismograph anfängt, unter der Einwirkung der Erderschütterungen merklich unruhig zu werden. Dies ist aber keineswegs richtig; es würde nur gelten, wenn die Erderschütterungen mit der stärksten Bewegung einsetzten oder doch mit einer Bewegung, die sich von der stärksten nicht wesentlich unterscheidet, — so aber spielen sich die wirklichen Vorgänge in der Regel nicht ab, denn es treffen meist nacheinander Bewegungen mit bedeutend anwachsender Intensität ein. Infolge dessen wird man oft im Ungewissen darüber bleiben, ob die erste bemerkbare Unruhe des Seismographen den Beginn des Erdbebens oder eine spätere Phase bezeichnet. Die Schwierigkeiten wachsen noch weiter an, wenn man versucht, *Geschwindigkeitsbestimmungen für spätere Phasen* der Erderschütterung vorzunehmen. Es kommt dann der Umstand störend in Betracht, dass die üblichen Apparate auf Schwingungen verschiedener Periode mit weit verschiedener Empfindlichkeit reagieren. Bei einem und demselben Erdbeben können selbst Apparate gleicher Konstruktion, wenn sie nur geringfügig anders regulirt sind, die Anschwellungen der Intensität zu verschiedenen Phasen zeigen. — Dass die *Intensitätsvergleichungen* ohne eine sorgfältige Berücksichtigung der Theorie nicht minder unsicher sind wie die Zeitbestimmungen, braucht nach dem zuletzt Gesagten nicht näher auseinander gesetzt zu werden. Eine grössere Unruhe des Seismographen bedeutet eben nicht ohne Weiteres eine grössere Unruhe des Erdbodens, sondern kann sich auch dadurch erklären, dass Schwingungen zur Geltung kommen, für welche der Seismograph besonders empfindlich ist.

Schauen wir zurück, so zeigt sich deutlich, dass selbst dann, wenn nur Angaben über Zeit und Intensität verlangt werden, auf Konstruktion und Regulierung des Seismographen sowie auf die Art der Erderschütterungen sehr wohl geachtet werden muss. Damit das letztere möglich sei, müssen die Diagramme nicht nur den Grad der Unruhe des Seismographen zeigen, sondern auch die Art der erregenden Erderschütterungen zu beurtheilen erlauben, sie müssen *lesbar* sein.

3. *Einige Probleme.* Sobald dieses erreicht ist, eröffnet sich dem Forscher eine neue Welt. Schon der erste Anblick lesbarer Diagramme lehrt, dass ein Erdbeben keineswegs eine Folge unregelmässiger Erschütterungen ist, und ein genaueres Studium zeigt selbst in solchen Einzelheiten Gesetzmässigkeiten, die zunächst als Spiele des Zufalls erscheinen. — Als besonders wichtig ist zunächst hervorzuheben, dass nicht *Stösse*, sondern *Schwingungen* vorherrschen. Die Periode variirt in weiten Grenzen, von kleinen Bruchtheilen einer Sekunde

www.libtool.com.cn

bis zu einer Minute und darüber, und zwar finden wir schon bei einem und demselben Erdbeben nacheinander oder superponirt Schwingungen verschiedener Periode. Anfänglich, vor dem Eintreffen der Schwingungen grösster Amplitude, ist das Gewirre meist ziemlich gross. Später gestaltet sich das Bild einfacher. Eine bestimmte Periode erlangt die Vorherrschaft, oder es deuten regelmässige An- und Abschwellungen darauf hin, dass Wellenzüge mit nicht weit verschiedener Periode interferiren. Bedeutungsvoll ist ferner, *dass in jedem Erdbeben nach einander Erschütterungen verschiedenen Charakters eintreffen*, die oftmals mit sehr ausdrucksvollen Einsätzen beginnen. Die Diskussion über die physikalische Deutung dieser verschiedenen Bewegungen ist noch nicht abgeschlossen, man denkt an longitudinale und transversale Schwingungen, sowie an Fortpflanzung längs der Oberfläche und durch das Innere der Erde. — Die Feststellung des Zeitintervalles zwischen dem Eintreffen der verschiedenen Bewegungen erlaubt in ziemlicher Schärfe die Bestimmung der Entfernung des Erdbebenherdes. —

Neue Probleme bieten sich, wenn man die Diagramme verschiedener Erdbeben in ihren *scheinbaren Unregelmässigkeiten* vergleicht. Da ist die Uebereinstimmung manchmal höchst überraschend. Ich habe dies schon in meiner ersten Veröffentlichung über die seismometrischen Beobachtungen im Göttinger Geophysikalischen Institut [1]) hervorgehoben, und es sind dort auch zwei solche nahe übereinstimmende Diagramme reproducirt. Seit jener Zeit wurden noch sehr viel auffälligere Beispiele gewonnen. Vor allem haben zwei Erdbeben vom 27. September 1899 und vom 15. Januar 1900 so nahe gleiche Bewegungen verursacht, dass das eine Diagramm wie eine nicht ganz getreue Kopie des anderen erscheint; jede Ausbiegung der Kurve in dem einen Bild findet sich an entsprechender Stelle in dem anderen wieder. Offenbar handelt es sich hier — und ähnlich in den anderen Fällen — um Erdbeben, die an nahe der gleichen Stelle der Erde ihren Ursprung hatten. Doch ist die Möglichkeit, dieses aus den Diagrammen zu erkennen, für uns immerhin nur in zweiter Linie von Bedeutung, — bei weitem wichtiger ist, dass die genaue Uebereinstimmung in den Einzelheiten es ganz unmöglich macht, ihre Entstehung zufälligen Unregelmässigkeiten in der Aufeinanderfolge von Dislokationen zuzuschreiben, die die Erderschütterungen bewirken. *Wir müssen vielmehr unbedingt schliessen, dass die Dislokationen verhältnismässig einfacher Art sind, und — schnell verlaufend — nur den ersten Impuls für die Erdbewegungen abgeben. Wie diese sich dann in ihren Einzelheiten gestalten, das muss den Zufälligkeiten der Auslösung entzogen sein.* Wir können annehmen, dass die Massenvertheilung und die elastische Beschaffenheit im Bereiche des Erdbebenherdes, dann in der Erde überhaupt, zur Geltung kommt, und erkennen so, dass auch das scheinbar Unregelmässige in den Diagrammen für die Geophysik von grosser Wichtigkeit ist. —

Andere interessante Aufgaben stellen sich ein, wenn man *die verschiedenen Komponenten der Erdbewegung vergleicht.* Zunächst ist es nach den Göttinger

1) Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Klasse 1899, Heft 2, S. 195.

www.libtool.com.cn

Erfahrungen in vielen Fällen sehr wohl möglich, auf die Richtung zu schliessen, in welcher das Epicentrum liegt. Weit wichtiger noch ist, dass die Bewegungen nicht in einer bestimmten Ebene erfolgen, — etwa in der Vertikalebene, welche das Epicentrum enthält. Es finden vielmehr in der Regel ausser in der Vertikalen Schwingungen nach allen möglichen Richtungen des Horizontes statt. Dabei liess sich in einigen Fällen, so bei dem Venezuela-Erdbeben vom 29. Oktober vorigen Jahres ganz scharf erkennen, *dass verschieden gerichtete Wellenbewegungen nacheinander eintreffen.* —

Für alles, was ich bisher erwähnte, genügen die Registrirungen an einem einzelnen Orte. Zu ihrer vollen Bedeutung für die Erforschung der physikalischen Beschaffenheit der Erde können die Erdbebenbeobachtungen aber erst gelangen, wenn die Registrirungen an verschiedenen Orten mit einander verglichen werden, sodass es möglich wird, die *Fortpflanzung der Bewegung durch die Erde und ihre Umwandlung auf dem Wege* zu verfolgen. Für diesen Zweck ist in erster Linie ein System von Stationen mit ausführlich schreibenden Instrumenten zu wünschen, welches über die Erde verbreitet ist; daneben wäre es jedoch auch von grosser Wichtigkeit, wenn in verhältnissmässig kleinen Gebieten Netze enge bei einander liegender Stationen zur Verfügung ständen, welche gestatteten, genauere Einzelheiten bei der Fortpflanzung längs der Erdoberfläche zu beobachten, so zum Beispiel die Abhängigkeit von den geologischen Verhältnissen. Hier ist ein deutliches und unverfälschtes Urtheil über den Verlauf der Bewegung nicht nur im Interesse der Zeit- und Richtungsbestimmungen zu verlangen, sondern auch im Interesse der Intensitätsvergleiche. Wir müssen uns daran erinnern, dass bei dem Studium *fühlbarer* Erdbeben gerade durch den Vergleich der Intensität an verschiedenen Orten, durch die Untersuchungen der Regelmässigkeiten und der Anomalien schöne und werthvolle Resultate gewonnen wurden. So werden wir mit Interesse dem entsprechenden Studium mit Seismographen entgegensehen, wo es sich oft um weit grössere Schwingungsperioden und demgemäss weit grössere Wellenlängen handelt, sodass die Gestaltung der Erdrinde in wesentlich anderer Weise zur Geltung kommt.

Ausser den eigentlichen Erdbeben kommen für die Seismik vor Allem die lange Zeiten hindurch gleichmässig anhaltenden „*Pulsationen*“ der Erdoberfläche in Betracht, welche ich zum Theil wenigstens auf Wellenzüge zurückführen möchte, die von der Meeresbrandung verursacht werden. — Eine andersartige Reihe von Problemen wird durch die *langsamen Bewegungen der Erdoberfläche und der Vertikalen* geboten, für welche uns Ebbe und Flut ein Beispiel zeigen. —

4. *Inhaltsübersicht.* Diese wenigen Bemerkungen, welche nur Einzelheiten herausgreifen sollten, mögen hier genügen; sie werden jedenfalls deutlich zeigen, *dass tiefgreifende Aufschlüsse über den Bau der Erde und ihrer Rinde sich ganz von selbst ergeben werden, wenn es einst möglich sein wird, mittels lesbarer seismischer Diagramme die Entstehung und die Wanderung der Erdbebenwellen über die Erde zu verfolgen.* Unsere Aufgabe für die folgenden Ausführungen aber ist klar vorgezeichnet: *Wir werden nicht nur untersuchen müssen, wie man empfindliche*

www.libtool.com.cn

Seismometer bauen kann, sondern auch, wie lesbare Diagramme zu erhalten und zu entziffern sind.

Im *ersten Theile* werden im Folgenden die *allgemeinen* theoretischen Gesichtspunkte besprochen werden, welche für die Beurtheilung der Instrumente maassgebend sein müssen. Im *zweiten Theile* folgen dann speciellere Untersuchungen über *Einzelheiten der Konstruktion*, mit denen Erbauer und Beobachter zu rechnen haben. Dabei wird sich Gelegenheit bieten, einzelne Instrumente näher zu beschreiben, also ganz ins Individuelle zu gehen. Hier werde ich mich in weitem Maasse auf die zusammenfassende und vergleichende Arbeit von R. Ehlert[1]) über seismische Instrumente berufen können.

Von grossem Interesse war es mir, zu erfahren, dass die Technik ganz ähnliche Probleme zu behandeln hat wie die Seismologie und dabei ganz ähnliche Mittel anwendet. Der schöne *Pallograph von Schlick* zum Beispiel, *gebaut zum Studium der Vibrationen von Schiffen*, unterscheidet sich nur durch seine geringere Empfindlichkeit von einem Seismographen. In dieser Hinsicht ist eben die Seismik viel ungünstiger gestellt wie die Technik: sie muss weit kleinere und langsamere Bewegungen beobachten, also weit grössere Empfindlichkeit verlangen. Immerhin wird die folgende Theorie bis zu einem gewissen Grade auch die der Pallographen umfassen. —

5. Die *praktischen Grundlagen* für meine Arbeit fand ich zunächst in den vorliegenden sehr zahlreichen Veröffentlichungen über seismische Apparate insbesondere in der soeben citirten Schrift von R. Ehlert. Hierzu kamen Erfahrungen, die ich bei Besuchen seismischer Warten zu sammeln Gelegenheit hatte, sowie experimentelle Untersuchungen und Registrirungen im *Geophysikalischen Institut der Göttinger Universität*, welche durch Unterstützung der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen ermöglicht wurden. Da es weiterhin vielfach nöthig sein wird, auf diese Arbeiten Bezug zu nehmen, scheint es geboten, hier eine kurze Uebersicht zu geben.

Ich nahm die Seismometrie im Jahre 1898 auf und baute *unter Benutzung der photographischen Registrirmethode* ein *Horizontalpendel* mit der Absicht, lesbare Diagramme zu erzielen, die ich bei dem literarischen Studium schmerzlich vermisst hatte. Dazu wurden eine *kräftige Dämpfung* und eine *verhältnissmässig grosse Zeitskala* angewandt. Durch die Dämpfung sollte der störende Einfluss der Eigenschwingungen des Pendels beseitigt werden. Für die Zeitskala der Registrirung wählte ich $^1/_{10}$ mm in 1 Sekunde, also 36 cm in 1 Stunde, das ist eine mehrfach grössere Geschwindigkeit, als sie bisher bei dauernden photographischen Registrirungen üblich war. — Trotz seiner einfachen Bauart hat das Instrument sich gut bewährt. Nähere Angaben über die Einrichtung und die gewonnenen Resultate wurden im Juli 1899 in dem schon genannten Bericht veröffentlicht. Auf dem internationalen Geographenkongress in Berlin im Herbst desselben Jahres hatte ich die Ehre, in der Sitzung, in welcher Dr. Hecker über seine

1) Beiträge zur Geophysik von G. Gerland, Bd. 3, S. 350, 1898.

www.libtool.com.cn

Untersuchungen seismischer Apparate im Potsdamer Geodätischen Institute sprach und Prof. Dr. Gerland seine Pläne über die Schaffung einer internationalen Vereinigung entwickelte, auch von den Göttinger Arbeiten berichten zu dürfen, und unter Hinweis auf die Hecker'schen Ergebnisse und die vorgelegten Diagramme die Bitte auszusprechen, bei seismischen Registrirungen auf Lesbarkeit der Diagramme durch *Anwendung einer Dämpfung und einer hinreichend grossen Zeitskala Gewicht zu legen.* Es ist mir eine Freude und eine neue Anregung für die folgende Arbeit, bemerken zu können, dass ich an verschiedenen Stellen Anklang fand.

Im Sommer vorigen Jahres erhielt ich durch die Güte der k. k. Akademie in Wien leihweise ein *3-faches Ehlert'sches Pendel.* Es stellt dieses eine Verbesserung jenes Apparates dar, mit welchem v. Rebeur Paschwitz seine berühmten, leider durch den Tod frühzeitig unterbrochenen Untersuchungen in Strassburg gemacht hat. In seinen Vorschlägen „zur Errichtung eines internationalen Systems von Erdbeben-Stationen“ [1]) sagt er: „Es ist wünschenswerth und für den Erfolg des Unternehmens wichtig, dass alle Stationen *gleichwertige* Instrumente wählen und dass diese überall auf den *gleichen Grad von Empfindlichkeit* gebracht werden“. Der leitende Gedanke hierbei ist, *dass die Beobachtungen vergleichbar werden sollen.* Von Paschwitz schlug in erster Linie, aber „vorbehaltlich späterer Ausgestaltung“ ein Horizontalpendel seiner Konstruktion vor, von dem er annahm, dass es den Bedingungen der Vergleichbarkeit der Beobachtungen Genüge leiste. Spätere Untersuchungen haben gelehrt, dass dieses nicht ohne Weiteres zutrifft, denn die Eigenschwingungen sind übermächtig und die Diagramme nicht lesbar. Wollen wir also das schöne Vermächtniss von v. Rebeur Paschwitz in seinem Sinne weiterführen, so müssen wir darauf Bedacht nehmen, die Unvollkommenheiten, welche mit der Kindheit der Seismographie, wie jeder Forschung verknüpft sind, thunlichst bald zu beseitigen. Hierzu hoffe ich mit den folgenden Ausführungen einen Beitrag liefern zu können. Sehr gerne erwähne ich, dass das Pendel von v. Rebeur Paschwitz in der ursprünglichen, sowie in der von Ehlert herrührenden Form mit verhältnissmässig geringem Aufwand so umgewandelt werden kann, dass es unserem Verlangen nach entwirrbaren Angaben über die Erdbewegungen am Aufstellungsorte zu genügen vermag: dazu ist nur nöthig, eine Luftdämpfung anzubringen, was leicht geschehen kann, und eine schnellere Registrirung zu benützen, für die ein Jahresaufwand von 300—500 Mark recht wohl hinreicht.

6. Für die *mechanische Registrirung* wurden in Göttingen 1898 und 1899 nur Vorarbeiten gemacht. Ende 1899 unternahm ich dann mit Unterstützung der Königlichen Staatsregierung eine Studienreise nach Italien, um die seismischen Stationen dieses Landes kennen zu lernen, in welchem die mechanische Registrirung schon seit Langem und mit schönen Erfolgen studirt und verwendet worden ist. Ich besuchte die Stationen in *Rom, Rocca di Papa, Ischia, Padua* und lernte die Herren Seismologen *Palazzo* (Rom), *Cancani*

1) Beiträge zur Geophysik von G. Gerland, Bd. 2, S. 773, 1895.

www.libtool.com.cn

(Rom), *Agamemnone* (Rocca di Papa), *Grablowitz* (Ischia), *Vicentini* (Padua) und *Pacher* (†, Padua) kennen. Für die liebenswürdige Aufnahme und das Entgegenkommen, welches mir unbeschränkten Einblick in alle Einzelheiten gewährte, möchte ich nicht verfehlen, auch an dieser Stelle meinem wärmsten Dank von Herzen auszusprechen. Es erfüllte sich so die Hoffnung, mit welcher ich die Reise angetreten hatte: ich erwarb die Grundlagen für meine weiteren praktischen Arbeiten. —

Nach Plänen, die auf der italienischen Reise zum Abschluss kamen, wurde in Göttingen ein Horizontalseismograph für mechanische Registrirung erbaut, welcher im Juni 1900 seine Arbeit begann. Er enthält ein Pendel von 1200 Kilogramm und wird daher weiterhin das *„1200 kg.-Pendel“* genannnt werden. *Wesentlich ist, dass auch dieses eine starke Dämpfung (Luftdämpfung) erhielt.* Bald zeigte es sich, dass seine Aufzeichnungen mit denen des photographirenden Horizontalpendels vollständig übereinstimmen. Berücksichtigt man die gänzlich verschiedene Bauart der Instrumente, so ist das gewiss ein schöner Erfolg. Wir erkennen hier die Wirkung der Dämpfung, welche den eigentlichen Störenfried, die Eigenschwingungen, unschädlich macht. — Bei der Konstruktion des 1200 kg-Pendels kam es mir darauf an, zu versuchen, für die mechanische Registrirung ein ähnlich kompendiöses und gegen langsame Schwingungen und Neigungsänderungen ähnlich empfindliches Instrument zu bauen, wie die photographirenden Apparate sie darstellen. In diesen beiden Hinsichten waren ja die mechanisch registrirenden Seismographen trotz ihrer sonstigen grossen Vorzüge erheblich im Nachteil. Es gelang mir in der That, das Ziel zu erreichen: Der Apparat ist nur 2 Meter hoch, also ohne Umstände aufzustellen, und die Empfindlichkeit, 32 mm Ausschlag für 1 Bogensekunde Neigung, übertrifft sowohl die meines photographischen Pendels (12 mm) als auch die des v. Rebeur-Paschwitz'schen (12 mm) und des Ehlert'schen Pendels (18 mm) in gewöhnlicher Regulirung, entspricht also dem grössten Werth, welcher bisher benutzt worden ist. —

7. Das Studium der *vertikalen Komponente der Erdbewegung* wurde in der Göttinger Warte zunächst von meinem Assistenten Herrn Dr. W. Schlüter aufgenommen. Er erdachte und baute einen besonderen Apparat, einen *„Klinographen“*, wie er ihn nannte, zur *photographischen Registrirung der Neigungsänderungen*, welche er bei den Erdbeben nach dem Vorgang vieler nahmhaften Seismologen in erheblichem Betrage vermuthete. Der Apparat begann seine Arbeit im Mai 1899 und zeigte bald, dass die erwarteten Neigungsänderungen nicht vorhanden sind. Sein erstes Resultat [1]) war also negirender Art. Diesem folgten jedoch bald auch positive Ergebnisse. Der Apparat kann nämlich leicht für Registrirung jeder beliebigen Komponente parallel einer gewissen durch seine Aufstellung bedingten Vertikalebene regulirt werden, und wurde demgemäss verwendet. Die Registrirungen der *Horizontalkomponente* ergaben völlige Uebereinstimmung mit denen des Horizontalpendels, die der *Vertikalkomponente* sehr

1) Dargelegt in W. Schlüter's Doctor-Dissertation, Göttingen 1900.

www.libtool.com.cn

bedeutungsvolle Resultate, über welche W. Schlüter selbst einen Bericht veröffentlicht.

Um Vorstudien für die technischen Einzelheiten eines in Aussicht genommenen mechanisch registrirenden Vertikalseismographen zu machen, habe ich einen kleinen *Vertikal-Apparat* herstellen lassen, der seit Mitte Oktober 1900 in Thätigkeit ist und — seinen kleinen Dimensionen entsprechend — *photographisch registrirt.* —

I. Theil. Allgemeine Theorie.

§ 1. Die zu beobachtenden Bewegungen.

8. *Verrückungen.* Bei den seismischen Bewegungen der Erdoberfläche haben wir horizontale und vertikale Schwankungen zu unterscheiden, die in der Regel mit einander verbunden sind. Für die Rechnung werden wir uns auf 3 zu einander senkrechte Richtungen x, y, z beziehen, von denen die x- und die y-Richtung horizontal und die z-Richtung vertikal nach oben orientirt ist. Die Verrückungen der Theilchen der Erdrinde parallel x, y, z sollen mit ξ, η, ζ bezeichnet werden. Zu einer Verrückung σ in beliebiger Richtung s gehören also:

$$(1) \qquad \xi = \sigma\cos(s,x),\ \eta = \sigma\cos(s,y),\ \zeta = \sigma\cos(s,z),$$

wenn unter (s,n) der Winkel zwischen der s- und der n-Richtung verstanden wird.

Um der Vorstellung einen Anhalt zu geben, werde bemerkt, dass bei Erdbeben, deren Herd mehrere 1000 Kilometer entfernt ist, Ausweichungen von 1 Millimeter nur hin und wieder im Jahr überschritten werden und zwar allein in langsamen Schwingungen mit Perioden von 10 Sekunden und darüber. Die beigemischten Schwingungen mit kurzen Perioden von 2 Sekunden und darunter zeigen Ausweichungen, welche nicht oft über $^1/_{100}$ Millimeter hinausgehen. Auch bei Naheerdbeben — selbst bei Entfernungen des Epicentrums unter 100 Kilometer — muss man meist auf kleinere Verrückungen als 1 Millimeter rechnen. Die persönliche Empfindung des Menschen beginnt günstigsten Falls schon bei $^1/_{100}$ Millimeter. Bei verwüstenden Erdbeben hat man relative Verschiebungen im Gelände von mehreren Metern beobachtet. Für die Empfindung und auch für die Zerstörungen kamen dabei vorherrschend Schwingungen kurzer Perioden in Betracht, deren Amplitude ein bis zwei Dezimeter erreichte.

9. *Aenderungen der Schwerkraft.* Als „Schwerkraft“ gilt dem Maase nach diejenige Kraft, welche ein relativ zur Erde in Ruhe gehaltener Körper von der Masse 1 auf seine Unterstützung ausübt. Bei dieser Definition berücksichtigt man die Rotation der Erde, sieht aber von etwaigen seismischen Bewegungen

www.libtool.com.cn

ab. Für manche Ueberlegungen empfiehlt es sich, den Wortlaut auch bei seismisch bewegter Erde unverändert beizubehalten. Dann ergeben sich als Folge der seismischen Bewegungen *scheinbare Aenderungen der Schwerkraft.*

Wir erhalten die Aenderung dem Maase nach in dem Trägheitswiderstand der Masseneinheit, der gleich und entgegengesetzt der aufgezwungenen Beschleunigung ist. Die Komponenten des seismischen Theiles der Schwerkraft parallel den im vorigen Artikel festgesetzten Axensystems x, y, z werden also angegeben durch

$$-\frac{d^2\xi}{dt^2}, -\frac{d^2\eta}{dt^2}, -\frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

Die entsprechenden Komponenten des nicht seismischen Theiles seien

$$\Delta g_x,\ \Delta g_y,\ -g+\Delta g_z,$$

wobei g die als normal geltende Fallbeschleunigung darstellt und Δg_x, Δg_y, Δg_z Störungskomponenten anderen als seismischen Ursprungs bedeuten, herrührend zum Beispiel von der Anziehung der Himmelskörper. g musste das negative Vorzeichen erhalten, weil wir die z-Richtung nach oben hin positiv rechnen, und die normale Schwerkraft darum für sie einen negativen Werth erhält. Die Komponenten der gesammten Schwerkraft werden hiernach gleich

$$(2) \qquad -\frac{d^2\xi}{dt^2}+\Delta g_x,\ -\frac{d^2\eta}{dt^2}+\Delta g_y,\ -g-\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\Delta g_z.$$

Da die zu erwartenden seismischen und sonstigen Störungen sehr klein gegenüber g sind, dürfen wir in

$$(3) \qquad g+\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\Delta g_z$$

die Gesammtintensität und in

$$(4) \qquad i_x^{(\varphi)} = \frac{1}{g}\frac{d^2\xi}{dt^2}-\frac{\Delta g_x}{g},\ i_y^{(\varphi)} = \frac{1}{g}\frac{d^2\eta}{dt^2}-\frac{\Delta g_y}{g}$$

bezüglich in

$$(4') \quad 206000\, i_x^{(\varphi)} = 206000\left(\frac{1}{g}\frac{d^2\xi}{dt^2}-\frac{\Delta g_x}{g}\right),\ 206000\, i_y^{(\varphi)} = 206000\left(\frac{1}{g}\frac{d^2\eta}{dt^2}-\frac{\Delta g_y}{g}\right)$$

die *Neigungswinkel in Bogenmaass, bezüglich in Winkelsekunden* der abgelenkten Vertikalen sehen. $i^{(\varphi)}$ bezieht sich auf die Vertikalebene, welche die x-Richtung enthält, $i_y^{(\varphi)}$ gehört entsprechend zur y-Richtung. Als positiv gilt diejenige Drehung, welche die z-Richtung auf dem kürzesten Wege in die x- bezüglich die y-Richtung überführen würde. Man wird bemerken, dass ich mich hier nicht an die gewöhnliche Bezeichnungsweise der mathematischen Physik anschliesse. Es geschieht dies deshalb, weil es sich im Hinblick auf die praktische Verwendung nicht empfiehlt, die drei Richtungen x, y, z als gleichwerthig

www.libtool.com.cn

anzusehen, sondern besser scheint, die vertikale z-Richtung den beiden horizontalen x- und y-Richtungen gegenüber zu stellen.

Die Zahl 206000 ist nicht genau richtig, sondern bedeutet nur einen bequemen Näherungswerth für die irrationale Zahl $360 \times 60 \times 60/2\pi = 206264{,}8\ldots$, welche um etwa $^1/_{10}\,^0/_0$ grösser ist; auf die Abweichung kommt es meist nicht an, in der Regel ist es sogar erlaubt, den bequemeren Werth 200000 zu nehmen.

Bei Fernerdbeben in 1000 und mehr Kilometer treten Neigungen von 1/200000, entsprechend 1 Winkelsekunde, nur selten im Jahre auf. —

Denkt man sich die wirklichen, durch ξ, η, ζ dargestellten Bewegungen in irgend einer Weise als Superposition von Einzelbewegungen $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2, \ldots$:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \cdots,\quad \eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \cdots,\quad \zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \cdots,$$

so ergeben sich die wirklichen Beschleunigungen $d^2\xi/dt^2$, $d^2\eta/dt^2$, $d^2\zeta/dt^2$ als Superposition der Einzelbeschleunigungen:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\xi_1}{dt^2} + \frac{d^2\xi_2}{dt^2} + \frac{d^2\xi_3}{dt^2} + \cdots,\quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2\eta_1}{dt^2} + \frac{d^2\eta_2}{dt^2} + \frac{d^2\eta_3}{dt^2} + \cdots,$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{d^2\zeta_1}{dt^2} + \frac{d^2\zeta_2}{dt^2} + \frac{d^2\zeta_3}{dt^2} + \cdots.$$

Hieraus folgt, dass auch die Aenderungen der Schwerkraft als Superposition derjenigen Aenderungen erscheinen, welche zu den Einzelbewegungen gehören. Derartige Zerlegungen sind für die Auffassung sowohl dann wichtig, wenn es sich um das Zusammentreffen von Bewegungen verschiedenen Ursprungs, zum Beispiel von Erdbebenbewegungen, Pulsationen, Sturmbewegungen des Aufstellungshauses und dergleichen handelt, als auch, wenn die Bewegungen eines Ursprungs, zum Beispiel der Schwingungen, welche zu einem und demselben Erdbeben gehören, weiter zertheilt werden sollen.

10. *Schwereänderungen bei Sinusschwingungen der Erdoberfläche.* Eine hervorragende Rolle spielen in den seismischen Bewegungen die einfachsten periodischen Schwingungen, die Sinusschwingungen. Ist T die *Periode* (umfassend einen Hin- und Hergang), also die *doppelte Schwingungsdauer*, so haben wir:

$$(5)\qquad \xi = \bar{\xi}\sin 2\pi\frac{t+\delta\xi}{T},\quad \eta = \bar{\eta}\sin 2\pi\frac{t+\delta\eta}{T}\quad \zeta = \bar{\zeta}\sin 2\pi\frac{t+\delta\zeta}{T},$$

wobei $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ die Maximalschläge und $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ gewisse die Phase bestimmende Konstanten sind. Für die Beschleunigungen ergiebt sich

$$-\frac{d^2\xi}{dt^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\bar{\xi}\sin 2\pi\frac{t+\delta\xi}{T},\quad -\frac{\delta^2\eta}{dt^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\bar{\eta}\sin 2\pi\frac{t+\delta\eta}{T},$$

$$-\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\bar{\zeta}\sin 2\pi\frac{t+\delta\zeta}{T}.$$

Die Veränderungen der Vertikalkomponente der Schwere und damit zu-

www.libtool.com.cn

gleich diejenigen der *Gesammtintensität* sind also im Maximum näherungsweise:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \bar{\zeta}, \tag{6}$$

die seismischen Neigungen der Vertikalen parallel der (z,x)- und der (z,y)-Ebene sind bei entsprechender Annäherung im Maximum in *Bogenmaass*:

$$\bar{i}_x^{(\varphi)} = \frac{1}{g}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \bar{\xi},\quad \bar{i}_y^{(\varphi)} = \frac{1}{g}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \bar{\eta} \tag{7}$$

und in *Winkelsekunden*:

$$206000\,\bar{i}_x^{(\varphi)} = 206000\,\frac{1}{g}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \bar{\xi},\quad 206000\,\bar{i}_y^{(\varphi)} = 206000\,\frac{1}{g}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \bar{\eta}. \tag{7'}$$

11. *Einführung der äquivalenten Pendellänge. Im Folgenden wird es oftmals bequem sein, anstelle von Schwingungsperioden Längen in die Rechnung einzuführen; wir werden dann die Länge Λ desjenigen einfachen Pendels verwerthen, das eine gleiche Schwingungsperiode T* hat, also sich selbst überlassen in gleichem Tempo schwingt. Hiernach besteht zwischen Λ und T die Beziehung

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Lambda}{g}},\quad \Lambda = g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2,\quad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{\Lambda}. \tag{8}$$

In unserem Falle der Sinusschwingungen erhalten wir für die *Maximaländerungen der Vertikalkomponente der Schwere und zugleich ihrer Gesammtintensität* sehr einfach:

$$g\,\frac{\bar{\zeta}}{\Lambda} \tag{9}$$

und für die *Maximalneigung* in Bogenmaass:

$$\bar{i}_x^{(\varphi)} = \frac{\bar{\xi}}{\Lambda},\quad \bar{i}_y^{(\varphi)} = \frac{\bar{\eta}}{\Lambda}, \tag{10}$$

in Winkelsekunden:

$$206000\,\bar{i}_x^{(\varphi)} = 206000\,\frac{\bar{\xi}}{\Lambda},\quad 206000\,\bar{i}_y^{(\varphi)} = 206000\,\frac{\bar{\eta}}{\Lambda}. \tag{10'}$$

Denkt man sich ein Hülfspendel von der Länge Λ so aufgehängt, dass der Befestigungspunkt an den seismischen Bewegungen nicht theilnimmt, so wird wegen der Gleichheit der Schwingungszeiten der Pendelkörper dauernd die Horizontalschwingungen ξ, η mitmachen, wenn man ihn eine kurze Zeit dazu zwingt. Er wird also an seinem Faden hängend, dauernd in relativer Ruhe bleiben, sodass die Richtung des Fadens jederzeit die Richtung der seismisch abgelenkten Vertikalen angiebt. Die Neigungsänderungen des Fadens zeigen uns dann ohne Weiteres die seismischen Neigungsänderungen der Vertikalen. —

www.libtool.com.cn

Bei Naheerdbeben beobachtet man Perioden von einigen Sekunden bis herab zu $^1/_{100}$ Sekunde entsprechend $A = {}^1/_{40}$ Millimeter; bei Fernerdbeben ist es dagegen meist schon schwierig, Perioden von nur 1 Sekunde, entsprechend $A = 25$ Centimeter, nachzuweisen. Hier herrschen grössere Perioden vor, die im Allgemeinen unter 20 Sekunden, entsprechend $A = 100$ Meter, bleiben, jedoch auch 1 Minute, entsprechend $A = 900$ Meter, erreichen und darüber hinausgehen.

12. *Neigungen der Erdoberfläche.* Da die vertikalen seismischen Verrückungen von Ort zu Ort variiren, wird eine Fläche, die bei seismischer Ruhe horizontal ist, während der Erregung Hebungen und Senkungen zeigen. Indem wir uns die Fläche in der Nähe der physikalischen Erdoberfläche denken und von dem meist nicht in Betracht kommenden Einfluss von Berg und Thal absehen, wollen wir ihre Neigungen gegenüber der ursprünglichen Lage als die *Neigungen der Erdoberfläche* bezeichnen. Diesen *wirklichen* Neigungen stehen *scheinbare* Neigungen gegenüber, welche ihren Grund in den seismischen Richtungsänderungen der Schwerkraft haben. A. Schmidt[1]) (Stuttgart) hat darauf hingewiesen, dass die Wirkungen der beiden Arten von Neigungsänderungen leicht verwechselt werden können. Es wird für uns im Folgenden sehr wichtig sein, darauf sorgfältig Acht zu geben, denn es handelt sich hier in der That um eine Quelle, der vielfache Irrthümer entsprungen sind.

Da nur sehr kleine Neigungen in Rücksicht zu ziehen sind, können wir in

$$(11) \qquad i_x = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \; i_y = -\frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

die *wirklichen Neigungen* parallel der (z, x)- und (z, y)-Ebene sehen, wobei wie in Artikel 9 diejenigen Drehrichtungen als positiv gelten, welche die z-Richtung auf kürzestem Wege in die x- bezüglich y-Richtung überführen.

Die *scheinbaren Neigungen* der Erdoberfläche sind entgegengesetzt denen der Vertikalen, also nach Artikel 9 gegeben durch

$$(12) \qquad [i_x] = -i_x^{(g)} = -\frac{1}{g}\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\Delta g_x}{g}, \; [i_y] = -i_y^{(g)} = -\frac{1}{g}\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{\Delta g_y}{g}.$$

Die Gleichungen (11) und (12) beziehen sich auf Bogenmaas; die Zahlenwerthe in Winkelsekunden entstehen wieder bei Multiplikation mit 206000.

13. *Fortschreitende Sinuswellen mit vertikalen und longitudinalen horizontalen Bewegungen.* Den einfachsten und uns besonders wichtigen Fall der Neigungsschwingungen bilden über die Erdoberfläche fortlaufende Sinuswellen mit geradliniger Front und mit vertikalen und longitudinalen horizontalen Bewegungen. Etwaige transversale horizontale Bewegungen wollen wir unbeachtet lassen. Wir legen die x-Axe parallel der Fortschreitungsrichtung, sodass die y-Axe

1) Beiträge zur Geophysik, Bd. 3, S. 1, 1898.

www.libtool.com.cn

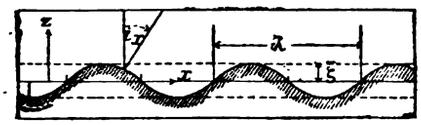
parallel den Wellen zu liegen kommt; dann ist für die Oberfläche

$$\xi = \bar{\xi} \sin 2\pi\left(\frac{t+\delta\xi}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \quad \zeta = \bar{\zeta} \sin 2\pi\left(\frac{t+\delta\zeta}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \tag{13}$$

zu setzen. $\bar{\xi}$ und $\bar{\zeta}$ bedeuten wiederum die Maximalwerthe von ξ und ζ, $\delta\xi$ und $\delta\zeta$ wiederum Konstanten, welche die Phasen bestimmen; T ist die Schwingungsperiode, λ die Wellenlänge. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v wird durch die Beziehung

$$\lambda = vT \tag{14}$$

bestimmt.



Figur 1.

Die *wirklichen Neigungen* erfolgen hier parallel der Vertikalebene durch die Fortschreitungsrichtung, also parallel der (z,x)-Ebene, und zwar ergiebt sich in Bogenmaass:

$$i_w = -\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{2\pi}{\lambda}\bar{\xi} \cos 2\pi\left(\frac{t+\delta\xi}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \tag{15}$$

Für die *scheinbaren Neigungen* infolge der horizontalen Schwankungen erhalten wir:

$$[i_w] = \frac{1}{g}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \bar{\xi} \sin 2\pi\left(\frac{t+\delta\xi}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \tag{16}$$

Der Maximalwerth für die wirklichen Neigungen ist hiernach:

$$\bar{i}_w = \frac{2\pi}{\lambda}\bar{\zeta} \tag{17}$$

und der Maximalwerth für die scheinbaren Neigungen:

$$[\bar{i}_w] = \frac{1}{g}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \bar{\xi} = \frac{\bar{\xi}}{A}, \tag{18}$$

wobei A wiederum die zu T äquivalente Pendellänge bedeutet (Art. 11).

Für das Verhältniss der wirklichen und der scheinbaren Neigungen ergiebt sich:

$$\frac{\bar{i}_w}{[\bar{i}_w]} = \frac{\frac{\bar{\zeta}}{\lambda}}{\frac{2\pi}{\bar{\xi}}{A}}. \tag{19}$$

Wir erkennen, dass die wirklichen Neigungen der Erdoberfläche dann die scheinbaren an Grösse erreichen, wenn $\bar{\zeta} : \bar{\xi} = \lambda/2\pi : A$ ist, das heisst, wenn die vertikalen Verrückungen sich zu den horizontalen verhalten wie die durch 2π

www.libtool.com.cn

getheilte Wellenlänge zur äquivalenten Pendellänge. In den praktischen Fällen der Seismik ist $\lambda/2\pi$ meist vielmals grösser als A, *gleich grosse Neigungen gegen die Vertikale, einerseits als wirkliche Neigungen infolge von Vertikalverrückungen, andererseits als scheinbare Neigungen infolge von Horizontalverrückungen, verlangen also im ersten Falle sehr viel grössere Verrückungen als im zweiten.* Auf diese Folgerung machte A. Schmidt in der soeben citirten Arbeit aufmerksam. — Da nach den Göttinger Erfahrungen die Vertikalbewegungen bei Fernerdbeben von gleicher Grössenordnung sind wie die Horizontalbewegungen, haben wir sehr viel grössere scheinbare Neigungen als wirkliche Neigungen zu erwarten. Um ein Urtheil über die Zahlwerthe zu gewinnen, wollen wir beachten, dass — aus freilich nicht ganz zuverlässigen Gründen — die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v für die Hauptwellen auf ca 3 Kilometer $= 3.10^6$ mm in der Sekunde geschätzt wird. Nehmen wir hierzu für T den häufig vorkommenden Werth von 20 Sekunden, so ergiebt sich $\lambda = Tv = 6.10^7$ mm, $A = 10^5$ mm, also für die Neigungen in Bogensekunden die Werthe

$$206000\,\bar{i}_s = \frac{1}{50}\,\bar{\xi},\quad 206000\,[\bar{i}_s] = 2\,\bar{\xi},$$

wenn die Ausweichungen ξ und ξ nach Millimetern gerechnet werden. Bei Fernerdbeben, wo Ausweichungen von einigen Millimetern vorkommen, treten nach der Gleichung rechts scheinbare Neigungen von mehreren Bogensekunden auf. Die Gleichung links zeigt uns im Gegensatz hierzu, dass *für die wirklichen Neigungen nur ziemlich kleine Bruchtheile von Bogensekunden zu erwarten sind.* Diese Folgerung bleibt auch bestehen, wenn Beobachtungsdaten für andere Perioden T zu Grunde gelegt werden.

14. *Drehungen um die Vertikale.* Als Anfangspunkt unseres Koordinatensystemes wollen wir für die folgenden Entwicklungen den *Referenzpunkt* der Beobachtungen benutzen, das heisst den Punkt der Erdoberfläche, auf welchen wir die zu registrirenden seismischen Bewegungen beziehen. Für einen nahe benachbarten Punkt mit den Koordinaten x, y dürfen dann für die horizontalen Verschiebungen parallel x und y die Werthe

$$\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x}x + \frac{\partial \xi}{\partial y}y,\quad \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x}x + \frac{\partial \eta}{\partial y}y \tag{20}$$

angenommen werden, wenn man ξ, η, sowie die Faktoren der x und y auf den Referenzpunkt bezieht. Hieraus lässt sich mittels einfacher Rechnungen leicht folgern, *dass eine Linie, welche durch den Referenzpunkt in der Richtung v hindurchgeht, eine Drehung um den Winkel*

$$\omega_v = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\cos 2(v,x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\sin 2(v,x) \tag{21}$$

erfährt. Wir erkennen, dass die Drehung im allgemeinen mit der Richtung v variirt. *Als mittlere Drehung der Erdoberfläche* an dem Beobachtungsort werden

www.libtool.com.cn

wir den arithmetischen Mittelwerth

$$(22) \qquad \omega = \frac{1}{2\pi}\int \omega_\nu d(\nu,x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right)$$

der Drehung aller durch den Referenzpunkt gehenden Linien bezeichnen.

15. *Drehungen bei fortschreitenden Sinuswellen.* Bei den in Artikel 13 betrachteten *Wellen mit longitudinaler horizontaler Bewegung*, für welche

$$(23) \qquad \xi = \bar{\xi}\sin 2\pi\left(\frac{t+\delta_\xi}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),\ \eta = 0$$

zu setzen ist, gilt

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\frac{2\pi}{\lambda}\bar{\xi}\cos 2\pi\left(\frac{t+\delta_\xi}{T} - \frac{x}{\lambda}\right);\ \frac{\partial\xi}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial\eta}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0,$$

also

$$(24) \qquad \omega_\nu = \bar{\omega}_\nu \cos 2\pi\left(\frac{t+\delta_\xi}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),\ \bar{\omega}_\nu = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\lambda}\bar{\xi}\sin 2(\nu,x);\ \omega = 0.$$

Bei entsprechenden *Wellen mit transversaler horizontaler Bewegung*:

$$(25) \qquad \xi = 0,\ \eta = \bar{\eta}\sin 2\pi\left(\frac{t+\delta_\eta}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

ergiebt sich:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial\xi}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{2\pi}{\lambda}\bar{\eta}\cos 2\pi\left(\frac{t+\delta_\eta}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),\ \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0;$$

$$(26) \qquad \left.\begin{matrix}\omega_\nu \\ \omega\end{matrix} = \begin{matrix}\bar{\omega}_\nu \\ \bar{\omega}\end{matrix}\right\} \cos 2\pi\left(\frac{t+\delta_\eta}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),\ \bar{\omega}_\nu = -\frac{2\pi}{\lambda}\bar{\eta}\cos^2(\nu,x);\ \bar{\omega} = -\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\lambda}\bar{\eta}.$$

Die grössten Drehungen erhalten wir bei longitudinalen, bezüglich bei transversalen Bewegungen in

$$\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\lambda}\bar{\xi},\ \frac{2\pi}{\lambda}\bar{\eta}.$$

Vergleicht man hiermit den in Artikel 13 gefundenen Werth für die maximalen wirklichen Neigungen

$$\bar{i}_s = \frac{2\pi}{\lambda}\bar{\xi}$$

und beachtet die schon erwähnte Erfahrung, dass bei Fernerdbeben die Horizontalbewegungen von gleicher Grössenordnung wie die Vertikalbewegungen sind, so folgt, dass *die Drehungen um die Vertikale etwa ebenso gross zu schätzen sind wie die wirklichen Neigungen*; sie werden also wie diese nur kleine Bruchtheile einer Bogensekunde erreichen.

www.libtool.com.cn

16. *Bewegungen des Gestelles.* Bisher wurde nur von den Bewegungen der Erdoberfläche gesprochen. Fassen wir jetzt den Seismographen selbst ins Auge, so muss unterschieden werden zwischen den *„Bewegungen des Gestelles“* und den *„Bewegungen des Gehänges“*. Als *„Gehänge“* wird dabei der bewegliche Theil des Apparates bezeichnet werden, welcher die Registrirungen vermittelt, als *„Gestell“* der in sich feste und mit der Erde fest verbundene Theil.

Für das Gestell wird stets eine so solide Konstruktion vorausgesetzt werden, dass die elastischen Deformationen gegenüber den Bewegungen des Gehänges unmerklich klein bleiben. In der Sprechweise der Mechanik wird das Gestell hiernach als „starr“ gelten können. Zur Beschreibung seiner Bewegungen genügen dann 6 Grössen, von denen 3 eine Parallelverschiebung und 3 eine Drehung darstellen. Die Zerlegung ist dabei nicht eindeutig, sondern enthält ein willkürliches Element. Als solches nehmen wir die Auswahl eines beliebigen Punktes und betrachten dann als Parallelverschiebung diejenige, bei welcher der ausgezeichnete Punkt aus seiner Nulllage in die jeweilige Lage übergeht, und als Drehung diejenige um den ausgezeichneten Punkt, welche das Gestell in die jeweilige Orientirung überführt.

Wir beziehen uns wieder auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z mit nach oben gerichteter z-Axe. Ist s die Richtung, σ die Grösse der Parallelverschiebung, so darf sie aufgefasst werden als Superposition dreier Verschiebungskomponenten

$$\sigma_x = \sigma\cos(s,x),\quad \sigma_y = \sigma\cos(s,y),\quad \sigma_z = \sigma\cos(s,z) \tag{27}$$

parallel den Koordinatenaxen. — Bei der Drehung ist eine entsprechende einfache Zerlegung nicht ohne Weiteres möglich, insbesondere hängt das Resultat der Zusammensetzung verschiedener Drehungen im Allgemeinen nicht allein von den Drehungen, sondern auch von ihrer Reihenfolge ab. Glücklicher Weise dürfen wir von allen derartigen Komplikationen absehen, denn in der praktischen Seismometrie handelt es sich nur um so geringe Drehungen, dass sie als unendlich klein angesehen werden können, und in diesem Falle kommen die einfachen Gesetze der Vektorzerlegung und Zusammensetzung zur Geltung. Ist also n die Axenrichtung, ϑ der Winkel der Drehung, so darf sie aufgefasst werden als Superposition dreier Drehungen

$$\vartheta_x = \vartheta\cos(n,x),\quad \vartheta_y = \vartheta\cos(n,y),\quad \vartheta_z = \vartheta\cos(n,z) \tag{28}$$

um die Koordinatenaxen. Für ϑ_x gilt hier als positiv diejenige Drehrichtung um die x-Axe, welche die y-Axe auf dem kürzesten Wege in die z-Axe überführt; $-\vartheta_x$ entspricht also einer Neigung $\parallel$ der Vertikalebene (z,y), die wir mit i_x bezeichnen. In ähnlicher Weise gehören $+\vartheta_y$ und i_y zusammen. (Vergl. Artikel 9.)

In den Komponenten σ_x, σ_y, σ_z der Parallelverschiebung σ und den Komponenten ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z der Drehung ϑ haben wir die 6 zur Bestimmung der jeweiligen Lage des Gestelles erforderlichen Grössen gewonnen, und es bleibt uns nun noch die Aufgabe, ihren Zusammenhang mit den seismischen Verrückungen der Erd-

www.libtool.com.cn

oberfläche zu untersuchen. Besonders wichtig ist hierbei der specielle Fall, in welchem der Referenzpunkt der Erdoberfläche, auf den die seismischen Verrückungen ξ, η, ζ und Drehungen i_x, i_y, ω_v, ω bezogen werden, zugleich als ausgezeichneter Punkt für die Zerlegung der Gestellbewegungen genommen wird. Der Referenzpunkt wird freilich im Allgemeinen nicht in der Materie des Gestelles liegen, aber darauf kommt es auch nicht an, denn es darf für die Zerlegung der Bewegung offenbar jeder beliebige Punkt im Raume gewählt werden, der die Gestellbewegungen mitmacht, dessen Lage wir uns also relativ zum Gestelle bestimmt denken.

Für den *Referenzpunkt* wird es in Regel erlaubt sein, einfach

$$\xi = \sigma_x,\ \eta = \sigma_y,\ \zeta = \sigma_z,\ i_x = \vartheta_y,\ i_y = -\vartheta_x \tag{29}$$

zu setzen. Sollte der Boden, auf dem das Instrument steht, sehr nachgiebig sein, oder der Pfeiler, der es trägt, sehr hoch aufragen, oder das Instrument in den oberen Stockwerken eines Gebäudes aufgestellt sein, so sind wenigstens bei schnellen seismischen Bewegungen merkliche Abweichungen zu erwarten, die sich nicht von vorne herein überblicken lassen. Wir wollen trotzdem im Folgenden die Beziehungen (29) annehmen, dabei aber ausdrücklich hervorheben, *dass die ξ, η, ζ, i_x, i_y damit eine andere Bedeutung erhalten als in den früheren Artikeln.* Früher bezogen sie sich direkt auf die seismischen Verrückungen der Erdoberfläche, weiterhin aber geben sie die Parallelverschiebungen und Neigungen des Seismographengestelles an, wenn die Zerlegung der Bewegung unter Auszeichnung des Referenzpunktes der Erdoberfläche geschieht. —

Während der Zusammenhang zwischen den σ_x, σ_y, σ_z, ϑ_x, ϑ_y mit den seismischen Verrückungen sich zwar nicht allgemein, aber doch für die gewöhnlich vorkommenden Fälle angeben lässt, bleiben wir über den Zusammenhang zwischen der Drehung ϑ_z des Gestelles um die Vertikale und den seismischen Drehungen ω_v, ω der Erdoberfläche ganz im Ungewissen. Hier wird alles auf die Art der Aufstellung ankommen. So soll denn weiterhin bei der Beschreibung der Bewegungen des Seismographen ϑ_z beibehalten werden. Bei *Zerlegung in Bezug auf den Referenzpunkt der Erdoberfläche* haben wir so die folgenden Bestimmungsstücke für die jeweilige Lage des Gestelles

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ i_x,\ i_y,\ \vartheta_z. \tag{30}$$

Wird der Koordinatenanfangspunkt in den Referenzpunkt gelegt, und sind x, y, z die Koordinaten irgend eines Punktes, der die Bewegungen des Gestelles mitmacht, in der Nulllage, das heisst, in derjenigen Stellung des Seismographen, die wir als störungsfrei betrachten, so dürfen sie während der Verrückungen wegen der angenommenen Kleinheit der Drehung gleich

$$x+\xi+z i_x-y\vartheta_z,\ y+\eta+z i_y+x\vartheta_z,\ z+\zeta-x i_x-y i_y$$

gesetzt werden. Die Verschiebungen des Punktes x, y, z parallel den Koor-

www.libtool.com.cn

dinatenaxen sind dabei

$$\xi + z i_x - y \vartheta_z,\ \eta + z i_y + x \vartheta_z,\ \zeta - x i_x - y_y i. \tag{31}$$

Bei der *Zerlegung der Bewegung in Bezug auf einen beliebigen anderen Punkt als den Referenzpunkt* bleiben die Drehungen i_x, i_y, ϑ_z dieselben; die Parallelverschiebungen aber, welche den Verrückungen des aufgewählten Punktes entsprechen müssen, werden nun durch

$$\xi + Z i_x - Y \vartheta_z,\ \eta + Z i_y + X \vartheta_z,\ \zeta - X i_x - Y i_y \tag{32}$$

angegeben, wenn X, Y, Z die Koordinaten des Punktes sind.

17. *Eintheilung der Seismographen.* Zurückblickend erkennen wir, dass sich für die Registrirung durch Seismographen die folgenden beiden Klassen von Grössen darbieten:

I Die *Parallelverschiebungen* ξ, η, ζ und damit zusammenhängend die *scheinbaren Neigungen der Erdoberfläche* und die *scheinbaren Aenderungen der Schwerkraft.*

II Die *Drehungen* i_x, i_y, ϑ_z und damit die *wirklichen Neigungen* der Erdoberfläche und ihre Drehungen um die Vertikale.

Dementsprechend können wir *zwei Hauptklassen von Seismographen* unterscheiden. Zur ersten Klasse gehören vor allem:

Ia *Apparate zur Registrirung der horizontalen Verrückungen* (ξ, η), bezüglich der *scheinbaren Neigungen*, welche *Horizontalseismographen* genannt werden sollen.

Ib *Apparate zur Registrirung der vertikalen Verrückung* (ζ), bezüglich der *scheinbaren Aenderung der Vertikalkomponente der Schwere*, welche *Vertikalseismographen* genannt werden sollen.

In der zweiten Klasse heben sich in entsprechender Weise heraus:

IIa *Apparate zur Registrirung der wirklichen Neigungen* (i_x, i_y); Herr Dr. Schlüter, der den ersten von diesen erdachte und baute, hat der ganzen Gruppe den Namen *Klinographen* gegeben. Ferner:

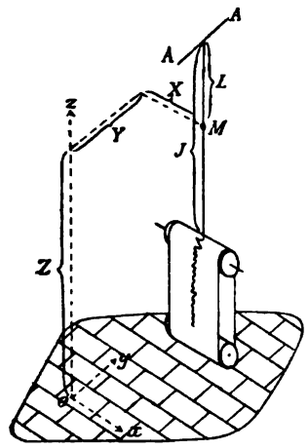
IIb *Apparate zur Registrirung der Drehungen um die Vertikale* (ω_z, ω). Sie sind für die speciellen Zwecke der Seismik noch nicht konstruirt worden. —

Zu bemerken ist, dass die Horizontalseismographen gewöhnlicher Bauart auch auf wirkliche Neigungen reagiren. In der praktischen Seismographie kommt dies jedoch nicht zur Geltung, weil der Einfluss der wirklichen Neigungen gegenüber dem der scheinbaren verschwindet. *Entsprechend wird man auch von einem Klinographen nicht zu verlangen brauchen, dass er gegen die Horizontalverrückungen, bezüglich die scheinbaren Neigungen unempfindlich bleibe*; ja man könnte sogar eine überwiegende Mitregistrirung der scheinbaren Neigungen zulassen, wenn nur durch den Vergleich mit einem gleichzeitig arbeitenden Horizontalseismographen eine Trennung der beiden Arten von Neigungen möglich gemacht wird. *Für die Theorie verwischt sich hierdurch der Unterschied zwischen den Instrumenten Ia und IIa insofern, als er aus einem qualitativen nur zu einem quantitativen wird.*

www.libtool.com.cn

Zum Schlusse darf nicht unerwähnt bleiben, dass bis heute noch kein einziger Apparat der zweiten Klasse positive Ergebnisse aufzuweisen hat. Schlüter's Klinograph hat die ihm gestellte Aufgabe freilich gelöst, indem er entschied, dass die gewöhnlichen Aufzeichnungen der Seismographen bei Erdbeben entgegen einer oftmals geäusserten Ansicht Parallelverschiebungen und nicht Neigungen anzeigen. Für die Aufzeichnungen der theoretisch zu erwartenden sehr kleinen Neigungen aber war die Empfindlichkeit nicht hinreichend. Herr Dr. Schlüter beabsichtigt, einen neuen Klinographen zu bauen, der die so noch übrig gebliebene äusserst schwierige, aber auch äusserst wichtige Aufgabe hoffentlich bewältigen wird.

§ 2. Das reibungslose einfache Pendel als Seismograph.



Figur 2.

18. *Der Apparat.* Der einfachste Repräsentant eines Horizontal-Seismographen ist ein gewöhnliches, um eine horizontale Axe (A, A in Figur 2) drehbares Pendel, das seine Bewegungen mit der Spitze eines Zeigers, die wir „*Indikator*“ nennen werden, auf einem durch ein Uhrwerk bewegtes Papier aufzeichnet. Wir wollen annehmen, dass gegenüber der Masse des eigentlichen Pendelkörpers, M, alle übrige am Pendel (mit seinem Zeiger) vernachlässigt werden kann, und dass der Pendelkörper als punktförmig gelten darf; wir setzen also ein „*einfaches*“ oder „*mathematisches*“ Pendel voraus. *Es wird sich bald zeigen, dass ein jeder der für die gewöhnliche Praxis in Betracht kommenden Horizontal-Seismographen sich in seinen Aufzeichnungen gerade so wie ein solches verhält.* Eben darum scheint es zweckmässig, die Theorie an ihm zu entwickeln, wo die Verhältnisse besonders leicht zu übersehen sind.

Um die Darstellung so weit als irgend möglich zu vereinfachen, schliessen wir vorläufig alle Bewegungshindernisse aus, nehmen also an, dass der Luftwiderstand die Bewegung nicht merklich beeinflusse und auch die Reibung in der Axe sowie an der Schreibspitze zu vernachlässigen sei.

19. *Charakteristische Konstanten.* Die Schwingungsebene des Pendels liege parallel der x-Richtung. Dann kommt von der Parallelverschiebung nur die Komponente parallel der x-Axe in Betracht, also die Komponente ξ, wenn die Gestellbewegung in Bezug auf den Referenzpunkt (O in Figur 2) zerlegt wird. Von der Drehung sind die Neigungskomponente i_x parallel der (z, x)-Ebene und die Drehung ϑ_z um die vertikale z-Axe von Einfluss.

X, Y, Z seien die Koordinaten des Pendelkörpers M in der Ruhelage, L bedeute die „*Pendellänge*“, das heisst, den Abstand des Pendelkörpers von der

www.libtool.com.cn

Drehungsaxe. Die „*Schwingungsperiode*“ T des sich selbst überlassenen Pendels wird dann bestimmt durch die Gleichung

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{L}. \tag{33}$$

J sei die „*Indikatorlänge*“, das heisst, der Abstand des Indikators von der Drehaxe. Bei einer dauernden Neigungsänderung des Apparates parallel der Schwingungsebene um den Winkel i ergiebt sich für das Pendel eine entsprechende Neigung gegen das Gestell, für den Indikator also eine neue Ruhelage, welche von der alten um die Strecke

$$Ji \text{ bezüglich } \frac{J}{206000}\, i$$

abweicht, je nachdem i in Bogenmaass oder in Winkelsekunden gemessen wird. $J/206000$ ist die Veränderung der Indikatorstellung für 1 Winkelsekunde, zeigt also die Empfindlichkeit des Seismographen gegen statische Neigungsänderungen an, wenn die Winkelsekunde als Einheit genommen wird; *die Indikatorlänge J selbst misst in gleicher Weise die Empfindlichkeit bei Bogenmaass*; dabei ist zu beachten, dass der Winkel 1 in Bogenmaass $57^0,3$ beträgt, also nur als Rechnungsgrösse, nicht als wirklicher Ausschlag in Betracht kommt.

Die Empfindlichkeit eines beliebig gebauten Seismographen gegen dauernde Neigungen parallel der Vertikalebene (z, s) durch die beliebige horizontale Richtung s wird weiterhin bei Bogenmaass mit $J^{(s)}$ bezeichnet werden. Da der Seismograph sich dann nach dem eben Gesagten bei Neigungen parallel dieser Ebene gerade so verhält, wie ein parallelschwingendes Pendel mit der Indikatorlänge $J^{(s)}$, so kann $J^{(s)}$ allgemein die zu s gehörige „*äquivalente Indikatorlänge*“ genannt werden. — Das Hinzutreten einer horizontalen Komponente Δg_s der Schwerkraft ist gleichwerthig mit einer dauernden Neigung $i_s = \Delta g_s/g$, ergiebt also den Ausschlag $(J^{(s)}/g)\, \Delta g_s$. Hieraus folgt, dass $J^{(s)}/g$ die *Empfindlichkeit gegen Schwerkraftänderungen* $\parallel s$ angiebt. —

Bei der von uns vorausgesetzten Aufstellung des Pendels ist

$$J^{(s)} = J,\ J^{(y)} = 0. — \tag{34}$$

Der Indikator zeichnet die Bewegungen des Pendelkörpers relativ zum Gestell

$$V = \frac{J}{L} \tag{35}$$

mal vergrössert auf; darum soll V die “*Indikatorvergrösserung*“ genannt werden.

Bei sehr schnellen, kurzdauernden Horizontalverschiebungen wird der Pendelkörper den Bewegungen offenbar nicht merklich folgen, sondern „*stationär*“ bleiben, wie die Seismologen zu sagen pflegen; hieraus folgt, dass solche Bewegungen V- mal vergrössert und umgekehrt aufgezeichnet werden, *dass also die negativ genommene Indikatorvergrösserung V die Vergrösserung sehr schneller Horizontal-*

www.libtool.com.cn

verrückungen angiebt. — Eine genaue Darstellung im Sinne der Mathematik, würde hier den Begriff und den Ausdruck „unendlich schnell" verlangen. Der Ersatz von „unendlich schnell" durch „sehr schnell" deutet in der üblichen Weise auf die erlaubte Anwendung des Grenzwerthes V in solchen wirklichen Fällen hin, wo die Abweichung nicht merklich ist. —

Es wird die Vergrösserung sehr schneller Parallelverschiebungen parallel der beliebigen Richtung s weiterhin mit $-V^{(s)}$ bezeichnet und dabei $V^{(s)}$ mit Rücksicht auf das eben gefundene Verhalten eines einfachen Pendels *die zu s gehörige „Indikatorvergrösserung" genannt werden.* In unserem Falle ist

$$(36) \qquad V^{(x)} = J^{(x)}/L,\ V^{(y)} = 0,\ V^{(z)} = 0. —$$

Auch bei sehr schnellen Neigungsänderungen bleibt der Pendelkörper stationär; da das Gestell dabei in der Höhe Z des Pendelkörpers parallel der x-Richtung die Verrückungen Zi_x erfährt, ergeben sich die Indikatorausschläge $-V^{(x)} Zi_x$.

Aehnliche Ueberlegungen ergeben für die Ausschläge bei sehr schnellen Drehungen ϑ_z um die Vertikale die Werthe $V^{(x)} Y\vartheta_z$.

Wir werden weiterhin die Empfindlichkeit gegen sehr schnelle Neigungen parallel der Vertikalebene durch die beliebige horizontale Richtung s mit $-W^{(i_s)}$ und die Empfindlichkeit gegen sehr schnelle Drehungen um die Vertikale mit $-W^{(\vartheta_z)}$ bezeichnen, wenn Drehungsaxen durch den Referenzpunkt angenommen werden. In unserem Falle ist hiernach:

$$(37) \quad W^{(i_x)} = V^{(x)} Z = \frac{J^{(x)}}{L} Z,\ W^{(i_y)} = 0,\ W^{(\vartheta_z)} = -V^{(x)} Y = -\frac{J^{(x)}}{L} Y. —$$

Die hervorgehobene Beziehung zum Referenzpunkt ist wohl zu beachten. Bei anders gelegenen Drehungsaxen ergeben sich andere Empfindlichkeiten W; diese werden zu 0, wenn die Axen durch M hindurchgehen.

Die X-Ordinate kommt weder bei Parallelverschiebungen, noch bei Neigungen, noch bei Drehungen um die Vertikale zur Geltung, ist also überhaupt gleichgültig. Auch die Grösse der Masse M erscheint bedeutungslos, denn alles, was wir verlangen müssen, ist nur, dass M hinreicht, um die Reibungswiderstände unserer Annahme gemäss unschädlich zu machen.

So bleiben als charakteristische Bestimmungsstücke für unser seismisches Pendel die Grössen L, $J^{(x)} = J$, Z, Y übrig.

Statt der *Pendellänge* L können wir auch die durch Gleichung (33) damit verbundene *Schwingungsperiode* T angeben, ebenso

statt der *Indikatorlänge* $J^{(x)}$ die durch erste Gleichung (36) damit verbundene *Empfindlichkeit gegen schnelle Parallelverschiebungen* $V^{(x)}$,

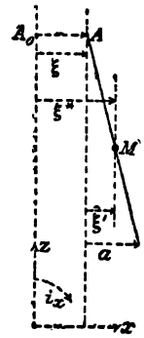
statt der Ordinate z die durch die erste Gleichung (37) damit verbundene *Empfindlichkeit gegen schnelle Neigungsänderungen* $W^{(i_x)}$,

statt der Ordinate Y die durch die dritte Gleichung (37) damit verbundene *Empfindlichkeit gegen schnelle Drehungen um die Vertikale* $W^{(\vartheta_z)}$.

www.libtool.com.cn

Wollen wir bei der Beschreibung genau sein, so ist hier hinzuzufügen, dass $J^{(\omega)}$, $V^{(\omega)}$, $W^{(i,\omega)}$ und $V^{(\omega)}$ gleich 0 sind.

20. *Einwirkung von Parallelverschiebungen.* Als Vorbereitung für die Ableitung der Bewegungsgleichung des Indikators bei beliebigen seismischen Bewegungen soll zunächst der Fall der nicht von Drehungen begleiteten Parallelverschiebungen untersucht werden.



Figur 3.

Figur 3 stelle die Schwingungsebene des Pendels dar. A_0 sei die Lage der Axe bei seismischer Ruhe, A die Lage bei der seismischen Verrückung ξ. ξ' bedeute den Ausschlag des Pendelkörpers relativ zum Gestell, also auch relativ zu der Erdoberfläche an der betreffenden Stelle;

$$\xi^* = \xi + \xi'$$

ist dann die Verrückung relativ zur Erde im Ganzen und kann, da es bei unseren Problemen auf die Bewegung der Erde im Ganzen — auf ihre Wanderung durch den Weltenraum und ihre Axendrehung — nicht ankommt, als *absolute Verrückung im Raume* angesehen werden.

Die Ableitung der Bewegungsgleichung des Pendels ist hiernach an ξ^* zu knüpfen. Wir rechnen mit der gewöhnlichen Schwerkraft, die für den Pendelkörper M einen Zug Mg nach unten ergiebt. Da nur geringe Bewegungen der Erdoberfläche und geringe Ausschläge des Pendels vorausgesetzt werden, ist es erlaubt, die Spannung des Pendelstabes ebenfalls $= Mg$ zu setzen. Bei einer Neigung des Pendels ergiebt diese Spannung dann für M eine Kraftkomponente $-Mg\xi'/L$ parallel der x-Richtung, sodass die Beschleunigung $d^2\xi^*/dt^2$ durch die Gleichung

$$M\frac{d^2\xi^*}{dt^2} = -M\frac{g}{L}\xi' \tag{38}$$

bestimmt wird. Ersetzen wir hierin ξ^* durch $\xi+\xi'$ und gemäss Figur 3 und der ersten Gleichung (34) noch ξ' durch $La/J^{(\omega)}$, *wobei a den registrirten Ausschlag des Indikators bedeutet*, so entsteht in

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{g}{L}a - \frac{J^{(\omega)}}{L}\frac{d^2\xi}{dt^2} \tag{39}$$

die gesuchte *Indikatorgleichung für Parallelverschiebungen.*

21. *Einwirkung von Drehungen und Aenderungen der Schwerkraft.* Wir wollen nun zweitens Parallelverschiebungen ausschliessen und *Drehungen* annehmen; dabei soll aber zunächst vorausgesetzt werden, dass die Drehungen um den Punkt X, Y, Z, das heisst, um den Ruhepunkt von M stattfinden. Wegen der stets nur äusserst geringen Ausweichung von M darf dann angenommen werden, dass mit den Drehungen nicht unmittelbar Aenderungen der Indikatorstellung verbunden sind.

www.libtool.com.cn

i_x sei der Neigungswinkel parallel der (z, x)-Ebene, ξ' wie vorhin die Ausweichung des Pendelkörpers relativ zum Gestell, ξ^* die Ausweichung relativ zur Gleichgewichtslage bei seismischer Ruhe. Wegen unserer Annahme über die Lage der Drehungsaxen und nur kleiner Bewegungen ist dann

$$\xi^* = \xi'$$

zu setzen. Die Neigung der Pendelstange gegen die Normale ist

$$\left(i_x - \frac{\xi'}{L}\right);$$

dementsprechend ergiebt sich als bewegende Kraft $\parallel$ der x-Richtung

$$\left(i_x - \frac{\xi'}{L}\right) Mg,$$

und wir erhalten

$$M\frac{d^2\xi^*}{dt^2} = -Mg\left(\frac{\xi'}{L} - i_x\right). \tag{40}$$

Wird hierin ξ' für ξ^* und $La/J^{(a)}$ für ξ' gesetzt, so folgt als *Bewegungsgleichung des Indikators bei Drehungen um den Ruhepunkt des Pendelkörpers*:

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{g}{L}a + \frac{J^{(a)}}{L}g i_x. \tag{41}$$

Finden ausser den Drehungen noch *Aenderungen der Schwerkraft* statt, so ergiebt die Komponente Δg_x parallel x die bewegende Kraft $M\Delta g_x$; dieser Ausdruck ist also rechts in (39) hinzuzufügen, und es entsteht dann als Indikatorgleichung anstelle von (41)

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{g}{L}a + \frac{J^{(a)}}{L}(g i_x + \Delta g_x). \tag{41'}$$

22. *Indikatorgleichung für beliebige Störungen.* Im allgemeinen Falle beliebiger Bewegungen und Schweränderungen sind die Ueberlegungen der beiden letzten Artikel zu kombiniren. Damit dies möglich wird, müssen die Gestellbewegungen in Bezug auf den Punkt X, Y, Z zerlegt werden. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass wir nach früheren Festsetzungen (Artikel 16) die Verschiebungen ξ, η, ζ und die Drehungen i_x, i_y, ϑ_z zur Wahrung des Zusammenhangs unserer Formeln mit den seismischen Bewegungen einer Zerlegung der Gestellbewegungen in Bezug auf den Referenzpunkt der Erdoberfläche zuordnen. Als Parallelverschiebung in der x-Richtung ist also nun nicht wie in Artikel 20 einfach ξ, sondern nach Artikel 16 unter Rücksicht auf die Drehungen $\xi + Zi_x - Y\vartheta_z$ zu nehmen. So ergiebt sich als Ausweichung des Pendelkörpers relativ zur Gleichgewichtslage bei Abwesenheit von Störungen

$$\xi^* = \xi + Zi_x - Y\vartheta_z + \xi',$$

www.libtool.com.cn

und die Bewegungsgleichung des Pendelkörpers:

$$M\frac{d^2\xi^*}{dt^2} = -Mg\left(\frac{\xi'}{L}-i_x\right)+M\Delta g_x \tag{42}$$

liefert unter Rücksicht hierauf und auf die Beziehung $\xi' = La/J^{(\omega)}$ sowie die Beziehungen des Artikels 19:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d^2a}{dt^2} &= -\frac{g}{L}a-\frac{J^{(\omega)}}{L}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}-gi_x-\Delta g_x\right)-W^{(i_x)}\frac{d^2i_x}{dt^2}-W^{(\vartheta_x)}\frac{d^2\vartheta_x}{dt^2}\\ &= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2-V^{(\omega)}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}-gi_x-\Delta g_x\right)-W^{(i_x)}\frac{d^2i_x}{dt^2}-W^{(\vartheta_x)}\frac{d^2\vartheta_x}{dt^2}\end{aligned}\right. \tag{43}$$

als *Indikatorgleichung für beliebige Störungen.*

23. *Beliebige Aufstellung.* Bisher wurde angenommen, dass die Schwingungsebene des Pendels der x-Richtung parallel sei. Bei einer anderen Aufstellung wirken ξ, i_x, Δg_x nur mit den Antheilen $\xi\cos(k,x)$, $i_x\cos(k,x)$, $\Delta g_x\cos(k,x)$, wenn k die Schwingungsrichtung bedeutet; andererseits gewinnen dann η, i_y, Δg_y mit entsprechenden Antheilen Einfluss. Wird alles dies berücksichtigt, so ergiebt (43) als *Indikatorgleichung für beliebige Störungen und beliebige Aufstellung*:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d^2a}{dt^2} &= -\frac{g}{L}a-\frac{J^{(\omega)}}{L}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}-gi_x-\Delta g_x\right)-\frac{J^{(\psi)}}{L}\left(\frac{d^2\eta}{dt^2}-gi_y-\Delta g_y\right)\\ &\quad -W^{(i_x)}\frac{d^2i_x}{dt^2}-W^{(i_y)}\frac{d^2i_y}{dt^2}-W^{(\vartheta_z)}\frac{d^2\vartheta_z}{dt^2}\\ &= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2a-V^{(\omega)}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}-gi_x-\Delta g_x\right)-V^{(\psi)}\left(\frac{d^2\eta}{dt^2}-gi_y-\Delta g_y\right)\\ &\quad -W^{(i_x)}\frac{d^2i_x}{dt^2}-W^{(i_y)}\frac{d^2i_y}{dt^2}-W^{(\vartheta_z)}\frac{d^2\vartheta_z}{dt^2},\end{aligned}\right. \tag{44}$$

wenn gesetzt wird

$$\left\{\begin{aligned}&J^{(\omega)} = J\cos(k,x),\ J^{(\psi)} = J\cos(k,y),\ V^{(\omega)} = V\cos(k,x),\ V^{(\psi)} = V\cos(k,y),\\ &J = LV,\ J^{(\omega)} = LV^{(\omega)},\ J^{(\psi)} = LV^{(\psi)},\\ &W^{(i_x)} = V^{(\omega)}Z,\ W^{(i_y)} = V^{(\psi)}Z,\ W^{(\vartheta_z)} = V^{(\psi)}X-V^{(\omega)}Y.\end{aligned}\right. \tag{45}$$

a ist der Indikatorausschlag, T die Periode der Eigenschwingungen; L, J, V behalten ihre früheren, direckt durch Figur 2 gegebenen Bedeutungen. Die Zahlwerthe der Faktoren $J^{(\omega)}$, $J^{(\psi)}$, $V^{(\omega)}$, $V^{(\psi)}$, $W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$, $W^{(\vartheta_z)}$ hängen von der Aufstellung ab.

Selbstverständlich lässt sich nun mittels der Bewegungsgleichung (44) des Indikators direkt nachweisen, dass wirklich entsprechend den Festsetzungen und Bemerkungen des Artikel 19: T die Periode der Eigenschwingungen, $J^{(\omega)}$, $J^{(\psi)}$ die Empfindlichkeiten gegen dauernde Neigungen, $J^{(\omega)}/g$, $J^{(\psi)}/g$ die Empfindlickeiten gegen horizontale Schwerestörungen, $-V^{(\omega)}$, $-V^{(\psi)}$ die Vergrösserungen sehr

www.libtool.com.cn

schneller Horizontalverschiebungen, $-W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$, $W^{(\phi_z)}$ die Empfindlichkeiten gegen sehr schnelle Neigungen und Drehungen um die Axe durch den Referenzpunkt darstellen.

In Anlehnung an unsere in Artikel 17 festgesetzte Eintheilung der Seismographen, ist das Glied mit $W^{(\phi_z)}$ als eines II. *Klasse* zu bezeichnen. Aus Gründen, die im folgenden Artikel zu Tage treten werden, wollen wir auch die Glieder mit $W^{(i_x)}$ und $W^{(i_y)}$ der II. *Klasse* zuzählen. Im Gegensatz dazu gehören dann die Glieder mit $J^{(x)}$, $J^{(y)}$, bezüglich $V^{(x)}$, $V^{(y)}$ zur I. *Klasse.*

Angesichts der ziemlich komplicirten Gleichung (46), die in wenig veränderter Form weiterhin auch bei Seismographen anderer Konstruktion wieder und wieder auftreten wird, mag sogleich bemerkt werden, *dass für die praktische Seismometrie wegen der Kleinheit der Drehungen die Glieder II. Klasse im allgemeinen bedeutungslos werden, sodass die viel einfachere Formel:*

$$(46)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2a}{dt^2} = -\dfrac{g}{L}a - \dfrac{J^{(x)}}{L}\left(\dfrac{d^2\xi}{dt^2} - gi_x - \Delta g_x\right) - \dfrac{J^{(y)}}{L}\left(\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - gi_y - \Delta g_y\right) \\ \qquad = -\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(x)}\left(\dfrac{d^2\xi}{dt^2} - gi_x - \Delta g_x\right) - V^{(y)}\left(\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - gi_y - \Delta g_y\right), \end{cases}$$

welche nur noch die Störungsglieder I. Klasse enthält, in der Regel anstelle von (44) treten darf. Hier gehen ausser der *Pendellänge* L und der damit verbundenen Schwingungsperiode T als Konstanten des Seismometers allein noch die *äquivalenten Indikatorlängen* $J^{(x)}$, $J^{(y)}$ bezüglich die damit verbundenen *Indikatorvergrösserungen* $V^{(x)}$, $V^{(y)}$ ein.

24. *Trennung verschiedenartiger Störungen.* In den gewöhnlichen Fällen, in welchen die Formel (46) anwendbar ist, knüpft sich der Einfluss der Störungen allein an die Aggregate

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - gi_x - \Delta g_x,\quad \frac{d^2\eta}{dt^2} - gi_y - \Delta g_y,$$

deren Zusammensetzung von der Eigenart des seismischen Pendels unabhängig ist. Aus den Diagrammen lassen sich dann auch nur auf ihre Werthe Schlüsse ziehen, und *es ist insbesondere selbst bei Vergleich der Aufzeichnungen verschiedener Apparate völlig unmöglich, die durch* ξ, η *gemessenen Parallelverschiebungen und die durch* i_x, i_y *gemessenen Neigungen voneinander zu trennen.* Wir sind hier zu einem schon früher berührten Punkte gekommen, in welchem die praktische Seismometrie vielfach in Irrthümer gerieth.

Was die speciellere Formel (46) uns versagt, das leistet wenigstens theoretisch die allgemeinere (44). Es kommt dabei darauf an, die Wirkung der Glieder mit $J^{(x)}$, $J^{(y)}$ bezüglich $V^{(x)}$, $V^{(y)}$ und der Glieder mit $W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$ zu trennen, etwa indem man die Aufzeichnungen von Apparaten vergleicht, in denen der Einfluss sich wesentlich verschieden vertheilt. Da $W^{(i_x)}/V^{(x)} = W^{(i_y)}/V^{(y)} = Z$ ist, so läuft dies darauf hinaus, *Aufzeichnungen bei möglichst weit verschiedener Höhe des Pendelkörpers über dem Erdboden mit einander zu vergleichen.*

www.libtool.com.cn

Um eine Uebersicht zu gewinnen, fragen wir nach dem Verhältniss des Einflusses der beiden i_s entsprechenden Glieder $W^{(i_s)} d^2 i_s/dt^2$ und $V^{(s)} g i_s$ in dem besonders wichtigen Fall der Sinusschwingungen der Erdoberfläche. Wir setzen demgemäss:

$$i_s = \bar{i}_s \sin 2\pi \frac{t+\delta_s}{T}, \quad \frac{d^2 i_s}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \bar{i}_s \sin 2\pi \frac{t+\delta_s}{T} = -\frac{g}{A} \bar{i}_s \sin 2\pi \frac{t+\delta_s}{T}$$

sodass T die Periode der Schwingungen, A die äquivalente Pendellänge bedeutet, und erhalten dann wegen $W^{(i_s)} = Z V^{(s)}$:

$$W^{(i_s)} \frac{d^2 i_s}{dt^2} = -\frac{Z}{A} V^{(s)} g \bar{i}_s \sin 2\pi \frac{t+\delta_s}{T} = -\frac{Z}{A} V^{(s)} g i_s.$$

Der Einfluss der beiden zu i_s gehörigen Glieder verhält sich also wie $Z:A$, und wird gleich, wenn die Höhe Z die zur Periode der Neigungsstörungen gehörige äquivalente Pendellänge A erreicht. Bei Fernerdbeben kommen im wesentlichen Perioden von 1 bis 20 Sekunden und also äquivalente Pendellängen von 1/4 bis 100 Meter in Betracht, bei Naheerdbeben gehen die Werthe noch weiter herab. Es scheint hiernach wohl möglich, schon mit einfachen Pendelseismographen die Frage, ob Neigungen, ob Parallelverschiebungen, für die kurzen Perioden zur Entscheidung zu bringen. Für die längeren Perioden müssten freilich so hohe Gestelle gewählt werden, dass die technischen Schwierigkeiten unüberwindlich scheinen. Hier sind dann nach dem Vorgang von W. Schlüter andere Konstruktionen zu wählen, um $W^{(i_s)}$, $W^{(i_p)}$ gegenüber $V^{(s)}$, $V^{(p)}$ gross genug zu machen. —

In der Bedeutung, welche den Gliedern mit $W^{(i_s)}$, $W^{(i_p)}$ nach diesen Ueberlegungen für die Herauslösung der Neigungen aus der Gesammtheit der Störungen und besonders für die Trennung von den Parallelverschiebungen zukommt, ist die Berechtigung für ihre im vorigen Artikel eingeführte Bezeichnung als Glieder II. Klasse zu suchen.

§ 3. Reibungslose Seismographen mit punktförmiger Masse.

25. *Horizontalseismographen.* Ohne weiteres ist klar, dass es bei dem im vorigen Paragraphen besprochenen Pendelseismographen nicht notwendig ist, den Indikator in starre Verbindung mit dem Pendel zu bringen, dass die Bewegung des Indikators vielmehr in irgend einer beliebigen Weise, mittels Gelenke, Hebel, Räder, mit der Bewegung der Pendelmasse verbunden werden kann. Worauf es allein ankommt, ist, in welchem Verhältniss die Bewegung der Pendelmasse im Diagramm vergrössert erscheint. Wir wollen diese *„Indikatorvergrösserung“* wieder mit V bezeichnen. Sie wird dann gerade so wie früher die Vergrösserung sehr schneller Parallelverschiebungen in der Schwingungs-

www.libtool.com.cn

richtung k des Pendels angeben, und die zu x und y gehörigen Indikatorvergrösserungen $V^{(x)}$, $V^{(y)}$ werden wie vorhin durch die Formeln $V^{(x)} = V\cos(k,x)$, $V^{(y)} = V\cos(k,y)$ bestimmt werden.

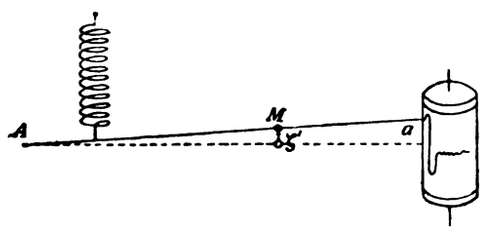
Die Aufhängung der Masse M als Körper eines einfachen Pendels kommt nur insofern in Betracht, als damit bei Ablenkungen des Pendelkörpers um die Strecke ξ' eine mit ξ' proportionale zurücktreibende Kraft $gM\xi'/L$ erweckt wird. Das Gleiche kann auf sehr verschiedene andere Weise erreicht werden, durch komplicirtere Führungen, durch Anwendung von Federn und so weiter. Die Aufzeichnungen des Seismographen müssen offenbar in allen diesen Fällen dieselben sein. Ist also die zurücktreibende Kraft $= -f\xi'$, wobei f einen konstanten Proportionalitätsfaktor bedeutet, und setzen wir

$$\frac{f}{M} = \frac{g}{L} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2, \tag{47}$$

so giebt uns L diejenige Länge eines einfachen Pendels an, welche einen Seismographen derselben Wirksamkeit ergeben würde, und T die Periode der Eigenschwingungen. L ist jetzt nur Rechnungsgrösse und wird daher als die *„äquivalente" Pendellänge* bezeichnet werden müssen.

Die Bewegungen der einfachen Pendelseismographen waren bestimmt, wenn ausser L bezüglich T und V noch die Ruhelage des pendelnden Körpers durch die Koordinaten X, Y, Z in Bezug auf den Referenzpunkt gegeben war. Gerade so muss es auch hier sein, sodass die Formeln (44)—(46) unverändert gültig bleiben. Zu bemerken ist nur, dass wie L nun auch die Indikatorlänge J ihre unmittelbare Bedeutung verliert; wir werden J daher jetzt die zur Schwingungsrichtung des pendelnden Körpers gehörige *„äquivalente Indikatorlänge"* nennen müssen.

26. *Vertikalseismographen.* Unsere theoretische Behandlung der Seismographen mit horizontaler Führung des pendelnden Körpers lässt sich unmittelbar auf solche mit vertikaler Führung übertragen. Bei diesen wird die herabziehende Wirkung der Schwerkraft irgend wie, zum Beispiel durch eine Feder nach Andeutung von Figur 4 aufgehoben werden müssen. Für die Theorie ergiebt sich dabei nichts wesentlich Neues, solange unsere bisherige Voraussetzung gewahrt bleibt, dass am Gehänge alle Masse gegenüber derjenigen des pendelnden Körpers vernachlässigt werden darf.



Figur 4.

Fänden nur Parallelverschiebungen statt, so käme nur die durch ζ gemessene Vertikalkomponente zur Geltung, und es ergäbe sich für M die Bewegungsgleichung

$$M\frac{d^2\zeta^*}{dt^2} = -f\zeta', \tag{48}$$

www.libtool.com.cn

wobei in analoger Weise wie früher ζ' den zum Gestell relativen und $\zeta^* = \zeta + \zeta'$ den absoluten Ausschlag des pendelnden Körpers bedeutet.

Bei beliebigen Störungen zerlegen wir wieder die Gestellbewegungen in Bezug auf den Ruhepunkt X, Y, Z des pendelnden Körpers M, sodass nach Artikel 16 die Parallelverschiebungen gleich $\xi + Zi_x - Y\vartheta_z$, $\eta + Zi_y + X\vartheta_z$, $\zeta - Xi_x - Yi_y$ und die Drehungen gleich i_x, i_y, ϑ_z werden. Die letzteren bleiben bei den allein in Betracht kommenden kleinen Ausschlägen, welche M nur unwesentlich von dem angenommenen Drehpunkt X, Y, Z entfernen, ganz unwirksam, die ersteren werden berücksichtigt, wenn $\zeta^* = \zeta - Xi_x - Yi_y + \zeta'$ gesetzt wird. — Von den Schwerestörungen fügt Δg_z rechts in (48) das Glied $M\Delta g_z$ hinzu. Berücksichtigen wir schliesslich noch, dass ζ' mit dem Ausschlag a durch die Formel $\zeta' = a/V^{(a)}$ zusammenhängt, wobei $V^{(a)}$ eine gewisse dem Apparat eigenthümliche Konstante bedeutet, so liefert (48) die *Indikatorgleichung*

$$\begin{aligned} \frac{d^2a}{dt^2} &= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(a)}\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \Delta g_z\right) - W^{(i_x)}\frac{d^2i_x}{dt^2} - W^{(i_y)}\frac{d^2i_y}{dt^2} \\ &= -\frac{g}{L}a - \frac{J^{(a)}}{L}\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \Delta g_z\right) - W^{(i_x)}\frac{d^2i_x}{dt^2} - W^{(i_y)}\frac{d^2i_y}{dt^2}, \end{aligned} \tag{49}$$

in der

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{L} = \frac{f}{M}, \quad W^{(i_x)} = -V^{(a)}X, \quad W^{(i_y)} = -V^{(a)}Y \tag{50}$$

ist, T wieder die *Schwingungsperiode*, L die *äquivalente Pendellänge* angiebt. $V^{(a)}$ werden wir auch hier „*Indikatorvergrösserung*“ nennen. $J^{(a)}$ hat mit Indikatorlänge eines einfachen Pendels zwar nur noch entfernte formale Verwandtschaft, immerhin aber kann dies im Interesse einer einheitlichen und bequemen Bezeichnungsweise als genügend angesehen werden, um $J^{(a)}$ als die zu a gehörige „*äquivalente Indikatorlänge*“ zu bezeichnen.

Entsprechend $J^{(a)}/g$, $J^{(v)}/g$ giebt $J^{(a)}/g$ nach (49) die *Empfindlichkeit gegen Aenderungen der Vertikalkomponente der Schwere* an; das heisst, es gehört zu Δg_z der Ausschlag $\Delta a = (J^{(a)}/g)\,\Delta g_z$. $-\Delta g_z$ ist mit einer Gewichtsvermehrung von M um $-M\Delta g_z$ verbunden; dieselbe Vermehrung würde sich auch durch Vergrösserung der Masse um $\Delta M = -M\Delta g_z/g$ ergeben. Hieraus folgt, dass ΔM den Ausschlag

$$\Delta a = -\frac{J^{(a)}}{M}\Delta M \tag{51}$$

verursacht. $-J^{(a)}/M$ bedeutet also für unseren Vertikalseismographen die *Empfindlichkeit gegen eine Massenvermehrung von M.* Diese Bemerkung hat für die praktische Bestimmung von $J^{(a)}$ einiges Interesse. —

27. *Seismographen eines Freiheitsgrades mit beliebiger Schwingungsrichtung.* Nachdem nunmehr die Fälle horizontal und vertikal gerichteter Schwingungslinien behandelt worden sind, bleibt uns zum Abschluss noch die Untersuchung des allgemeinen Falles beliebiger Schwingungsrichtung.

www.libtool.com.cn

X, Y, Z seien wieder die Koordinaten der pendelnden Masse M in der Ruhelage bei Abwesenheit von Störungen. l bedeute die zugehörige Schwingungsrichtung, λ' die Verrückung von M parallel l relativ zum Gestell, λ^* die Verrückung relativ zur Erde im Ganzen, die wir als absolute Verrückung betrachten; λ sei die Verrückung desjenigen mit dem Gestell fest verbunden gedachten Punktes, der im Falle seismischer Ruhe die Stelle X, Y, Z einnimmt. Dann ist

$$\lambda^* = \lambda + \lambda' \tag{52}$$

und unter Rücksicht auf Artikel 16:

$$\lambda = (\xi + Zi_x - Y\vartheta_z)\cos(l,x) + (\eta + Zi_y + X\vartheta_z)\cos(l,y) + (\zeta - Xi_x - Yi_y)\cos(l,z). \tag{53}$$

Wir suchen die Bewegungsgleichung von M in Bezug auf die Richtung l, indem wir $Md^2\lambda^*/dt^2$ gleich der parallel l wirkenden bewegenden Kraft setzen. Bei Abwesenheit von Störungen ist wie früher eine mit der Verrückung λ' proportionale zurücktreibende Kraft anzunehmen; diese sei $= -f\lambda'$. Die Schwerestörungen Δg_x, Δg_y, Δg_z ergeben hierzu die Komponente $\Delta g_z \cos(l,x) + \Delta g_y \cos(l,y) + \Delta g_z \cos(l,z)$. Bei Neigungen des Gestelles tritt eine weitere Aenderung ein, weil die Reaktionskraft der Bahn sich dann in anderer Weise mit der Schwerkraft zusammensetzt. Bei den angenommenen kleinen Störungen ist es erlaubt, die Neigungen des Gestelles i_x, i_y durch gleich grosse aber entgegengesetzt gerichtete Neigungen der Schwerkraft zu ersetzen. Dieses wiederum geschieht mit hinreichender Genauigkeit, wenn die Schwerkraftkomponenten gi_x, gi_y parallel x und y angenommen werden. Für die bewegende Kraft parallel l ergiebt sich so die Komponente $gi_x \cos(l,x) + gi_y \cos(l,g)$.

Werden alle aufgezählten Antheile der bewegenden Kraft parallel l zusammengenommen, so folgt als Bewegungsgleichung

$$M\frac{d^2\lambda^*}{dt^2} = -f\lambda' + (gi_x + \Delta g_x)\cos(l,x) + (gi_y + \Delta g_y)\cos(l,y) + \Delta g_z \cos(l,z). \tag{54}$$

Genau genommen müssten auf der rechten Seite noch Glieder hinzugefügt werden, welche von derjenigen Veränderung des Reaktionsdruckes der Bahn herrühren, die auf Rechnung der Bewegungen der Bahn und der Masse M kommt, doch sind sie für die gewöhnliche Seismometrie ohne irgend welchen Belang.

In die Bewegungsgleichung (54) für M sind nun λ^* und λ' mittels (52), (53) sowie

$$a = V\lambda' \tag{55}$$

durch die Verrückungen ξ, η, ζ, i_x, i_y, ϑ_z und den Indikatorausschlag a zu ersetzen, dann folgt als *Indikatorgleichung für den Seismographen eines Freiheitsgrades mit punktförmiger Masse bei beliebiger Schwingungsrichtung*:

www.libtool.com.cn

$$(56)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2a}{dt^2} &= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(x)}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - gi_x - \Delta g_x\right) - V^{(y)}\left(\frac{d^2\eta}{dt^2} - gi_y - \Delta g_y\right) - V^{(z)}\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \Delta g_z\right) \\ &\qquad - W^{(i_x)}\frac{d^2i_x}{dt^2} - W^{(i_y)}\frac{d^2i_y}{dt^2} - W^{(\vartheta_z)}\frac{d^2\vartheta_z}{dt^2} \\ &= -\frac{g}{L}a - \frac{J^{(x)}}{L}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - gi_x - \Delta g_x\right) - \frac{J^{(y)}}{L}\left(\frac{d^2\eta}{dt^2} - gi_y - \Delta g_y\right) - \frac{J^{(z)}}{L}\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \Delta g_z\right) \\ &\qquad - W^{(i_x)}\frac{d^2i_x}{dt^2} - W^{(i_y)}\frac{d^2i_y}{dt^2} - W^{(\vartheta_z)}\frac{d^2\vartheta_z}{dt^2}, \end{aligned}\right.$$

wobei gemäss den in Artikel 19 festgesetzten Bezeichnungen

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{L} = \frac{f}{M}, \\ &V^{(x)} = \frac{J^{(x)}}{L} = V\cos(l,x),\quad V^{(y)} = \frac{J^{(y)}}{L} = V\cos(l,y),\quad V^{(z)} = \frac{J^{(z)}}{L} = V\cos(l,z), \\ &W^{(i_x)} = V^{(x)}Z - V^{(z)}X,\quad W^{(i_y)} = V^{(y)}Z - V^{(z)}Y,\quad W^{(\vartheta_z)} = V^{(y)}X - V^{(x)}Y \end{aligned}\right.$$

gesetzt worden ist, sodass $V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$ die *„Indikatorvergrösserungen"*, $J^{(x)}$, $J^{(y)}$, $J^{(z)}$ die *„äquivalenten Indikatorlängen"*, $W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$, $W^{(\vartheta_z)}$ die *Empfindlichkeiten gegen sehr schnelle Neigungen und Drehungen* sind.

Wiederum werden wir zwischen Störungsgliedern *I. Klasse, welche die Faktoren $V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$, bezüglich $J^{(x)}$, $J^{(y)}$, $J^{(z)}$ enthalten, und Gliedern II. Klasse, welche die Faktoren $W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$ $W^{(\vartheta_z)}$ enthalten, unterscheiden können, von denen für die gewöhnliche Praxis allein die Glieder I. Klasse in Betracht kommen.*

Nach (57) erscheinen $V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$ sowie $J^{(x)}$, $J^{(y)}$, $J^{(z)}$ und $W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$, $W^{(\vartheta_z)}$ als Komponenten gewisser Faktoren V, J, W, von denen V und J der Schwingungsrichtung l der Masse M parallel liegen und W sowohl auf dieser Richtung als auch auf der Verbindungslinie zwischen dem Referenzpunkt und dem Ruhepunkt von M senkrecht steht. V ist gleich der Vergrösserung der Bewegung von M im Indikatordiagramm, die Grössen von J und W werden durch die Beziehungen:

$$(58)\qquad J = VL,\quad W = VE\sin(l,e)$$

bestimmt, wobei

$$(59)\qquad E = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

die Entfernung des Ruhepunktes der Masse M von dem Referenzpunkt in der Erdoberfläche und (l,e) den Winkel zwischen der Verbindungslinie und der Bahnlinie von M darstellt.

Besonders einfach gestaltet sich die Indikatorgleichung, wenn man die Richtungen der horizontalen Projektionen von V und W zu Hülfe nimmt. Bezeichnen wir sie mit k und k' und die zu k gehörige Komponente der Parallelverschiebung mit $\varkappa$,

www.libtool.com.cn

so lässt sich nämlich (56) unter Rücksicht auf die für eine beliebige horizontale Richtung s geltenden Beziehungen:

$$(60)\qquad V^{(s)} = V^{(h)}\cos(s,k),\ J^{(s)} = J^{(h)}\cos(s,k),\ W^{(i_s)} = W^{(i_{s'})}\cos(s,k')$$

und

$$(61)\qquad \sigma = \xi\cos(s,x)+\eta\cos(s,y),\ i_s = i_x\cos(s,x)+i_y\cos(s,y),$$

wobei σ die zu s gehörige Komponente der Parallelverschiebung angiebt, leicht überführen in die Form:

$$(62)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2a}{dt^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(h)}\left(\dfrac{d^2\varkappa}{dt^2} - gi_h - \Delta g_h\right) - V^{(v)}\left(\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} - \Delta g_z\right) \\ \qquad\qquad - W^{(i_{s'})}\dfrac{d^2 i_{s'}}{dt^2} - W^{(\vartheta_s)}\dfrac{d^2\vartheta_s}{dt^2} \\ \qquad = -\dfrac{g}{L}a - \dfrac{J^{(h)}}{L}\left(\dfrac{d^2\varkappa}{dt^2} - gi_h - \Delta g_h\right) - \dfrac{J^{(v)}}{L}\left(\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} - \Delta g_z\right) \\ \qquad\qquad - W^{(i_{s'})}\dfrac{d^2 i_{s'}}{dt^2} - W^{(\vartheta_s)}\dfrac{d^2\vartheta_s}{dt^2}. \end{cases}$$

Hierin können wie in den früheren Fällen die Glieder II. Klasse mit den Faktoren $W^{(i_{s'})}$, $W^{(\vartheta_s)}$ für die Praxis beiseite gelassen werden.

Die früher für Horizontal- und Vertikal-Seismographen aufgestellten Formeln ergeben sich in so einfacher Weise aus den jetzt gefundenen, dass eine nähere Darlegung unnöthig ist.

28. *Seismographen mit punktförmiger Masse für mehrere Komponenten.* Bisher haben wir angenommen, dass die pendelnde Masse nur in einer *Linie* schwingen könne, dass ihr also nur ein Grad der Freiheit gegeben sei. Wenn sie in einer Fläche oder nach allen Seiten schwingen kann, also 2 oder 3 Grade der Freiheit hat, gestaltet sich die Theorie nur wenig komplicirter. Wir wollen sogleich den weitest gehenden Fall von 3 Graden der Freiheit untersuchen, da sich dann der speciellere mit nur 2 Graden ohne Weiteres miterledigt.

Zur Bestimmung der Lage der Masse M sind jetzt drei Koordinaten einzuführen. ξ', η', ζ' seien die Verrückungen relativ zum Gestell, ξ^*, η^*, ζ^* diejenigen relativ zur Erde im Ganzen, die wir als absolute Verrückungen ansehen. Bedeuten X, Y, Z wiederum die Koordinaten der Ruhelage von M relativ zum Referenzpunkt, so dürfen nach Artikel (16) die Beziehungen

$$(63)\quad \xi^* = \xi'+\xi+Zi_x - Y\vartheta_z,\ \eta^* = \eta'+\eta+Zi_y + X\vartheta_z,\ \zeta^* = \zeta'+\zeta - Xi_x - Yi_y$$

angenommen werden.

Wir werden wieder eine solche Konstruktion voraussetzen, dass jede Ablenkung ξ', η', ζ' zurückführende Kräfte zur Folge hat. Sind Ξ', H', Z' die Kraftkomponenten $\parallel x, y, z$, so ist zu setzen:

www.libtool.com.cn

$$\begin{aligned} \Xi' &= -f_{11}\xi' - f_{12}\eta' - f_{13}\zeta', \\ H' &= -f_{21}\xi' - f_{22}\eta' - f_{23}\zeta', \\ Z' &= -f_{31}\xi' - f_{32}\eta' - f_{33}\zeta', \end{aligned} \tag{64}$$

wobei f_{11}, f_{12}, ... gewisse Konstanten bedeuten, die davon abhängen, wie die Pendelmasse mit dem Gestell des Apparates verbunden ist. Da wir mit Rücksicht auf die hier in Betracht kommenden Mechanismen annehmen dürfen, dass keine Energie auf das Gestell übertragen wird, wenn der Pendelkörper nach beliebigen Bewegungen wieder in die Anfangslage zurückgeführt wird, ist in bekannter Weise zu folgern, dass es drei ausgezeichnete aufeinander senkrecht stehende Richtungen l, m, n giebt, für welche die erwarteten Kräfte nach der Gleichgewichtslage hingerichtet sind. Bezeichnen wir die relativen Verrückungen von M in diesen Richtungen mit λ', μ', ν' und die zugehörigen Kräfte mit Λ', M', N', so tritt an Stelle des Gleichungssystemes (64) einfacher:

$$\Lambda' = -f_1\lambda', \; M' = -f_2\mu', \; N' = -f_3\nu'. \tag{65}$$

Aehnlich wie in Artikel 27 bei der Ableitung von (54) fassen wir bei Neigungen und Drehungen des Gestelles das jeweilige Kraftsystem auf als Superposition der Kräfte Λ', M', N' parallel den ursprünglichen Richtungen l, m, n und der von dem veränderten Angriff der Schwere herrührenden Kräften Mgi_x, Mgi_y parallel x, y. Hierzu treten bei Schwerestörungen noch $M\Delta g_x$, $M\Delta g_y$, $M\Delta g_z$, sodass wir für die Richtungen l, m, n drei Bewegungsgleichungen erhalten, von denen die erste lautet:

$$M\frac{d^2\lambda^*}{dt^2} = -f_1\lambda' + (gi + \Delta g_x)\cos(l,x) + (gi_y + \Delta g_y)\cos(l,y) + \Delta g_z\cos(l,z). \tag{66}$$

Hierin bedeutet λ^* die als absolut geltende Verrückung parallel l. Wir sind nun genau zur Gleichung (54) zurückgeführt und werden wie dort zur weiteren Umformung die Beziehungen (52) und (53) zu verwerthen haben. So ergiebt sich denn, *dass die Bewegungen der pendelnden Masse parallel den drei ausgezeichneten Richtungen (l, m, n) als unabhängig von einander betrachtet werden können und gerade so erfolgen, wie bei nur einem Freiheitsgrad.* —

Sollen die drei Freiheitsgrade der Bewegung von M vollständig ausgenutzt werden, so sind 3 Indikatoren anzubringen, denn so viele sind nöthig, um die Bewegungen vollständig zu verfolgen. a, b, c seien die Ausschläge, von denen wir im Einklang mit den bisher benutzten Vorstellungen annehmen, dass sie den Ausweichungen von M parallel gewissen drei Richtungen proportional sind, dann ist zu schreiben:

$$a = V_{aa}\lambda' + V_{ab}\mu' + V_{ac}\nu', \; b = V_{ba}\lambda' + V_{bb}\mu' + V_{bc}\nu', \; c = V_{ca}\lambda' + V_{cb}\mu' + V_{cc}\nu', \tag{67}$$

wobei die V_{aa}, V_{ab} . . . Konstanten sind. Bedenkt man, dass jedes der Glieder $V_{aa}\lambda'$, $V_{ab}\mu'$, . . . in Verbindung mit den für λ', μ', ν' geltenden Bewegungs-

www.libtool.com.cn

gleichungen allein genommen für den betreffenden Indikator Formeln nach Art von (56) ergeben würde, so ist ersichtlich, *dass die Aufzeichnung jedes der drei Indikatoren so erfolgt, als stelle sein Ausschlag die Summe der Ausschläge dreier von einander unabhängiger einfacher Seismographen dar.*

Die so sich ergebende Komplikation wäre für die Praxis höchst unbequem. Da ist es wichtig zu bemerken, dass sie fortfällt, wenn die Indikatoren den ausgezeichneten Richtungen λ, μ, ν zugeordnet werden; dann geht nämlich das Formelsystem (67) über in

$$a = V_a\lambda', \; b = V_b\mu', \; c = V_c\nu', \tag{68}$$

und es folgen bei Verwendung der Bewegungsgleichungen für λ', μ', ν' für die Indikatorausschläge a, b, c genau die zu Seismographen eines Freiheitsgrades gehörigen Formeln des vorigen Artikels. *Wenn man also den Seismographen dreier Freiheitsgrade mit 3 Indikatoren versieht, welche die Ausweichungen der pendelnden Masse parallel den ausgezeichneten Richtungen des Kraftsystemes aufzeichnen, so erscheint er einfach als Vereinigung dreier Seismographen je eines Freiheitsgrades für diese 3 Richtungen.*

Bisher wurde angenommen, dass sich für das Kraftsystem 3 bestimmte ausgezeichnete Richtungen angeben lassen, und ich erwähnte den dann geltenden Satz, dass diese aufeinander senkrecht stehen. In besonderen Fällen kann es vorkommen, dass sich nur eine ausgezeichnete Richtung oder keine heraushebt. Das erstere tritt ein, wenn die zurücktreibende Kraft für alle Richtungen $\perp$ zu der einen ausgezeichneten gleich gross ist, das letztere, wenn die zurücktreibende Kraft für alle Richtungen ohne Unterschied gleich gross ist. Für den Anschluss der Indikatoren unter der Vorschrift, dass die Aufzeichnungen eines jeden denen für einen Seismographen eines Freiheitsgrades gleichkommen sollen, folgt beidemal eine Verminderung der Beschränkung: Bei nur einer ausgezeichneten Richtung dürfen die beiden anderen Indikatorrichtungen in der Normalebene willkürlich ausgewählt werden, bei völliger Symmetrie ist die Auswahl der Indikatorrichtungen ganz dem Belieben anheim gestellt. —

Bei einem Seismographen mit 2 Freiheitsgraden haben wir eine *Schwingungsfläche* anzunehmen, die in einer für die Praxis wohl immer hinreichenden Annäherung als Ebene gelten darf. Das wirkende Kraftsystem ergiebt in dieser 2 ausgezeichnete, oder durchweg gleichwerthige Richtungen. Zur vollen Ausnutzung der beiden Freiheitsgrade sind 2 Indikatoren anzubringen, und zwar parallel den ausgezeichneten Richtungen des Kraftsystemes, sofern solche vorhanden sind, andernfalls in beliebiger Orientirung. *Der Seismograph zweier Freiheitsgrade verhält sich dann gerade so wie die Vereinigung zweier Seismographen je eines Freiheitsgrades.*

www.libtool.com.cn

§ 4. Reibungslose Seismographen mit räumlich vertheilter Masse.

29. *Das physikalische Pendel als Seismograph.* Bevor wir uns zu den Seismographen beliebiger Massenanordnung wenden, wird es sich empfehlen, die Benutzung des sogenannten *„physikalischen Pendels“*, also des Pendels mit räumlich vertheilter Masse als Seismographen zu besprechen, weil so in einfacher Weise auf die neuen Gesichtspunkte hingewiesen werden kann, welche bei der Aufgabe unserer bisherigen Annahme der punktförmigen Masse zur Geltung kommen, und wir damit einen Fall behandeln, dessen praktische Bedeutung unter allen Umständen eine besondere Besprechung verlangt.

Wir setzen eine horizontale Axe, also eine vertikale Schwingungsebene voraus und nehmen an, dass allein die Schwerkraft einwirkt, der Schwerpunkt also bei Ruhe vertikal unter der Axe liegt. Ein solcher Apparat wird zum Beispiel durch ein gewöhnliches Pendel oder durch den Balken einer Waage bei abgenommenen Schaalengehängen gegeben.

Die Aufstellung sei so, dass der Schwerpunkt bei Ruhe in der Vertikalen durch den Referenzpunkt liegt, und die x-Axe der Schwingungsebene parallel läuft. Trotzdem könnten bei Unsymmetrie des Baues die Neigungen i_y senkrecht zur Schwingungsebene und die Drehungen ϑ_z um die Vertikale Einfluss gewinnen; doch sollen diese Fälle als interesselos ausgeschlossen werden. *Unser Seismograph reagirt dann allein auf die Parallelverschiebungen ξ, die Neigungen i_x und die Schwereänderungen Δg_z.*

Wir untersuchen zunächst die *Eigenschwingungen* bei Abwesenheit von Störungen. Ist M die Masse des Pendels, S der Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsaxe, so *ergiebt die Schwerkraft bei der Ablenkung a des Indikators ein Drehmoment $Mg\,a\,S/I$*, wobei I die Zeigerlänge bedeutet. Dasselbe Drehmoment würde durch eine am Indikator wirkende zurücktreibende Kraft $Q^{(a)}$ verursacht werden, wenn $Q^{(a)}I = -Mg\,a\,S/I$ wäre. Hieraus folgt, dass die Einwirkung der Schwerkraft bei den Eigenschwingungen ganz ersetzt werden könnte durch eine am Indikator wirkende Kraft

$$Q^{(a)} = -fa, \tag{69}$$

wobei

$$f = Mg\frac{S}{I^2} \tag{70}$$

eine gewisse Konstante bedeutet.

Zur Ableitung der Bewegungsgleichung benutzen wir das *d'Alembert'sche Prinzip, nach welchem die Beschleunigungen jederzeit so erfolgen, dass das System der bewegenden Kräfte durch das System der Trägheitskräfte gerade aufgehoben wird.* Unter *„Trägheitskraft“* des Massentheilchen $d\mu$ ist dabei eine Kraft zu verstehen, welche die entgegengesetzte Richtung hat wie die Beschleunigung, und deren Grösse gleich $d\mu \times$ der Beschleunigung ist. Bedeuten also ξ, η, ζ die Verschiebungen parallel x, y, z, so sind die zugehörigen Komponenten der Träg-

www.libtool.com.cn

heitskraft

$$-d\mu\frac{d^2\xi}{dt^2},\ -d\mu\frac{d^2\eta}{dt^2},\ -d\mu\frac{d^2\zeta}{dt^2}. \tag{71}$$

Für die Anwendung der Trägheitskräfte ist wichtig, dass sie sich gerade so superponiren wie die Verrückungen. *Wenn also die wirklich stattfindende Bewegung eines mechanischen Systemes irgend wie als Superposition von Einzelbewegungen aufgefasst wird* — zum Beispiel die Bewegung eines starren Körpers als Superposition von Parallelverschiebungen und Drehungen —, *so stellen sich die wirklichen Trägheitskräfte dar als Superposition der Trägheitskräfte, welche den Einzelbewegungeu zugehören.* —

Bei den Eigenschwingungen des Pendels ergiebt sich für ein Theilchen $d\mu$ im Abstande r von der Axe die Beschleunigung $(r/I)\ d^2a/dt^2$, also die Trägheitskraft

$$-d\mu\frac{r}{I}\frac{d^2a}{dt^2}$$

und es folgt als Drehmoment in der Richtung, in welcher wir ι_z positiv rechnen:

$$d\mu\frac{r}{I}r\frac{d^2a}{dt^2}.$$

Zum ganzen System der Trägheitskräfte gehört hiernach das Drehmoment

$$\frac{\Theta}{I}\frac{d^2a}{dt^2}, \tag{72}$$

wobei

$$\Theta=\int d\mu r^2 \tag{73}$$

das Trägheitsmoment des Pendels darstellt. Wir wollen bemerken, dass das Drehmoment gerade so gross ist, als bewegte sich am Indikator die Masse

$$m=\frac{\Theta}{I^2}=\int d\mu\left(\frac{r}{I}\right)^2. \tag{74}$$

Indem wir gemäss dem zu verwerthenden Grundsatz der Mechanik die Summe der Drehmomente für die bewegenden Kräfte und die Trägheitskräfte gleich 0 setzen, erhalten wir als *Bewegungsgleichung* bei den Eigenschwingungen:

$$\frac{d^2a}{dt^2}=-\frac{f}{m}a=-\frac{g}{\frac{\Theta}{MS}}a. \tag{75}$$

Zur Bestimmung der *Eigenperiode* T und der *äquivalenten Pendellänge* L ergeben sich hieraus die Beziehungen:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=\frac{g}{L}=g\frac{MS}{\Theta};\ L=\frac{\Theta}{MS}. - \tag{76}$$

www.libtool.com.cn

Bei Neigungen des Gestelles giebt $i_x - a/I$ die Neigung des Pendels an. Veränderungen der Schwerkraft veranlassen das Drehmoment $-MS\Delta g_x$. So erhalten wir denn als Drehmoment der Schwere in Bezug auf die Pendelaxe während der Störungen im Ganzen:

$$MS\left(\frac{g}{I}a - gi_x - \Delta g_x\right). \tag{77}$$

Dies ist zugleich das *Drehmoment der gesammten bewegenden Kräfte* in Bezug auf die Pendelaxe *während der Störungen*, denn ausser der Schwere wirkt nur das Gestell durch Kräfte ein, die in der Pendelaxe selbst angreifen, also ein verschwindendes Drehmoment ergeben.

Zur Bestimmung des entsprechenden Drehmomentes der Trägheitskräfte während der Störungen denken wir uns die jeweilige Verrückung des Pendels als Superposition der Neigung $i_x - a/I$ um die Pendelaxe und der Parallelverschiebung $\xi + Z_\Delta i_x$, wobei Z_Δ die Höhe der Drehungsaxe über dem Referenzniveau bezeichnet. Nach den bei der Ableitung der Bewegungsgleichung für die Eigenschwingungen angestellten Ueberlegungen verursachen die Aenderungen der Neigung das Drehmoment

$$-Im\frac{d^2}{dt^2}(Ii_x - a) = -\Theta\left(\frac{d^2 i_x}{dt^2} - \frac{1}{I}\frac{d^2 a}{dt^2}\right). \tag{78}$$

Die Trägheitskräfte der Parallelbewegungen sind Parallelkräfte proportional mit der Masse der Elemente, haben also wie die Schwerkraft eine Resultante, welche der im Schwerpunkt vereinigten Gesammtmasse entspricht. Zu den Parallelverschiebungen $\xi + Z_\Delta i_x$ gehört hiernach in Bezug auf die Pendelaxe das Drehmoment

$$MS\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} + Z_\Delta\frac{d^2 i_x}{dt^2}\right). \tag{79}$$

Das d'Alembert'sche Prinzip verlangt, dass die Summe der Drehmomente (77), (78), (79) verschwindet, ergiebt also als *Indikatorgleichung*

$$MS\left(\frac{g}{I}a - gi_s - \Delta g_s\right) - \Theta\left(\frac{d^2 i_s}{dt^2} - \frac{1}{I}\frac{d^2 a}{dt^2}\right) + MS\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} + Z_\Delta\frac{d^2 i_s}{dt^2}\right) = 0, \tag{80}$$

oder

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d^2 a}{dt^2} &= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(\omega)}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - gi_s - \Delta g_s\right) - W^{(i_\omega)}\frac{d^2 i_s}{dt^2}\\ &= -\frac{g}{L}a - \frac{J^{(\omega)}}{L}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - gi_s - \Delta g_s\right) - W^{(i_\omega)}\frac{d^2 i_s}{dt^2},\end{aligned}\right. \tag{81}$$

wenn (76) benutzt wird, und man ausserdem setzt:

$$J^{(\omega)} = I,\ V^{(\omega)} = \frac{J^{(\omega)}}{L} = \frac{IMS}{\Theta},\ W^{(i_\omega)} = V^{(\omega)}(Z_\Delta - L). \tag{82}$$

www.libtool.com.cn

Hierin bedeutet $Z_4 - L$ die Höhe des Körpers eines mathematischen Pendels von der Länge L und mit der Axe A. *Das physikalische Pendel verhält sich also als Seismograph gerade so wie ein mathematisches Pendel mit der gleichen Schwingungsdauer und der gleichen Drehungsaxe.*

Es ist nützlich zu beachten, dass nach der eben gewonnenen Erkenntniss bei sehr schnellen Querverschiebungen der Axe eines Pendels nicht etwa der Schwerpunkt, sondern ein Punkt stationär bleibt, der um die Länge eines mathematischen Pendels gleicher Schwingungsdauer, nämlich um $L = \Theta/MS$, von der Axe entfernt ist. Man nennt ihn den *„Schwingungspunkt"*. Es ist klar, dass seine so bestimmte Bedeutung bestehen bleiben muss, welche Orientierung auch die Axe im Raume haben mag, und welche Kräfte das Pendel beeinflussen mögen. L bedeutet dann die Länge eines einfachen Pendels, welches in dem besonderen Falle alleiniger Einwirkung der Schwere und horizontaler Lage der Axe gleiche Schwingungsdauer hat.

30. *Physikalisches Pendel unter Mitwirkung elastischer Kräfte; Klinograph von Schlüter.* Werden bei dem im vorigen Artikel behandelten physikalischen Pendel noch elastische Kräfte hinzugefügt, jedoch so, dass der Schwerpunkt im Falle der Ruhe in der Vertikalebene durch die Axe bleibt, so ändert sich die Bewegungsgleichung (80) nur insofern, als ein Drehmoment

$$f' Ia \tag{83}$$

hinzukommt, wobei f' eine gewisse Konstante bedeutet. Es ergiebt sich dann als Indikatorgleichung wiederum (81), jedoch mit theilweise veränderten Konstanten. Es ist nämlich:

$$\left\{\begin{array}{c} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{L} = \frac{f'}{m} \mp \frac{g}{L_0}, \\ V^{(a)} = \mp\frac{I}{L_0},\ J^{(a)} = V^{(a)}L = \mp I\frac{L}{L_0},\ W^{(a)} = V^{(a)}Z = \mp I\frac{Z}{L_0}; \end{array}\right. \tag{84}$$

$$m = \frac{\Theta}{I^2},\ L = \frac{\Theta}{MS},\ Z = Z_4 \pm L_0. \tag{85}$$

I bedeutet wie vorhin den Abstand der Indikatorspitze von der Drehaxe des Pendels, oder besser gesagt, den *äquivalenten Abstand von der Drehaxe*, denn es ist für die entwickelte Theorie offenbar gleichgültig, ob der Indikator direkt oder indirekt durch irgend einen Mechanismus mit dem Pendel verbunden ist; sie braucht auch nicht nothwendig materiell zu sein, sondern kann ebenso gut den Convergenzpunkt eines photographirenden Lichtbündels darstellen. — W. Schlüter nennt I bei der Beschreibung seines Klinographen die *„mechanische Zeigerlänge"*.

Θ ist das *Trägheitsmoment* des Pendels, M seine *Masse*, S der *Abstand des Schwerpunktes*, L_0 der *Abstand des Schwingungspunktes* von der Axe, Z_4 die Höhe

www.libtool.com.cn

der Axe, Z die *Höhe des Schwingungspunktes* über dem Referenzniveau der Erdoberfläche. Wegen der Mithülfe der elastischen Kräfte, auf welche sich die Konstante f' bezieht, ist eine stabile Gleichgewichtslage und darum eine brauchbare Konstruktion nun auch möglich, wenn Schwerpunkt und Schwingungspunkt über der Axe liegen; für diesen Fall gelten die *oberen*, für den entgegengesetzten die *unteren der doppelten Vorzeichen.*

Nach den Formeln (84), (85) verhält sich unser physischer Seismograph ganz so wie ein Pendelseismograph mit punktförmiger Masse, bei dem die Pendellänge $= L$, die Indikatorlänge $= J^{(e)}$ und der Pendelkörper sich in der Höhe $Z = Z_A \pm L_0$, also in der Höhe des Schwingungspunktes befindet.

Der Umstand, dass bei angemessener Konstruktion des physischen Pendels der Schwerpunkt leicht sehr nahe der Axe gelegt und damit Z sehr gross gemacht werden kann, ist von besonderem Interesse, denn wir haben in Artikel 23 erkannt, *dass bei dem wichtigen Problem der Trennung seismischer Horizontalverrückungen und Neigungen gerade die Höhe Z entscheidend ist. Während nun das einfache Pendel aus praktischen Gründen eine hinreichende Variation der Höhe nicht gestattet, lässt sich diese mit dem physischen Pendel, wo es sich nur um die Verlegung des Schwingungspunktes handelt, in bequemer Weise erreichen.*

Bei der Konstruktion seines *Klinographen* hat sich W. Schlüter diese Verhältnisse zu Nutze gemacht. Der pendelnde Körper erhielt die Gestalt eines Waagebalkens von 150 cm Länge mit festen Gewichten an den Enden. Die uns interessirenden Daten waren:

$$\Theta = 7\,kg\,m^2,\ M = 15\,kg,\ S = 0{,}04\,mm,\ Z_A = 0,$$

$$I = 700\,m,\ L_0 = \frac{\Theta}{MS} = 12000\,m,\ Z = Z_A - L_0 = -12000\,m,$$

$$T = 20\,\text{sec},\ L = 100\,m,\ V^{(e)} = -\frac{1}{20},\ J^{(e)} = 6\,m,\ W^{(i_e)} = 700\,m.$$

Der Klinograph entsprach hiernach bei seinen Registrirungen einem einfachen Pendel von 144 m Länge, das von einem starren Gerüst nicht weniger als 15000 m unterhalb des Referenzniveaus getragen wird, und dessen Ausschläge 20-mal verkleinert aufgezeichnet werden. Die ungeheure äquivalente Gerüstgrösse macht es einleuchtend, dass nicht daran zu denken ist, mit einfachen Pendeln Klinographen entsprechender Leistungsfähigkeit zu konstruiren.

Die Aufzeichnungen des Klinographen wurden verglichen mit denen eines Horizontalpendels folgender Daten:

$$T = 12\,\text{sec},\ L = 36\,m,\ V^{(e)} = 25,\ J^{(e)} = 900\,m,\ W^{(i_e)} = 0,\ Z = 0.$$

Man erkennt die weite Ueberlegenheit des Horizontalpendels in dem Gliede I. Klasse und die des Klinographen in dem Gliede II. Klasse. Da der Klinograph auch von den stärksten beobachteten Erdbeben, bei denen die scheinbaren Neigungen in den langen Wellen $1^1/_2$ Sekunden erreichten, unbeeinflusst blieb,

www.libtool.com.cn

konnte, geschlossen werden, dass nicht wirkliche Neigungen, sondern Horizontalverschiebungen im Wesentlichen die Aufzeichnung des Horizontalpendels und also auch die der übrigen ähnlichen Apparate veranlassen, während die wirklichen Neigungen sehr klein bleiben (in den beobachteten Fällen unter 1/40 Sekunde).

31. *Seismograph beliebiger Konstruktion für eine Komponente.* Wir wollen nun sogleich zu dem allgemeinsten Fall einer beliebigen Konstruktion übergehen, wobei für das Gehänge in irgend einer Weise Axen, Hebel, Federn und dergleichen verwendet sein können. Jedoch nehmen wir zur Vereinfachung der Darstellung vorläufig nur *einen Grad der Freiheit* an; relativ zum Gestell sollen sich also die Punkte des Gehänges nur in *Kurven* bewegen können, und es soll die Lage aller Punkte bestimmt sein, wenn die Lage eines einzigen vorgeschrieben ist. *Die Angabe des Ausschlags a eines Indikators und seiner Aenderungen genügt hiernach vollständig, um die jeweilige relative Lage und die relativen Bewegungen festzustellen.*

Die angenommene Verknüpfung der Bewegungen hat zur Folge, dass eine bewegende Kraft, die an irgend einer Stelle des Gehänges wirkt, durch eine Kraft an irgend einer anderen Stelle ersetzt werden kann. Nach dem mechanischen *Prinzip der virtuellen Verrückungen* müssen sich dabei die Intensitäten der beiden Kräfte umgekehrt verhalten wie die entsprechenden Verrückungen. Ist also zum Beispiel K die zunächst gegebene Kraft, Q ihr Aequivalent am Indikator, so muss

$$Q = K\frac{\alpha}{a} \tag{86}$$

sein, wenn α den zum Indikatorausschlag a gehörigen Ausschlag des Angriffspunktes von K parallel ihrer Wirkungslinie bedeutet. *Von diesem Satze werden wir im Folgenden ausgiebigen Gebrauch machen, um das gesammte Kraftsystem in einer für die Anwendung bequemen Weise auf den Indikator zu beziehen.* Zunächst ist dabei freilich vorauszusetzen, dass der Indikator von einem starren Arm geführt werde, dass es sich also um mechanische Registrirung handele. Da jedoch die ideelle Kraft Q einfach als eine rechnerische Hülfsgrösse für die Entwicklung der Theorie aufgefasst werden kann, steht garnichts im Wege, sie selbst dann beizubehalten, wenn der Indikator durch einen photographirenden Lichtpunkt gebildet wird. Will man das aus besonderen Gründen nicht thun, *so ist an Stelle des Indikators irgend ein passend scheinender Punkt des Gehänges auszuwählen und unter a im Folgenden der Ausschlag dieses Punktes zu verstehen.* —

Bei der Berechnung der Trägheitskräfte (Artikel 29) sind die absoluten Bewegungen des Gehänges zu verfolgen. Doch darf dabei wie bisher von den Bewegungen der Erde als Weltkörper abgesehen werden, das heisst, *es genügt, als „absolute" Bewegungen diejenigen relativ zur Erde im Ganzen zu bezeichnen.*

ξ^*, η^*, ζ^* seien die *absoluten Verschiebungen* eines Punktes des Gehänges, ξ', η', ζ' die entsprechenden *Verschiebungen relativ zum Gestell.* Wir nehmen stets

www.libtool.com.cn

nur so kleine seismische Störungen an, dass gemäss Artikel 16:

$$(87)\quad \xi^* = \xi' + \xi + \varepsilon i_x - y\vartheta_z,\ \eta^* = \eta' + \eta + \varepsilon i_y + x\vartheta_z,\ \zeta^* = \zeta' + \zeta - xi_x - yi_y$$

gesetzt werden kann, wobei x, y, ε die Koordinaten der Ruhelage relativ zum Referenzpunkt der Erdoberfläche bedeuten.

32. *Seismische Ruhe.* Zunächst soll wie bei der Behandlung des physikalischen Pendels der *Fall seismischer Ruhe* untersucht werden. Bei einem Ausschlag a verursachen die bewegenden Kräfte — herrührend zum Beispiel von der Schwere oder von Federn irgend welcher Art — eine zurücktreibende Komponente. Es entspricht unserer Annahme über die Kleinheit der Verschiebungen, diese proportinal mit a zu setzen.

$$(88)\quad Q^{(a)} = -fa$$

stelle demgemäss die *Resultante der auf das Gehänge wirkenden bewegenden Kräfte* in Bezug auf den Indikator dar, wobei f eine gewisse Konstante ist.

Um die Resultante der Trägheitskräfte zu finden, bedenken wir, dass bei kleinen Bewegungen die Verrückung eines jeden Theilchens proportional mit a gesetzt werden darf;

$$(89)\quad \left[\frac{\xi'}{a}\right],\ \left[\frac{\eta'}{a}\right],\ \left[\frac{\zeta'}{a}\right]$$

bedeuten hiernach für jedes Theilchen gewisse Konstanten, welche uns mittels

$$(90)\quad \left[\frac{\xi'}{a}\right]\frac{da}{dt},\ \left[\frac{\eta'}{a}\right]\frac{da}{dt},\ \left[\frac{\zeta'}{a}\right]\frac{da}{dt}$$

die Komponenten der Geschwindigkeit, mittels

$$(91)\quad \left[\frac{\xi'}{a}\right]\frac{d^2a}{dt^2},\ \left[\frac{\eta'}{a}\right]\frac{d^2a}{dt^2},\ \left[\frac{\zeta'}{a}\right]\frac{d^2a}{dt^2}$$

die Komponenten der Beschleunigung und mittels

$$(92)\quad -d\mu\left[\frac{\xi'}{a}\right]\frac{d^2a}{dt^2},\ -d\mu\left[\frac{\eta'}{a}\right]\frac{d^2a}{dt^2},\ -d\mu\left[\frac{\zeta'}{a}\right]\frac{d^2a}{dt^2}$$

die Komponenten der Trägheitskraft ergeben, wenn $d\mu$ die Masse des Theilchens bezeichnet. So folgt denn nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen für den Indikator die äquivalente Kraft

$$(93)\quad -d\mu\left[\frac{\xi'}{a}\right]^2\frac{d^2a}{dt^2} - d\mu\left[\frac{\eta'}{a}\right]^2\frac{d^2a}{dt^2} - d\mu\left[\frac{\zeta'}{a}\right]^2\frac{d^2a}{dt^2},$$

und wir erhalten als *Resultante der Trägheitskräfte bei seismischer Ruhe*:

$$(94)\quad Q^{[a]} = -m\frac{d^2a}{dt^2},$$

www.libtool.com.cn

wenn

$$m = \int d\mu \left\{ \left[\frac{\xi'}{a}\right]^2 + \left[\frac{\eta'}{a}\right]^2 + \left[\frac{\zeta'}{a}\right]^2 \right\} = \int d\mu \left[\frac{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}{a^2}\right] \tag{95}$$

gesetzt wird. $Q^{[g]}$ würde dieselbe Grösse erhalten, wenn sich eine Masse m am Indikator selbst bewegte; wir wollen demgemäss m die *resultirende Masse* des Gehänges nennen. Die Formel (95) lehrt unmittelbar folgenden für die Berechnung von m wichtigen Satz: *Der Antheil eines Elementes des Gehänges zur resultirenden Masse verhält sich zur eigenen Masse wie das Quadrat der relativen Verrückung zum Quadrat des zugehörigen Indikatorausschlags*:

$$dm : d\mu = \xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2 : a^2. \tag{96}$$

Das D'Alembert'sche mechanische Prinzip, nach welchem die Trägheitskräfte jederzeit die bewegenden Kräfte aufheben müssen, verlangt bei Abwesenheit von Störungen $Q^{(\sigma)}+Q^{[\sigma]} = 0$ und ergiebt so in

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{f}{m}a \tag{97}$$

die Indikatorgleichung bei Eigenschwingungen. Schwingungsperiode T und *äquivalente Pendellänge* L werden nach (97) durch

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{L} = \frac{f}{m} \tag{98}$$

bestimmt.

33. *Ableitung der Indikatorgleichung.* Bei Neigungen des Gestelles und Aenderungen der Schwerkraft tritt zu der *Resultante der bewegenden Kräfte*:

$$Q^{(\sigma)} = -fa,$$

welche im Falle der seismischen Ruhe allein zu berücksichtigen war, noch eine Kraft, welche der veränderten Einwirkung der Schwere entspricht. Die Neigung i_x ist gleichwerthig mit dem Auftreten einer horizontalen Komponente der Schwerkraft $\parallel x$ im Betrage von gi_x. Das Theilchen $d\mu$ des beweglichen Theiles erfährt also $\parallel x$ im ganzen eine Kraft $d\mu\,(gi_x+\Delta g_x)$ und ergiebt für den Indikator die äquivalente Kraft $d\mu\,(gi_x+\Delta g_x)\,[\xi'/a]$. In gleicher Weise gehört zu y die Kraft $d\mu\,(gi_y+\Delta g_y)\,[\eta'/a]$, zu z die Kraft $d\mu\,\Delta g_z\,[\zeta'/a]$, und wir erhalten als *Resultante der bewegenden Kräfte, welche durch die Neigungen des Apparates und durch Schwerkraftänderungen erregt werden*:

$$Q^{(\sigma)}+Q^{(g)} = \left(\int d\mu \left[\frac{\xi'}{a}\right]\right)(gi_x+\Delta g_x)+\left(\int d\mu \left[\frac{\eta'}{a}\right]\right)(gi_y+\Delta g_y)+\left(\int d\mu \left[\frac{\zeta'}{a}\right]\right)\Delta g_z. \tag{99}$$

Zur Berechnung der Trägheitskräfte soll die Bewegung des Gehänges aufgefasst werden als Superposition der Bewegung relativ zum Gestell und der vom Gestell selbst ausgeführten Bewegung. Diese letztere wiederum zerlegen wir in

www.libtool.com.cn

die Parallelverschiebungen, ξ, η, ζ, die Neigungen i_x, i_y und die Drehung ϑ_z um die Vertikale. In allen Fällen wird es wiederum darauf ankommen, die Resultante der Trägheitskräfte in Bezug auf den Indikator festzustellen.

Die *Resultante der Trägheitskräfte der relativen Bewegungen* des Gehänges haben wir durch den vorigen Artikel schon in

$$Q^{[\sigma]} = -m\frac{d^2a}{dt^2} \tag{100}$$

kennen gelernt. —

Bei den Parallelbewegungen entsprechend ξ ergiebt das Theilchen $d\mu$ die Trägheitskraft $-d\mu\, d^2\xi/dt^2$ parallel x. Das Aequivalent am Indikator ist

$$-d\mu\left[\frac{\xi'}{a}\right]\frac{d^2\xi}{dt^2}.$$

So folgt denn als *Resultante der Trägheitskräfte wegen der Parallelverschiebungen*:

$$Q^{[\xi]} = -\left(\int d\mu\left[\frac{\xi'}{a}\right]\right)\frac{d^2\xi}{dt^2} - \left(\int d\mu\left[\frac{\eta'}{a}\right]\right)\frac{d^2\eta}{dt^2} - \left(\int d\mu\left[\frac{\zeta'}{a}\right]\right)\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \cdot \tag{101}$$

Als Wirkung der Neigung i_x treten die Verschiebungen

$$\xi^* = zi_x,\ \eta^* = 0,\ \zeta^* = -xi_x$$

auf. Während der Bewegung ergiebt sich also für das Theilchen $d\mu$ eine Trägheitskraft mit den Komponenten

$$-d\mu\frac{d^2\xi^*}{dt^2} = -d\mu\, z\frac{d^2i_x}{dt^2},\ -d\mu\frac{d^2\eta^*}{dt^2} = 0,\ -d\mu\frac{d^2\zeta^*}{dt^2} = d\mu\, x\frac{d^2i_x}{dt^2},$$

woraus zu schliessen ist, dass

$$Q^{[i]} = -\left(\int d\mu\, z\left[\frac{\xi'}{a}\right] - \int d\mu\, x\left[\frac{\xi'}{a}\right]\right)\frac{d^2i_x}{dt^2} - \left(\int d\mu\, z\left[\frac{\eta'}{a}\right] - \int d\mu\, y\left[\frac{\zeta'}{a}\right]\right)\frac{d^2i_y}{dt^2} \tag{102}$$

die *Resultante der durch Neigungen erregten Trägheitskräfte* darstellt.

Die Drehung ϑ_z verursacht die Verschiebungen

$$\xi^* = -y\vartheta_z,\ \eta^* = +x\vartheta_z,\ \zeta^* = 0,$$

also die Trägheitskräfte

$$-d\mu\frac{d^2\xi^*}{dt^2} = +d\mu\, y\frac{d^2\vartheta_z}{dt^2},\ -d\mu\frac{d^2\eta^*}{dt^2} = -d\mu\, x\frac{d^2\vartheta_z}{dt^2},\ -d\mu\frac{d^2\zeta^*}{dt^2} = 0,$$

und für den Indikator die *Resultante*

$$Q^{[\vartheta_z]} = -\left(\int d\mu\, x\left[\frac{\eta'}{a}\right] - \int d\mu\, y\left[\frac{\xi'}{a}\right]\right)\frac{d^2\vartheta_z}{dt^2}. \tag{103}$$

Indem wir die Resultanten aller aufgeführten Kraftsysteme addiren und

www.libtool.com.cn

die Summe = 0 setzen:

$$Q^{(g)}+Q^{(i)}+Q^{(g)}+Q^{[g]}+Q^{[s]}+Q^{[i]}+Q^{[\vartheta_s]} = 0, \tag{104}$$

erhalten wir nach dem D'Alembert'schen Prinzip die *Bewegungsgleichung des Indikators*. Ausführlich geschrieben lautet sie bei geringer Umstellung:

$$\begin{aligned}\left(\int d\mu\left[\frac{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}{a^2}\right]\right)\frac{d^2a}{dt^2} &= -fa-\left(\int d\mu\left[\frac{\xi'}{a}\right]\right)\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}-gi_x-\Delta g_x\right)\\ &\quad-\left(\int d\mu\left[\frac{\eta'}{a}\right]\right)\left(\frac{d^2\eta}{dt^2}-gi_y-\Delta g_y\right)-\left(\int d\mu\left[\frac{\zeta'}{a}\right]\right)\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\Delta g_z\right)\\ &\quad-\left(\int d\mu\, z\left[\frac{\xi'}{a}\right]-\int d\mu\, x\left[\frac{\zeta'}{a}\right]\right)\frac{d^2i_x}{dt^2}-\left(\int d\mu\, z\left[\frac{\eta'}{a}\right]-\int d\mu\, y\left[\frac{\zeta'}{a}\right]\right)\frac{d^2i_y}{dt^2}\\ &\quad-\left(\int d\mu\, x\left[\frac{\eta'}{a}\right]-\int d\mu\, y\left[\frac{\xi'}{a}\right]\right)\frac{d^2\vartheta_z}{dt^2}.\end{aligned} \tag{105}$$

34. *Umgestaltung und Diskussion der Indikatorgleichung.* Schreibt man nun:

$$\begin{aligned}&m = \int d\mu\left[\frac{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}{a^2}\right],\quad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{L} = \frac{f}{m},\\ &V^{(x)} = \frac{J^{(x)}}{L} = \frac{1}{m}\int d\mu\left[\frac{\xi'}{a}\right],\ V^{(y)} = \frac{J^{(y)}}{L} = \frac{1}{m}\int d\mu\left[\frac{\eta'}{a}\right],\ V^{(z)} = \frac{J^{(z)}}{L} = \frac{1}{m}\int d\mu\left[\frac{\zeta'}{a}\right]\\ &W^{(i_x)} = \frac{1}{m}\int d\mu\left(z\left[\frac{\xi'}{a}\right]-x\left[\frac{\zeta'}{a}\right]\right),\ W^{(i_y)} = \frac{1}{m}\int d\mu\left(z\left[\frac{\eta'}{a}\right]-y\left[\frac{\zeta'}{a}\right]\right),\\ &W^{(\vartheta_z)} = \frac{1}{m}\int d\mu\left(x\left[\frac{\eta'}{a}\right]-y\left[\frac{\xi'}{a}\right]\right),\end{aligned} \tag{106}$$

so erhält die Indikatorgleichung die Gestalt:

$$\begin{aligned}\frac{d^2a}{dt^2} &= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a-V^{(x)}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}-gi_x-\Delta g_x\right)-V^{(y)}\left(\frac{d^2\eta}{dt^2}-gi_y-\Delta g_y\right)-V^{(z)}\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\Delta g_z\right)\\ &\quad-W^{(i_x)}\frac{d^2i_x}{dt^2}-W^{(i_y)}\frac{d^2i_y}{dt^2}-W^{(\vartheta_z)}\frac{d^2\vartheta_z}{dt^2}\\ &= -\frac{g}{L}a-\frac{J^{(x)}}{L}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}-gi_x-\Delta g_x\right)-\frac{J^{(y)}}{L}\left(\frac{d^2\eta}{dt^2}-gi_y-\Delta g_y\right)-\frac{J^{(z)}}{L}\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\Delta g_z\right)\\ &\quad-W^{(i_x)}\frac{d^2i_x}{dt^2}-W^{(i_y)}\frac{d^2i_y}{dt^2}-W^{(\vartheta_z)}\frac{d^2\vartheta_z}{dt^2},\end{aligned} \tag{107}$$

welche uns in den früheren Untersuchungen specieller Fälle wohl bekannt geworden ist. Wiederum geben also $-V^{(x)}$, $-V^{(y)}$, $-V^{(z)}$ die *Vergrösserungen sehr schneller Parallelverschiebungen* an, ebenso $J^{(x)}/g$, $J^{(y)}/g$, $J^{(z)}/g$ die *Empfindlichkeiten gegen dauernde Neigungen*, $J^{(x)}/g$, $J^{(y)}/g$, $J^{(z)}/g$ die *Empfindlichkeiten gegen Schwereänderungen*, $-W^{(i_x)}$, $-W^{(i_y)}$, $-W^{(\vartheta_z)}$ die *Empfindlichkeiten gegen sehr schnelle Neigungen und Drehungen* um Axen durch den Referenzpunkt. Wiederum

www.libtool.com.cn

werden wir (nach Artikel 19) $V^{(\varepsilon)}$, $V^{(y)}$, $V^{(x)}$ die *Indikatorvergrösserungen*, $J^{(\varepsilon)}$, $J^{(y)}$, $J^{(x)}$ die *„äquivalenten Indikatorlängen"* nennen, und (nach Artikel 23) die zugehörigen Störungsglieder zur I. *Klasse*, diejenigen mit den Faktoren $W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$, $W^{(\vartheta_z)}$ zur II. *Klasse* rechnen.

Vergleichen wir die Indikatorgleichung (107) rein äusserlich mit der für einen Seismographen punktförmiger Masse in Artikel 26, gewonnenen, so könnte es scheinen, dass auch ein Seismograph beliebiger Massenvertheilung sich geradeso verhielte wie ein solcher, also einem gewissen Seismographen punktförmiger Masse genau äquivalent sei. Das trifft aber nicht zu, denn von den Vektoren V, J, W, welche mittels der Gleichungen

$$(108)\quad \begin{cases} V^{(x)} = V\cos(x,V),\ V^{(y)} = V\cos(y,V),\ V^{(\varepsilon)} = V\cos(\varepsilon,V) \\ J^{(x)} = J\cos(x,J),\ J^{(y)} = J\cos(y,J),\ J^{(\varepsilon)} = J\cos(\varepsilon,J), \\ W^{(i_x)} = W^{(\vartheta_y)} = W\cos(y,W),\ W^{(i_y)} = -W^{(\vartheta_x)} = -W\cos(x,W), \\ W^{(\vartheta_z)} = W\cos(\varepsilon,W), \end{cases}$$

die $V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $V^{(\varepsilon)}$, $J^{(x)}$, $J^{(y)}$, $J^{(\varepsilon)}$, $W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$, $W^{(i_z)}$ zusammenfassen, *steht der Vektor II. Klasse W im allgemeinen nicht mehr auf den beiden gleichgerichteten Vektoren I. Klasse V und J senkrecht*, wie es bei punktförmiger Masse der Fall sein müsste. Die sich so ergebenden Unterschiede des Verhaltens werden im folgenden Artikel zur Sprache kommen, hier wollen wir zunächst dem für die Praxis weit wichtigeren gemeinsam Gültigen nachgehen.

$V^{(\varepsilon)}$, $V^{(y)}$, $J^{(\varepsilon)}$, $J^{(y)}$, $W^{(x)}$, $W^{(y)}$ beziehen sich speciell auf Neigungen, horizontale Verrückungen und Schwereänderungen parallel den Vertikalebenen (ε, x), (ε, y). Wir werden vermuthen können, dass in derselben Weise wie bei punktförmiger Masse in den Formeln (108) für x oder y jede beliebige horizontale Richtung s genommen werden darf, dass also allgemein die Formeln

$$(109)\quad V^{(s)} = V\cos(s,V),\ J^{(s)} = J\cos(s,J),\ W^{(i_s)} = W^{(\vartheta_{s'})} = W\cos(s',W)$$

gelten, wobei s' die Richtung der zu den Neigungen i_s gehörigen Drehaxe, also eine auf s senkrecht stehende, ebenfalls horizontale Richtung bedeutet. Betrachten wir zur Prüfung die Wirkung von Parallelverschiebungen σ parallel s, von Neigungen i_s parallel der Vertikalebene (ε, s) und von Schwereänderungen Δg_s parallel s, indem wir beachten, dass σ äquivalent ist mit den Verschiebungen $\xi = \sigma\cos(s,x)$, $\eta = \sigma\cos(s,y)$, i_s mit den Neigungen $i_x = i_s\cos(s,x) = i_s\cos(s',y)$, $i_y = i_s\cos(s,y) = -i_s\cos(s',x)$, Δg_s mit den Schwereänderungen $\Delta g_x = \Delta g_s\cos(s,x)$, $\Delta g_y = \Delta g_s\cos(s,y)$, so erhalten wir mittels (107):

$$(110)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2a}{dt^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 a - (V^{(x)}\cos(s,x) + V^{(y)}\cos(s,x))\left(\dfrac{d^2\sigma}{dt^2} - gi_s - \Delta g_s\right) \\ \qquad\qquad - (W^{(i_x)}\cos(s',y) - W^{(i_y)}\cos(s',x))\dfrac{d^2i_s}{dt^2}. \end{cases}$$

www.libtool.com.cn

Nun ist in der That, da s auf z senkrecht steht:

$$(111)\quad \begin{cases} V^{(x)}\cos(s,x)+V^{(y)}\cos(s,y) = V\cos(s,V) = \dfrac{J}{L}\cos(s,J) \\ W^{(i_x)}\cos(s'\,y) - W^{(i_y)}\cos(s',x) = W\cos(s',W) \end{cases}$$

und damit die Berechtigung der Formeln (109) erwiesen. *Die eigentliche Bedeutung hiervon liegt in der Erkenntniss dass die Vektoren V, J, W nicht durch die specielle Wahl der Koordinatenrichtungen x, y beeinflusst werden, sondern unabhängig von diesen relativ zum Apparat festbestimmte Richtungen haben.* Die gemeinsame Richtung von V und J entspricht der Schwingungsrichtung bei punktförmiger Masse und kann darum zweckmässig die *„äquivalente Schwingungsrichtung"* genannt werden. —

Im Ganzen zeigen diese Ueberlegungen, *dass die Wirkungsweise eines Seismographen mit einem Freiheitsgrade durch folgende Grössen charakterisirt werden kann:*

1) Die *Schwingungsdauer* T, bezüglich die *äquivalente Pendellänge* L, verbunden durch die Gleichung

$$(112)\qquad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{L};$$

2) zwei parallele Vektoren I. Klasse, nämlich den *Vektor der Indikatorvergrösserung* V bezüglich den *Indikatorvektor* J, verbunden durch die Gleichung

$$(113)\qquad V \simeq \frac{J}{L},$$

ihre gemeinsame Richtung nennen wir *äquivalente Schwingungsrichtung*;

3) den *Indikatorvektor II. Klasse* W.

Die Vektoren V, J, W bestimmen $V^{(x)}$, $V^{(s)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$, $J^{(x)}$, $J^{(s)}$, $J^{(y)}$, $J^{(z)}$, $W^{(i_x)}$, $W^{(i_s)}$, $W^{(i_y)}$, $W^{(\vartheta_z)}$ mittels der Gleichung (109), (108). —

Wie bei punktförmiger Masse kommen wir zu einer erheblichen Vereinfachung der Indikatorgleichung, wenn wir uns speciell auf diejenigen horizontalen Richtungen k und k' beziehen, welche der Projektion von V, J und W entsprechen. Unter Benutzung der Relation

$$V^{(x)}\frac{d^2\xi}{dt^2} + V^{(y)}\frac{d^2\eta}{dt^2} = V^{(h)}\frac{d^2}{dt^2}(\xi\cos(k,x)+\eta\cos(k,y)) = V^{(h)}\frac{d^2\varkappa}{dt^2}$$

und einiger ähnlicher ergiebt sich nämlich auch hier:

$$(114)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2a}{dt^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(h)}\left(\dfrac{d^2\varkappa}{dt^2} - gi_k - \Delta g_k\right) - V^{(z)}\left(\dfrac{d^2\xi}{dt^2} - \Delta g_z\right) - W^{(i_{k'})}\dfrac{d^2i_{k'}}{dt^2} - W^{(\vartheta_z)}\dfrac{d^2\vartheta_z}{dt^2} \\ \qquad = -\dfrac{g}{L}a - \dfrac{J^{(h)}}{L}\left(\dfrac{d^2\varkappa}{dt^2} - gi_k - \Delta g_k\right) - \dfrac{J^{(z)}}{L}\left(\dfrac{d^2\xi}{dt^2} - \Delta g_z\right) - W^{(i_{k'})}\dfrac{d^2i_{k'}}{dt^2} - W^{(\vartheta_z)}\dfrac{d^2\vartheta_z}{dt^2}. \end{cases}$$

www.libtool.com.cn

Wiederum können für die gewöhnliche Praxis die Störungsglieder II. Klasse, das heisst diejenigen, welche den Vektor W, bezüglich seine Komponnnten $W^{(i_\alpha)}$, . . . enthalten, als unmerklich bei Seite gelassen werden. Der Fall $V^{(\alpha)} = 0$, $J^{(\alpha)} = 0$, $\sphericalangle(V, \varepsilon) = \sphericalangle(J, \varepsilon) = 90^0$ liefert Horizontalseismographen, der Fall $V^{(\alpha)} = 0$, $J^{(\alpha)} = 0$, $\sphericalangle(V, \varepsilon) = \sphericalangle(J, \varepsilon) = 0$ Vertikalseismographen. Um Seismographen zweiter Klasse zu erhalten, ist W im Verhältniss zu J so gross zu machen, dass die Glieder mit W vorherrschen, oder doch deutlich wirksam werden.

35. *Unterschied des Verhaltens gegenüber einem Seismographen mit punktförmiger Masse.* Wie schon erwähnt kann ein solcher Unterschied sich darin äussern, dass der Indikatorvektor W nicht auf der äquivalenten Schwingungsrichtung, also auf der Richtung von V und J senkrecht steht. Wir wollen in einem solchen Falle W in seine Komponenten senkrecht und parallel der Schwingungsrichtung zerlegt denken. W_s sei die senkrechte, W_p die parallele Komponente. Dann ist für eine beliebige Richtung μ

$$W\cos(\mu, W) = W_s\cos(\mu, W_s) + W_p\cos(\mu, W_p)$$

und (107) ergiebt daher:

$$(115)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2a}{dt^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(\alpha)}\left(\dfrac{d^2\xi}{dt^2} - gi_\alpha - \Delta g_\alpha\right) - V^{(\beta)}\left(\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - gi_\beta - \Delta g_\beta\right) - V^{(\gamma)}\left(\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} - \Delta g_\gamma\right) \\ \qquad - W_s^{(i_\alpha)}\dfrac{d^2i_\alpha}{dt^2} - W_s^{(i_\beta)}\dfrac{d^2i_\beta}{dt^2} - W_s^{(\vartheta_\gamma)}\dfrac{d^2\vartheta_\gamma}{dt^2} - W_p^{(i_\alpha)}\dfrac{d^2i_\alpha}{dt^2} - W_p^{(i_\beta)}\dfrac{d^2i_\beta}{dt^2} - W_p^{(\vartheta_\gamma)}\dfrac{d^2\vartheta_\gamma}{dt^2}. \end{cases}$$

Abgesehen von den 3 letzten Gliedern *entspricht nun die rechte Seite genau einem Seismographen mit punktförmiger Masse.* Die Koordinaten X, Y, Z des äquivalenten Massenpunktes werden nach (80) bestimmt durch die Gleichungen:

$$(116)\quad W_s^{(\alpha)} = V^{(\alpha)}Z - V^{(\alpha)}X,\quad W_s^{(i_\beta)} = V^{(\beta)}Z - V^{(\alpha)}Y,\quad W_s^{(\vartheta_\gamma)} = V^{(\beta)}X - V^{(\alpha)}Y,$$

seine Schwingungsrichtung ist durch V und J gegeben.

Die 3 letzten Glieder zeigen das Neue im Verhalten des Seismographen allgemeiner Art; man kann sie in das eine Glied $W_p\, d^2\Theta/dt^2$ zusammenfassen, wenn unter Θ der Drehwinkel um die W_p-Linie, also um die äquivalente Schwingungsrichtung verstanden wird, denn es ist unter dieser Voraussetzung:

$$(117)\quad W_p^{(i_\alpha)}\frac{d^2i_\alpha}{dt^2} + W_p^{(i_\beta)}\frac{d^2i_\beta}{dt^2} + W_p^{(\vartheta_\gamma)}\frac{d^2i_\gamma}{dt^2} = W_p\frac{d^2\Theta}{dt^2}.$$

Die eventuell vorhandene Abweichung des Verhaltens eines Seismographen mit räumlich vertheilter Masse von dem eines Seismographen mit punktförmiger Masse kann also dahin gedeutet werden, dass eine Empfindlichkeit gegen Drehungen um die äquivalente Schwingungsrichtung hinzugetreten ist. Dabei handelt es sich aber nur um eine Empfindlichkeit zweiter Klasse, sodass die Abweichung für die gewöhnliche Praxis nicht in Betracht kommt.

36. *Einfluss der Aufstellung.* Eine Veränderung der Aufstellung des Apparates mittels *Drehung um die Vertikale durch den Referenzpunkt* ist formal gleich-

www.libtool.com.cn

werthig mit einer anderen Verfügung über die Referenzrichtungen x, y. Die Ueberlegungen des Artikels 34 lehren daher, dass die Vektoren V, J, W ihre Lage relativ zum Apparat ungeändert beibehalten. Die Beziehungen (109) können demgemäss zur Neuberechnung der $V^{(\omega)}$, . . . benutzt werden, und die Formeln (114) bleiben ganz unverändert.

Bei einer Aenderung der Aufstellung durch *Parallelverschiebungen*, also bei einer Aenderung der Lage relativ zum Referenzpunkt müssen die Vektoren V, J nebst ihren Komponenten $V^{(\omega)}$, . . . nach ihrer physikalischen Bedeutung — z. B. V als Vergrösserung sehr schneller Parallelverschiebungen — unbeeinflusst bleiben. Anders steht es um W, denn bei der Einwirkung schneller Drehungen kommt es nicht nur auf die Orientirung, sondern auch auf die Lage der Drehungsaxen relativ zum Gestell an, und diese ändert sich für i_x, i_y, ϑ_z mit der Aufstellung. Von Interesse ist für uns allein der Fall, dass die Verschiebung auf einem Untergestell — z. B. auf einem Pfeiler — stattfindet, welches als starr gelten kann. Die Verschiebung ist dann formal gleichwerthig mit einer anderen Annahme über die Lage des Referenzpunktes relativ zum Apparat. $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ seien die Verschiebungen parallel x, y, z; dann dürfen wir offenbar (107), (115) auch nach der Verschiebung noch anwenden, wenn statt der ξ, η, ζ, i_x, i_y, ϑ_z, Θ diejenigen Werthe der Verschiebungen und Drehungen eingesetzt werden, welche sich auf den Punkt $x = \overline{X}$, $y = \overline{Y}$, $z = \overline{Z}$ beziehen, denn dieser hat ja nun die gleiche Lage relativ zum Gestell, wie vorhin der Referenzpunkt. Die Ersatzwerthe sind:

$$\xi + \overline{Z} i_x - \overline{Y}\vartheta_z,\ \eta + \overline{Z} i_y + \overline{X}\vartheta_z,\ \zeta - \overline{X} i_x - \overline{Y} i_y,\ i_x,\ i_y,\ \vartheta_z,\ \Theta.$$

Werden sie in (115) eingeführt, so entsteht die Gleichung von Neuem, mit dem einzigen Unterschied, dass für $W_x^{(i_x)}$, $W_x^{(i_y)}$, $W_x^{(\vartheta_z)}$ die Werthe:

$$(118)\quad \begin{cases} W_x^{(i_x)} = V^{(\omega)}(Z+\overline{Z}) - V^{(\omega)}(X+\overline{X}),\ W_x^{(i_y)} = V^{(y)}(Z+\overline{Z}) - V^{(\omega)}(Y+\overline{Y}), \\ W_x^{(\vartheta_z)} = V^{(y)}(X+\overline{X}) - V^{(\omega)}(Y+\overline{Y}) \end{cases}$$

anstelle der früheren (116) treten. *Wir erkennen, dass der Einfluss von Parallelverschiebungen sich nur auf die Glieder zweiter Klasse erstreckt und gerade derselbe ist, wie bei dem äquivalenten Seismographen punktförmiger Masse.* Die etwa vorhandene durch W_p gemessene Empfindlichkeit gegen Drehungen um die äquivalente Schwingungsrichtung ist ebenso wie V und J von Parallelverschiebungen des Apparates unabhängig.

37. *Seismographen mehrerer Freiheitsgrade.* Den praktischen Bedürfnissen wird im Allgemeinen hinreichend Rechnung getragen, wenn wir bei der Entwicklung der Theorie, über den Seismographen eines Freiheitsgrades hinausgehend, nur noch den Fall einer bestimmten endlichen Anzahl von Freiheitsgraden betrachten. Genau genommen wird hierdurch verlangt, dass alle Theile des Seismographen ausser den Gelenken völlig starr seien, denn in elastischen Körpern sind stets unendlich viele verschiedene Arten von Schwingungen möglich.

www.libtool.com.cn

Für die Praxis aber ist es hinreichend, wenn die überzähligen Schwingungen durch zweckmässige Konstruktion genügend klein gehalten werden. In der Regel wird es dabei darauf ankommen, die Periode der störenden Eigenschwingungen klein gegenüber den zu registrirenden Perioden zu machen. —

Die Anzahl der Freiheitsgrade des Seismographen sei n; das Gehänge kann dann n verschiedenartige Schwingungen gegenüber dem Gestell ausführen, und zur Feststellung seiner jeweiligen relativen Lage gegenüber dem Gestell ist die Angabe von n Grössen erforderlich und hinreichend. Will man die Bewegungen des Gehänges seismographisch vollständig ausnutzen, so sind n Indikatoren anzubringen. Wir wollen annehmen, dieses sei geschehen, und die bezüglichen Ausschläge mit $a, b, c, \ldots$ bezeichnen. Jede Bewegung des Gehänges relativ zum Gestell äussert sich dann in einer Aenderung des Systemes der Werthe $a, b, c, \ldots$.

Π sei irgend ein Punkt des Gehänges, ξ', η', ζ' mögen die von der Ruhelage ab gerechneten relativen Verschiebungen bezeichnen, sodass ξ', η', ζ' von den Ausschlägen $a, b, c, \ldots$ abhängen. Wiederum, wie in früheren ähnlichen Fällen setzen wir eine lineare Beziehung voraus, schreiben also:

$$(119)\quad \begin{cases} \xi' = \left[\frac{\xi'}{a}\right]a + \left[\frac{\xi'}{b}\right]b + \left[\frac{\xi'}{c}\right]c + \cdots, \quad \eta' = \left[\frac{\eta'}{a}\right]a + \left[\frac{\eta'}{b}\right]b + \left[\frac{\eta'}{c}\right]c + \cdots, \\ \zeta' = \left[\frac{\zeta'}{a}\right]a + \left[\frac{\zeta'}{b}\right]b + \left[\frac{\zeta'}{c}\right]c + \cdots, \end{cases}$$

wobei die Symbole $[\xi'/a], [\xi'/b], \ldots$. gewisse Konstanten bezeichnen.

Griffe in Π eine Kraft Ξ parallel x an, so würde ihr nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen das Gleichgewicht gehalten, wenn an den Indikatoren die Kräfte $-Q_a, -Q_b, -Q_c, \ldots$ wirkten, bestimmt durch die Formeln:

$$Q_a = \left[\frac{\xi'}{a}\right]\Xi, \quad Q_b = \left[\frac{\xi'}{b}\right]\Xi, \quad Q_c = \left[\frac{\xi'}{c}\right]\Xi, \ldots,$$

und es könnte demgemäss das Kraftsystem $Q_a, Q_b, Q_c, \ldots$ die Kraft Ξ genau ersetzen. Entsprechend ist eine beliebige in Π wirkende Kraft mit den Komponenten Ξ, H, Z äquivalent mit dem Indikatorkraftsystem:

$$(120)\quad \begin{cases} Q_a = \left[\frac{\xi'}{a}\right]\Xi + \left[\frac{\eta'}{a}\right]H + \left[\frac{\zeta'}{a}\right]Z, \quad Q_b = \left[\frac{\xi'}{b}\right]\Xi + \left[\frac{\eta'}{b}\right]H + \left[\frac{\zeta'}{b}\right]Z, \\ Q_c = \left[\frac{\xi'}{c}\right]\Xi + \left[\frac{\eta'}{c}\right]H + \left[\frac{\zeta'}{c}\right]Z, \ldots, \end{cases}$$

sodass die so bestimmten Kräfte Q_a, Q_b, Q_c als die *Indikatorkomponenten* der gegebenen Kraft Ξ, H, Z bezeichnet werden können.

Die Bewegungsgleichungen sagen nach dem D'Alembert'schen Prinzip aus, dass die bewegenden Kräfte und die Trägheitskräfte einander zu Null ergänzen.

www.libtool.com.cn

Wir erhalten sie daher, indem wir jede bewegende Kraft und jede Trägheitskraft durch ihre Indikatorkomponenten ersetzen und der Summe für jeden einzelnen Indikator den Werth Null geben.

Es sollen zunächst diejenigen Kräfte betrachtet werden, welche das Gehänge in die Ruhelage zurückzuführen streben. Bei nur einem Freiheitsgrad setzten wir die Indikatorresultante $Q^{(a)}$ proportional mit dem Indikatorausschlag a; jetzt, bei mehreren Freiheitsgraden und dementsprechend mehrfach vorhandenen Indikatoren a, b, c, ..., werden wir für die resultirenden Indikatorkomponenten eine lineare Abhängigkeit von den Ausschlägen a, b, c, . . . annehmen müssen, sodass geschrieben werden kann:

$$(121)\quad \begin{cases} Q_a^{(a)} = -f_{11}a - f_{12}b - f_{13}c - \cdots, \; Q_b^{(a)} = -f_{21}a - f_{22}b - f_{23}c - \cdots, \\ Q_c^{(a)} = -f_{31}a - f_{32}b - f_{33}c - \cdots, \cdots, \end{cases}$$

wobei die f_{11}, $f_{12}, \cdots$ Konstanten bedeuten. Indem wir dabei wieder, wie in Artikel 28 voraussetzen, dass der Apparat nicht dauernd wie ein Motor Energie abgeben könne, ergiebt sich für beliebige ν, μ die Beziehung:

$$(122)\qquad f_{\mu\nu} = f_{\nu\mu} \cdot -$$

In den weiteren Untersuchungen gestaltet sich alles ganz ähnlich wie bei einem Freiheitsgrad, sodass ich mich unter Hinweis hierauf sehr kurz fassen darf.

38. *Eigenschwingungen des Apparates.* Bei den Eigenschwingungen des sich selbst überlassenen Apparates sind ausser den bewegenden Kräften $Q_a^{(a)}$, $Q_b^{(a)}$, . . . nur noch die Trägheitskräfte infolge der Bewegungen des Gehänges relativ zum Gestelle zu beachten. Werden ihre Resultanten mit $Q_a^{[a]}$, $Q_b^{[a]}$, . . . bezeichnet, so lauten die Bewegungsgleichungen $Q_a^{(a)} + Q_a^{[a]} = 0$, $Q_b^{(a)} + Q_b^{[a]} = 0$, ... Durch Einsetzen der Werthe für $Q_a^{(a)}$, $Q_b^{(a)}$, . . . und den leicht zu berechnenden Werthen für $Q_a^{[a]}$, $Q_b^{[a]}$, . . . ergeben sich die Formeln:

$$(123)\quad \begin{cases} m_{11}\frac{d^2a}{dt^2} + m_{12}\frac{d^2b}{dt^2} + m_{13}\frac{d^2c}{dt^2} + \cdots = -f_{11}a - f_{12}b - f_{13}c - \cdots, \\ m_{21}\frac{d^2a}{dt^2} + m_{22}\frac{d^2b}{dt^2} + m_{23}\frac{d^2c}{dt^2} + \cdots = -f_{21}a - f_{22}b - f_{23}c - \cdots, \end{cases}$$

in welchen die Konstanten m_{11}, m_{12}, . . . folgende Bedeutung haben:

$$(124)\quad m_{11} = \int d\mu \left(\left[\frac{\xi'}{a}\right]^2 + \left[\frac{\eta'}{a}\right]^2 + \left[\frac{\zeta'}{a}\right]^2 \right), \; m_{12} = \int d\mu \left(\left[\frac{\xi'}{a}\right]\left[\frac{\xi'}{b}\right] + \left[\frac{\eta'}{a}\right]\left[\frac{\eta'}{b}\right] + \left[\frac{\zeta'}{a}\right]\left[\frac{\zeta'}{b}\right] \right) = m_{21}, \cdots\cdots$$

. . . . . .

Setzen wir einer einheitlichen Schwingung mit der Periode T entsprechend:

$$(125)\qquad a = p\alpha, \; b = p\beta, \; c = p\gamma, \ldots.$$

$$(126)\qquad p = P \sin 2\pi \frac{t+\delta}{T} \cdot$$

www.libtool.com.cn

wobei die $\alpha, \beta, \gamma, \ldots T, \vartheta$ und der aus später zu Tage tretenden Gründen hinzugefügte Faktor P Konstanten sind, so liefern (123) die Bedingungen:

$$(127)\quad \begin{cases} \left(m_{11}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - f_{11}\right)\alpha + \left(m_{12}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - f_{12}\right)\beta + \left(m_{13}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - f_{13}\right)\gamma + \cdots = 0, \\ \left(m_{21}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - f_{21}\right)\alpha + \left(m_{22}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - f_{22}\right)\beta + \left(m_{23}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - f_{23}\right)\gamma + \cdots = 0, \end{cases}$$

. . . . . .

Aus ihnen folgt in bekannter Weise zur Bestimmung von T die Determinantengleichung:

$$(128)\quad \begin{vmatrix} m_{11}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - f_{11}, & m_{12}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - f_{12}, & m_{13}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - f_{13}, \cdots \\ m_{21}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - f_{21}, & m_{22}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - f_{22}, & m_{23}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - f_{23}, \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0.$$

Als Unbekannte können wir in (128) die Grösse

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{L}$$

ansehen. Der Grad ist $= n$, ebenso gross wie die Anzahl der Freiheitsgrade; im Allgemeinen giebt es also auch ebenso viele verschiedene Schwingungsperioden T, bezüglich äquivalente Pendellängen L. Wir wollen die ersteren mit $T_1, T_2, T_3, \ldots$ bezeichnen. Wird irgend einer dieser Werthe in (127) eingeführt, so entstehen lineare Gleichungen zur Berechnung der $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Es scheint unnöthig, auf die sich eventuell einstellenden Unbestimmtheiten näher einzugehen; jedenfalls kann man schliesslich im Ganzen n verschiedene Systeme von Werthen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, die mit

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \ldots, \ldots$$

bezeichnet werden sollen, angeben, von denen jedes einem der n Werthe T zugeordnet ist, und mit diesem zusammen in (125) (126) eingesetzt bei beliebigen P und ϑ die Bewegungsgleichungen (123) erfüllt. *So werden n mögliche verschiedene einheitliche Eigenschwingungen des Seismographen dargestellt. Die allgemeinste Art der Eigenschwingungen erhalten wir durch Superposition der einfachen Schwingungen, wenn*

$$(129)\quad a = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \ldots, \; b = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3 + \ldots, \ldots$$

$$(130)\quad p_1 = P_1 \sin 2\pi \frac{t+\delta_1}{T_1}, \; p_2 = P_2 \sin 2\pi \frac{t+\delta_2}{T_2}, \ldots$$

geschrieben wird. Die $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ können hierin als ein für alle Mal fest-

www.libtool.com.cn

stehende, bestimmte Zahlen, die P und δ dagegen als beliebige Zahlen, Integrationskonstanten, angesehen werden. Es bestimmen dann die $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ jedesmal die Art der einfachen Schwingung, während P die beliebig bleibende Intensität misst, und δ die ebenfalls beliebig bleibende Phase festlegt. — Man wird nun erkennen, warum vorhin der Faktor P von den Koefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ abgespaltet wurde: es geschah, um die Bestimmung der Art und der Intensität der einzelnen Schwingungen in bequemer Weise von einander trennen zu können.

39. *Verhalten bei Störungen.* Bei seismischen Störungen und Schwereänderungen ergeben Erwägungen ähnlicher Art wie in Artikel 33 unter Benutzung von (127) zu (129) eine Reihe von Gleichungen anstelle von (123), deren erste, die zum Indikator (a) gehört, so geschrieben werden kann:

$$(131)\quad \begin{cases} (m_{11}\alpha_1+m_{12}\beta_1+\ldots)\left(\dfrac{d^2p_1}{dt^2}+\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 p_1\right)+(m_{11}\alpha_2+m_{12}\beta_2+\ldots)\left(\dfrac{d^2p_2}{dt^2}+\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 p_2\right)+\ldots \\ = -\left(\int d\mu\left[\dfrac{\xi'}{a}\right]\right)\left(\dfrac{d^2\xi}{dt^2}-gi_x-\Delta g_x\right)-\left(\int d\mu\left[\dfrac{\eta'}{a}\right]\right)\left(\dfrac{d^2\eta}{dt^2}-gi_y-\Delta g_y\right)-\left(\int d\mu\left[\dfrac{\zeta'}{a}\right]\right)\left(\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}-\Delta g_z\right) \\ \quad -\left(\int d\mu\, z\left[\dfrac{\xi'}{a}\right]-\int d\mu\, x\left[\dfrac{\zeta'}{a}\right]\right)\dfrac{d^2i_x}{dt^2}-\left(\int d\mu\, z\left[\dfrac{\eta'}{a}\right]-\int d\mu\, y\left[\dfrac{\zeta'}{a}\right]\right)\dfrac{d^2i_y}{dt^2}-\left(\int d\mu\, x\left[\dfrac{\eta'}{a}\right]-\int d\mu\, y\left[\dfrac{\xi'}{a}\right]\right)\dfrac{d^2\vartheta_z}{dt^2}. \end{cases}$$

Zur bequemeren Gestaltung der Gleichungen bestimmen wir n Koefficienten $V_1^{(x)}, V_2^{(x)}, V_3^{(x)}, \ldots V_n^{(x)}$ mittels der Formeln:

$$(132)\quad \begin{cases} (m_{11}\alpha_1+m_{12}\beta_1+\ldots)\ V_1^{(x)}+(m_{11}\alpha_2+m_{12}\beta_2+\ldots)\ V_2^{(x)}+\ldots = \int d\mu\left[\dfrac{\xi'}{a}\right], \\ (m_{21}\alpha_1+m_{22}\beta_1+\ldots)\ V_1^{(x)}+(m_{21}\alpha_2+m_{22}\beta_2+\ldots)\ V_2^{(x)}+\ldots = \int d\mu\left[\dfrac{\xi'}{b}\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

und weitere Systeme von je n Koefficienten $V_1^{(y)}, \ldots V_n^{(y)}, V_1^{(z)}, \ldots V_n^{(z)}, W_1^{(i_x)}, \ldots W_n^{(i_x)}, W_1^{(i_y)}, \ldots W_n^{(i_y)}, W_1^{(\vartheta_z)}, \ldots W_n^{(\vartheta_z)}$ mittels entsprechender Formeln, bei denen die Faktoren links stets gleich bleiben, und rechts nacheinander die Grössen $\int d\mu\,[\eta'/a], \ldots, \int d\mu\,[\zeta'/a], \ldots, (\int d\mu\, z\,[\xi'/a]-\int d\mu\, x\,[\zeta'/a]), \ldots, (\int d\mu\, z\,[\eta'/a]-\int d\mu\, y\,[\zeta'/a]), \ldots, (\int d\mu\, x\,[\eta'/a]-\int d\mu\, y\,[\xi'/a]), \ldots$ auftreten; dann erhalten wir mittels (131) und den entsprechenden Formeln für die anderen Indikatoren das *folgende System der Bewegungsgleichungen*:

$$(133)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2p_\nu}{dt^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 p_\nu - V_\nu^{(x)}\left(\dfrac{d^2\xi}{dt^2}-gi_x-\Delta g_x\right)-V_\nu^{(y)}\left(\dfrac{d^2\eta}{dt^2}-gi_y-\Delta g_y\right)-V_\nu^{(z)}\left(\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}-\Delta g_z\right) \\ \qquad -W_\nu^{(i_x)}\dfrac{d^2i_x}{dt^2}-W_\nu^{(i_y)}\dfrac{d^2i_y}{dt^2}-W_\nu^{(\vartheta_z)}\dfrac{d^2\vartheta_z}{dt^2}, \end{cases}$$

$$\nu = 1, 2, \ldots n.$$

www.libtool.com.cn

Dabei ist nach der Ableitung

(134) $a = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \ldots + \alpha_n p_n$, $b = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3 + \ldots + \beta_n p_n, \ldots$

und sind die α, β, γ, T Systeme von Konstanten, welche den Bedingungen (127), (128) genügen.

Wir erkennen durch Vergleich dieser Formeln mit (107), *dass ein Seismograph von n Freiheitsgraden sich genau so verhält, als umfasste er n von einander unabhängige Seismographen je eines Freiheitsgrades.* Die Bewegungen der letzteren werden bei unserer Bezeichnungsweise durch die Variablen $p_1, p_2, \ldots . p_n$ gekennzeichnet.

Die Aufzeichnungen jedes einzelnen der Indikatoren (a), (b), (c), . . . *erscheinen im allgemeinen Falle von den sämmtlichen Einzelseismographen beeinflusst.* Hieran knüpfen sich nun ähnliche Bemerkungen, wie in Artikel 28 bei Besprechung der Seismographen mit punktförmiger Masse: *In der Praxis kann und wird man in der Regel eine solche besondere Konstruktion verlangen, dass jeder Indikator nur von einem der unabhängig scheinenden Einzelseismographen abhänge.* Wird dann p_1 zu a, p_2 zu b, u. s. w. zugeordnet, so darf in (133) p_1 durch a, p_2 durch b, u. s. w. ersetzt werden, und es entsteht ein System von Gleichungen, welches zeigt, *dass in diesem Falle der Seismograph n mit Freiheitsgraden völlig äquivalent mit n einzelnen Seismographen je eines Freiheitsgrades ist.*

40. *Schlussübersicht.* Das Endergebniss der bisherigen Untersuchungen können wir in der Erkenntniss sehen, dass bei jeder beliebigen Konstruktion der für uns in Betracht kommenden Seismographen die *Indikatorgleichung* folgende Form hat:

$$(135)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2a}{dt^2} &= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(a)}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - gi_x - \Delta g_x\right) - V^{(b)}\left(\frac{d^2\eta}{dt^2} - gi_y - \Delta g_y\right) - V^{(c)}\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \Delta g_z\right) \\ &\quad - W^{(i_x)}\frac{d^2 i_x}{dt^2} - W^{(i_y)}\frac{d^2 i_y}{dt^2} - W^{(\vartheta_z)}\frac{d^2\vartheta_z}{dt^2} \\ &= -\frac{g}{L}a - \frac{J^{(a)}}{L}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - gi_x - \Delta g_x\right) - \frac{J^{(b)}}{L}\left(\frac{d^2\eta}{dt^2} - gi_y - \Delta g_y\right) - \frac{J^{(c)}}{L}\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \Delta g_z\right) \\ &\quad - W^{(i_x)}\frac{d^2 i_x}{dt^2} - W^{(i_y)}\frac{d^2 i_y}{dt^2} - W^{(\vartheta_z)}\frac{d^2\vartheta_z}{dt^2}. \end{aligned}\right.$$

ξ, η, ζ sind die Verrückungen des Apparates parallel den Referenzrichtungen x, y, z, i_x und i_y seine Neigungen parallel den Vertikalebenen (z,x), (z,y); ϑ_z giebt die Drehung um die Vertikale an. a ist der Indikatorausschlag, T die *Schwingungsperiode* (= der doppelten Schwingungsdauer) des Gehänges bei Eigenschwingungen, L die „*äquivalente Pendellänge*", d. h. die Länge eines einfachen Pendels gleicher Periode; $V^{(a)}$, $V^{(b)}$, $V^{(c)}$, $W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$, $W^{(\vartheta_z)}$ oder $J^{(a)}$, $J^{(b)}$, $J^{(c)}$, $W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$, $W^{(\vartheta_z)}$ sind sechs Konstanten, welche mit der siebenten T oder L zusammen die Eigenart des Seismographen und seiner Aufstellung charakterisiren. $V^{(a)}$, $V^{(b)}$, $V^{(c)}$, $J^{(a)}$, $J^{(b)}$, $J^{(c)}$ $W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$, $W^{(\vartheta_z)}$ können gemäss (108) zu je einem Vektor V, J, W vereinigt werden.

www.libtool.com.cn

Für Eigenart und Aufstellung sind also ein Skalar, nämlich T oder L, und zwei Vektoren, nämlich V oder J und W charakteristisch. T und L sind durch die skalare Gleichung

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{L}, \tag{136}$$

V und J durch die vektorelle Gleichung

$$J \simeq L\,V \tag{137}$$

mit einander verbunden. Die Vektoren V und L sind relativ zum Seismographen fest bestimmt, d. h. sie hängen nach ihrer Grösse und nach ihrer Richtung relativ zum Apparat nicht von der Aufstellung ab. Ihre gemeinsame Richtung wird von uns *„äquivalente Schwingungsrichtung"* genannt, weil sie die Schwingungsrichtung bei einem Seismographen mit punktförmiger Masse angiebt, der sich in Bezug auf T, L, V, J genau ebenso verhält wie der gegebene Seismograph. V bedeutet die Vergrösserung, mit welcher im äquivalenten Seismographen punktförmiger Masse die Bewegungen dieser vom Indikator wiedergegeben werden und heisst darum der *„Vektor der Indikatorvergrösserung"* oder auch kürzer die *„Indikatorvergrösserung"*. J giebt im speciellen Falle des einfachen Pendels (§ 2) die Länge des indicirenden Zeigers an, und heisst darum *„Vektor der Indikatorlänge"* oder kürzer *„Indikatorvektor"*. $V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$, $V^{(s)}$ heissen *„Indikatorvergrösserungen"*, $J^{(x)}$, $J^{(y)}$, $J^{(z)}$, $J^{(s)}$, *„äquivalente Indikatorlängen"* für die Richtungen x, y, z, s. Unter s ist hier eine beliebige Richtung im Raume zu verstehen, so dass $V^{(s)} = V\cos(s, V)$, $J^{(s)} = J\cos(s, J)$ wird. Sehr schnelle Parallelverschiebungen werden vom Indikator $-V^{(s)}$ mal vergrössert aufgezeichnet. Eine Aenderung der Schwerkraft um Δg_s parallel s verändert die Ruhelage des Indikators um $(J^{(s)}/g)\,\Delta g_s$. Bezeichnet s speciell eine horizontale Richtung, so zeigt $J^{(s)}\,i_s$ den Indikatorausschlag für eine Neigung i_s parallel der Vertikalebene (z, s) bei Bogenmaass an; wird i_s in Winkelsekunden gemessen, so erhält der Ausschlag den Werth $(J^{(s)}/206000)\,i_s$.

Der Vektor W hängt ausser von der Eigenart des Seismographen auch davon ab, auf welchen Punkt man die Drehungsaxen für i_x, i_y, ϑ_z bezieht; sich anders ausdrückend, kann man sagen, dass für W auch die Stellung des Apparates relativ zum Referenzpunkt in Betracht kommt, auf den man die seismische Störungen i_x, i_y, ϑ_z bezieht (Artikel 36). — Die Unterscheidung zwischen scheinbaren und wahren Neigungen der Erdoberfläche verlangt die Beachtung von W, wir nennen demgemäss W den *„Vektor II. Klasse"*, seine angehörigen Glieder in der Indikatorgleichung *„Glieder II. Klasse"* (Artikel 17).

Da es bisher noch nicht gelungen ist, Seismographen zu konstruiren, bei welchen der Vektor II. Klasse W die Indikatoraufzeichnungen merklich beeinflusste, *so darf man für die gewöhnliche Praxis, die Glieder II. Klasse ganz beiseite*

www.libtool.com.cn

lassend, anstelle von (135) als Indikatorgleichung einfacher schreiben:

$$(138)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2a}{dt^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(\alpha)}\left(\dfrac{d^2\xi}{dt^2} - g i_\alpha - \Delta g_\alpha\right) - V^{(\beta)}\left(\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - g i_\beta - \Delta g_\beta\right) - V^{(\gamma)}\left(\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} - \Delta g_\gamma\right) \\ \qquad = -\dfrac{g}{L}a - \dfrac{J^{(\alpha)}}{L}\left(\dfrac{d^2\xi}{dt^2} - g i_\alpha - \Delta g_\alpha\right) - \dfrac{J^{(\beta)}}{L}\left(\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - g i_\beta - \Delta g_\beta\right) - \dfrac{J^{(\gamma)}}{L}\left(\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} - \Delta g_\gamma\right), \end{cases}$$

sodass zur Charakterisirung der Wirksamkeit nur ein Skalar, nämlich T oder L, und ein Vektor, nämlich V oder J, übrig bleibt.

Bezeichnet k die Richtung der horizontalen Projektion von V und J, $\varkappa$ die zugehörige Komponente der Parallelverschiebung (ξ, η, ζ), so erhält die *allgemeine Indikatorgleichung (138) folgende einfachere Form:*

$$(139)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2a}{dt^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(k)}\left(\dfrac{d^2\varkappa}{dt^2} - g i_k - \Delta g_k\right) - V^{(\varepsilon)}\left(\dfrac{d^2\xi}{dt^2} - \Delta g_\varepsilon\right) \\ \qquad = -\dfrac{g}{L}a - \dfrac{J^{(k)}}{L}\left(\dfrac{d^2\varkappa}{dt^2} - g i_k - \Delta g_k\right) - \dfrac{J^{(\varepsilon)}}{L}\left(\dfrac{d^2\xi}{dt^2} - \Delta g_\varepsilon\right). \end{cases}$$

Für einen *Horizontalseismographen* ist speciell

$$\sphericalangle(V, z) = \sphericalangle(J, z) = 90^\circ,\ V^{(\alpha)} = 0,\ J^{(\alpha)} = 0,\ V^{(k)} = V,\ J^{(k)} = J,$$

sodass sich als *Indikatorgleichung*

$$(140)\quad \frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V\left(\frac{d^2\varkappa}{dt^2} - g i_k - \Delta g_k\right) = -\frac{g}{L}a - \frac{J}{L}\left(\frac{d^2\varkappa}{dt^2} - g i_k - \Delta g_k\right)$$

ergiebt. k bezeichnet hier zugleich die Richtungen der Vektoren V und J, also die *„äquivalente Schwingungsrichtung"*.

Für einen *Vertikalseismographen* ist $\sphericalangle(V, z) = \sphericalangle(J, z) = 0$, $V^{(k)} = 0$, $J^{(k)} = 0$, $V^{(\alpha)} = V$, $J^{(\alpha)} = J$; die *Indikatorgleichung* geht über in

$$(141)\quad \frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - \Delta g_z\right) = -\frac{g}{L}a - \frac{J}{L}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - \Delta g_z\right);$$

die äquivalente Schwingungsrichtung liegt $\| z$.

In der gewöhnlichen Praxis hat man es nur entweder mit Horizontalseismographen oder mit Vertikalseismographen zu thun, wird also entweder die Gleichung (140) oder die Gleichung (141) annehmen dürfen, welcher Art auch die Konstruktion des Seismographen sei. Der Horizontalseismograph verhält sich hiernach gerade so, wie ein einfacher Pendelseismograph mit der Pendellänge L und der Indikatorlänge J, der Vertikalseismograph so, als ob er eine punktförmige Masse mit vertikaler Schwingungsrichtung und der Eigenperiode T enthielte, deren Bewegungen vom Indikator V-mal vergrössert aufgezeichnet werden.

Angesichts dieser gewiss überraschenden und sehr erfreulichen Einfachheit der Resultate unserer theoretischen Untersuchungen, mag darauf hingewiesen

www.libtool.com.cn

werden, dass wir von *Reibungswiderständen* bisher absahen. Es wird bald zu Tage treten, dass diese bei gut konstruirten Instrumenten eine nur geringe Komplikation der Indikatorgleichungen verursachen, und dass es sogar möglich ist, aus ihnen für die Verwerthbarkeit der Seismographen Nutzen zu ziehen (§ 6).

§ 5. Indikatorbewegungen reibungsloser Seismographen.

41. *Einleitung; Satz der Superposition.* Die allgemeine Indikatorgleichung lautet nach Artikel 40:

$$(142)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2a}{dt^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(\alpha)}\left(\dfrac{d^2\xi}{dt^2} - gi_\alpha - \Delta g_\alpha\right) - V^{(\beta)}\left(\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - gi_\beta - \Delta g_\beta\right) - V^{(\gamma)}\left(\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} - \Delta g_\gamma\right) \\ \qquad - W^{(i_\alpha)}\dfrac{d^2i_\alpha}{dt^2} - W^{(i_\beta)}\dfrac{d^2i_\beta}{dt^2} - W^{(\vartheta_\gamma)}\dfrac{d^2\vartheta}{dt^2}, \\ = -\dfrac{g}{L}a - \dfrac{J^{(\alpha)}}{L}\left(\dfrac{d^2\xi}{dt^2} - gi_\alpha - \Delta g_\alpha\right) - \dfrac{J^{(\beta)}}{L}\left(\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - gi_\beta - \Delta g_\beta\right) - \dfrac{J^{(\gamma)}}{L}\left(\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} - \Delta g_\gamma\right) \\ \qquad - W^{(i_\alpha)}\dfrac{d^2i_\alpha}{dt^2} - W^{(i_\beta)}\dfrac{d^2i_\beta}{dt^2} - W^{(\vartheta_\gamma)}\dfrac{d^2\vartheta}{dt^2}. \end{cases}$$

Solange der Seismograph sich selbst überlassen ist, tritt anstelle dieser Gleichungen die einfachere:

$$(143)\qquad \frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a = -\frac{g}{L}a,$$

deren Lösung in der Form

$$(144)\qquad a = A\sin 2\pi\frac{t+\delta}{T}$$

oder

$$(145)\qquad a = S\sin 2\pi\frac{t}{T} + C\cos 2\pi\frac{t}{T}$$

geschrieben werden kann und die *Eigenschwingungen* umfasst. A, δ bezüglich S, C sind Konstanten von beliebigen Werthen, zwischen denen die Beziehungen

$$(146)\qquad S = A\cos 2\pi\frac{\delta}{T},\ C = A\sin 2\pi\frac{\delta}{T},\ A = \sqrt{S^2+C^2},\ tg\,2\pi\frac{\delta}{T} = \frac{C}{S}$$

bestehen. Die Indikatorgeschwindigkeit wird durch

$$(147)\qquad \frac{da}{dt} = \frac{2\pi}{T}A\cos 2\pi\frac{t+\delta}{T} = \frac{2\pi}{T}S\cos 2\pi\frac{t}{T} - \frac{2\pi}{T}C\sin 2\pi\frac{t}{T}$$

angegeben.

www.libtool.com.cn

Die Gleichung (142) lehrt jederzeit die Beschleunigung der Indikatorbewegung kennen, wenn der Anschlag und die von den Störungen abhängigen Grössen $d^2\xi/dt^2$, $i_x, \ldots$ gegeben sind. *Die Indikatorbewegung ist also von einem beliebigen Augenblick ab völlig bestimmt, wenn in diesem der Indikatorausschlag a sowie die Indikatorgeschwindigkeit da/dt und weiterhin die Störungen, also* ξ, η, ζ, i_x, i_y, ϑ, Δg_x, Δg_y, Δg_z, *bekannt sind.*

Hieran knüpft sich sogleich die *Frage, wie der durch a und da/dt bestimmte Anfangszustand den weiteren Verlauf der Indikatorbewegungen beeinflusst.* Um die Antwort zu finden, vergleichen wir zwei Fälle, in denen von gewissen Zeitpunkten ab — die Anfangspunkte genannt werden sollen — genau gleiche Störungen erfolgen, während die Anfangszustände verschieden sind. a_1 und a_2 seien die Ausschläge in den beiden Fällen. Wir stellen (142) für a_1 und a_2 auf und bilden die zu entsprechenden Zeitmomenten gehörige Differenz; dann folgt

$$\frac{d^2(a_2-a_1)}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (a_2-a_1),$$

also

$$a - a_1 = S \sin 2\pi \frac{t}{T} + C \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

und

$$\frac{da_2}{dt} - \frac{da_1}{dt} = \frac{2\pi}{T} S \cos 2\pi \frac{t}{T} - \frac{2\pi}{T} C \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

wobei S und C durch die anfänglichen Werthe von a und da/dt bestimmt werden. *Verschiedene Anfangszustände verursachen hiernach für die Indikatorbewegung nur insofern einen Unterschied, als in einer anderen Weise Eigenschwingungen beigemischt erscheinen.* —

Die hier sich zeigende Superposition beliebiger Eigenschwingungen bildet einen speciellen Fall eines viel allgemeineren Satzes. Um zu ihm zu gelangen, vergleichen wir eine Reihe von Fällen (1), (2), (3) .... irgend welcher Störungen:

$$\begin{aligned}
&\xi_1, \eta_1, \zeta_1, (i_x)_1, (i_y)_1, (\vartheta_x)_1, (\Delta g_x)_1, (\Delta g_y)_1, (\Delta g_z)_1,\\
&\xi_2, \eta_2, \zeta_2, (i_x)_2, (i_y)_2, (\vartheta_x)_2, (\Delta g_x)_2, (\Delta g_y)_2, (\Delta g_z)_2,\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

mit einen Störungsfall (0)

$$\xi, \eta, \zeta, i_x, i_y, \vartheta_x, \Delta g_x, \Delta g_y, \Delta g_z$$

solcher Art, dass dauernd

$$(148)\quad \xi = \xi_1+\xi_2+\xi_3+\cdots,\ \eta = \eta_1+\eta_2+\eta_3\cdots,\ \cdots\cdots,\ \Delta g_x = (\Delta g_x)_1+(\Delta g_x)_2+(\Delta g_x)_3+\cdots$$

ist, wenn man den Zeiten jedesmal von einem passend gewählten Anfangspunkte aus rechnet, oder — wie wir uns für die Darstellung bequemer aus-

www.libtool.com.cn

drücken wollen —, wenn man die $\xi, \eta, \ldots$ $\xi_1, \eta_1, \ldots$ für *„entsprechende"* Zeiten auswählt. Die Störungen im Falle (0) erscheinen dann als Summe der Störungen in den Fällen (1), (2), (3) . . . . . — Bildet man hier die Indikatorgleichung (142) der Reihe nach für entsprechende Zeitmomente in (1), (2), (3), summirt und subtrahirt das Resultat von der zu (0) gehörigen Indikatorgleichung, so ergiebt sich

$$\frac{d^2(a-a_1-a_2-a_3-\ldots.)}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2(a-a_1-a_2-a_3-\ldots),$$

also:

$$(149)\quad \begin{cases} a-a_1-a_2-a_3-\ldots = S\sin 2\pi\frac{t}{T}+C\cos 2\pi\frac{t}{T}, \\ \frac{da}{dt}-\frac{da_1}{dt}-\frac{da_2}{dt}-\frac{da_3}{dt}-\ldots = \frac{2\pi}{T}S\cos 2\pi\frac{t}{T}-\frac{2\pi}{T}C\sin 2\pi\frac{t}{T}. \end{cases}$$

Ist insbesondere anfänglich

$$(150)\quad \begin{cases} a = a_1+a_2+a_3+\ldots., \\ \frac{da}{dt} = \frac{da_1}{dt}+\frac{da_2}{dt}+\frac{da_3}{dt}+\ldots., \end{cases}$$

so gilt hiernach dauernd

$$(151)\qquad a = a_1+a_2+a_3+\ldots..$$

Die vorstehenden Formeln enthalten den in Aussicht gestellten *Satz der Superposition*, der so ausgesprochen werden kann: *Fasst man die während irgend eines Zeitraumes stattfindenden* — durch $\xi, \eta, \zeta, i_s, i_y, \vartheta_s, \Delta g_s, \Delta g_y, \Delta g$, dargestellten — *Störungen in beliebiger Weise als die Summe von Einzelstörungen auf, die während jenes Zeitraumes gleichzeitig oder einander ablösend stattfinden, so stellt der jeweilige wirklich auftretende Indikatorausschlag* abgesehen von etwa überlagerten Eigenschwingungen *die Summe der Ausschläge dar, welche den Einzelstörungen entsprechen würden.* Die etwa überlagerten Eigenschwingungen sind durch die Anfangszustände bedingt, welche man bei der Zertheilung annimmt, und verschwinden, wenn dabei die Beziehungen (150) vorgeschrieben werden, wenn man also sozusagen auch den Anfangszustand restlos auftheilt.

Der vorstehende Satz ist für uns vor Allem desshalb von Bedeutung, weil er es erlaubt, die Wirkung von einzelnen Störungsursachen, zum Beispiel:

von Parallelverschiebungen, Neigungen, Drehungen um die Vertikale, Schwereänderungen, —

von Komponenten verschiedener Richtung der Parallelverschiebungen, oder der Neigungen, oder der Schwereänderungen, —

von Erdbewegungen verschiedenen Ursprungs (Sturmbewegungen Erdbebenbewegungen) oder verschiedener Art (Schwingungen verschiedener Periode)

in bequemster Weise von einander zu trennen. Insbesondere haben wir es ihm zu verdanken, dass die Resultate, welche im Folgenden für die Wirkung einzelner

www.libtool.com.cn

Störungsursachen gewonnen werden, ihre Bedeutung stets auch dann behalten, wenn zugleich beliebig viele andere Störungsursachen wirksam sind. —

Unser Satz der Superposition verlangt zunächst eine bestimmt gegebene Indikatorgleichung, also einen bestimmt gegebenen Seismographen. Es ist aber unmittelbar einleuchtend, dass wir gleiche Ueberlegungen auch zur Sonderung des Einflusses der verschiedenen Glieder in der Indikatorgleichung (142) anwenden können, indem wir dann gewissermassen die Aufzeichnungen von Seismographen verschiedener Konstruktion vergleichen, bei denen jedesmal nur eines der 6 Störungsglieder $V^{(\omega)}(d^2\xi/dt^2 - gi_\varepsilon - \Delta g_\varepsilon), \ldots$ zur Geltung kommt. Auch hier ergiebt sich der Satz, *dass die Wirkung der einzelnen Störungsglieder sich in dem Indikatorausschlag einfach summirt.*

Schauen wir zurück auf die Ergebnisse dieses Artikels, so erscheint es erlaubt und zweckmässig, bei der Untersuchung der Einwirkung von Störungen nicht immer die ganze Indikatorgleichung (142) mit allen ihren Gliedern mitzuführen, sondern sich in der Regel auf die Beachtung einzelner Glieder zu beschränken. *Wir werden demgemäss im Folgenden (142) meist ersetzen durch*

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(\omega)}\frac{d^2\sigma}{dt} = -\frac{g}{L}a - \frac{J^{(\omega)}}{L}\frac{d^2\sigma}{dt^2}, \tag{152}$$

oder durch

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a + V^{(\omega)}gi_\varepsilon = -\frac{g}{L}a + \frac{J^{(\omega)}}{L}gi_\varepsilon. \tag{153}$$

(152) *lehrt zunächst die Einwirkung von Parallelverschiebungen,* (153) *zunächst die von Neigungen in erster Klasse kennen.* Denkt man sich dann in (152) $V^{(\omega)}$ durch $W^{(i_\varepsilon)}$ oder $W^{(\vartheta_\varepsilon)}$, σ durch i_ε oder ϑ_ε und in (153) gi_ε durch Δg_ε ersetzt, so ergeben sich unmittelbar auch die Einwirkungen zweiter Klasse und der Einfluss von Schwereänderungen.

42. *Allgemeine Lösungen der Indikatorgleichung.* Für *Parallelverschiebungen* σ ist

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(\omega)}\frac{d^2\sigma}{dt^2}. \tag{154}$$

Um diese Gleichung allgemein zu lösen, multipliciren wir sie mit $dt \sin 2\pi(t_1 - t)/T$ und integriren zwischen den Grenzen t_0 und t_1. Dann folgt zunächst:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d^2a}{dt^2} \sin 2\pi \frac{t_1 - t}{T} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \int_{t_0}^{t_1} dt\, a \sin 2\pi \frac{t_1 - t}{T} - V^{(\omega)} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d^2\sigma}{dt^2} \sin 2\pi \frac{t_1 - t}{T}. \tag{155}$$

Nun ergiebt sich für eine beliebige Zeitfunktion f mittels partieller Integration:

$$\int_{t_0} dt \frac{d^2f}{dt^2} \sin 2\pi \frac{t_1 - t}{T} = -\left(\frac{df}{dt}\right)_0 \sin 2\pi \frac{t_1 - t_0}{T} + \frac{2\pi}{T}\int_{t_0}^{t_1} dt \frac{df}{dt} \cos 2\pi \frac{t_1 - t}{T}, \tag{156}$$

www.libtool.com.cn

$$(156') \qquad \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{df}{dt} \cos 2\pi \frac{t_1 - t}{T} = f_1 - f_0 \cos 2\pi \frac{t_1 - t_0}{T} - \frac{2\pi}{T} \int_{t_0}^{t_1} dt f \sin 2\pi \frac{t_1 - t}{T}.$$

Verwendet man diese Gleichungen bei immer weiter gehender Umformung von (155), so entstehen folgende Lösungen von (154):

$$(157) \qquad a_1 = a_0 \cos 2\pi \frac{t_1 - t_0}{T} + \frac{T}{2\pi} \left(\frac{da}{dt}\right)_0 \sin 2\pi \frac{t_1 - t_0}{T} - \frac{T}{2\pi} V^{(\omega)} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d^2\sigma}{dt^2} \sin 2\pi \frac{t_1 - t}{T},$$

$$(158) \qquad a_1 = a_0 \cos 2\pi \frac{t_1 - t_0}{T} + \frac{T}{2\pi} \left(\left(\frac{da}{dt}\right)_0 + V^{(\omega)} \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0\right) \sin 2\pi \frac{t_1 - t_0}{T} - V^{(\omega)} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d\sigma}{dt} \cos 2\pi \frac{t_1 - t}{T},$$

$$(159) \qquad a_1 + V^{(\omega)} \sigma_1 = (a_0 + V^{(\omega)} \sigma_0) \cos 2\pi \frac{t_1 - t_0}{T} + \frac{T}{2\pi} \left(\left(\frac{da}{dt}\right)_0 + V^{(\omega)} \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0\right) \sin 2\pi \frac{t_1 - t_0}{T} + \frac{2\pi}{T} V^{(\omega)} \int_{t_0}^{t_1} dt \, \sigma \sin 2\pi \frac{t_1 - t}{T}$$

Für *Neigungsänderungen* gilt:

$$(160) \qquad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a + V^{(\omega)} g \, i_s.$$

Der einzige Unterschied gegenüber (154) besteht darin, dass $-g i_s$ anstelle von $d^2\sigma/dt^2$ getreten ist; so kann denn unter Hinblick auf (157) eine Lösung von (160) sogleich hingeschrieben werden:

$$(161) \qquad a_1 = a_0 \cos 2\pi \frac{t_1 - t_0}{T} + \frac{T}{2\pi} \left(\frac{da}{dt}\right)_0 \sin 2\pi \frac{t_1 - t_0}{T} + \frac{T}{2\pi} V^{(\omega)} g \int_{t_0}^{t_1} dt \, i_s \sin 2\pi \frac{t_1 - t}{T}$$

$$= a_0 \cos 2\pi \frac{t_1 - t_0}{T} + \frac{T}{2\pi} \left(\frac{da}{dt}\right)_0 \sin 2\pi \frac{t_1 - t_0}{T} + \frac{2\pi}{T} J^{(\omega)} \int_{t_0}^{t_1} dt \, i_s \sin 2\pi \frac{t_1 - t}{T}.$$

Für Zeitintervalle, welche gegenüber der Schwingungsdauer T hinreichend kurz sind, liefert (159) bei beliebig grossen Parallelverschiebungen:

$$(162) \qquad a_1 - a_0 = -V^{(\omega)}(\sigma_1 - \sigma_0), \quad \left(\frac{da}{dt}\right)_1 - \left(\frac{da}{dt}\right)_0 = -V^{(\omega)}\left(\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1 - \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0\right),$$

und bestätigt damit den uns schon bekannten Satz, dass $-V^{(\omega)}$ die Vergrösserung sehr schneller Parallelverschiebungen angiebt. Für sehr schnelle Neigungsänderungen ist nach (161):

$$(162') \qquad a_1 - a_0 = 0, \quad \left(\frac{da}{dt}\right)_1 - \left(\frac{da}{dt}\right)_0 = 0.$$

www.libtool.com.cn

Schnellen Neigungsänderungen folgt der Indikator also nicht unmittelbar. Dies gilt aber nur, wenn wir uns auf die Glieder erster Klasse beschränken. Das Glied zweiter Klasse $-W^{(i_s)}\,d^2i_s/dt^2$ ergäbe:

$$a_1 - a_0 = -W^{(i_s)}((i_s)_1 - (i_s)_0). \tag{162''}$$

43. *Periodische Parallelverschiebungen.* In der Einleitung wurde erwähnt, dass bei den Erdbebenbewegungen und den seismischen Störungen infolge des Brandens von Meereswogen vielfach Wellenzüge mit regelmässigen Sinusschwingungen bemerkbar sind. So müssen wir denn auch hier, wie schon öfters bei früheren Gelegenheiten, die Sinusschwingungen besonders berücksichtigen. Für Parallelverschiebungen ist

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(\omega)}\frac{d^2\sigma}{dt^2} = -\frac{g}{L}a - \frac{J^{(\omega)}}{L}\frac{d^2\sigma}{dt^2}. \tag{163}$$

Der Satz der Superposition erlaubt, Schwingungen einer bestimmten Periode herauszulösen und für sich zu betrachten. So setzen wir denn

$$\sigma = S_\sigma \sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} + C_\sigma \cos 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} \tag{164}$$

oder

$$\sigma = \sqrt{S_\sigma^2 + C_\sigma^2}\,\sin 2\pi\frac{t+\delta_\sigma}{\mathrm{T}};\ tg\,2\pi\frac{\delta_\sigma}{\mathrm{T}} = \frac{C_\sigma}{S_\sigma}. \tag{164'}$$

$\sqrt{S_\sigma^2 + C_\sigma^2}$ bezeichnet dann die Maximalamplitude, $2\sqrt{S_\sigma^2 + C_\sigma^2}$ den Schwingungsbereich, T die Periode der Störungen.

Es ist klar, dass das Gehänge des Seismographen und damit der Indikator ausser etwaigen Eigenschwingungen ebenfalls Schwingungen der Periode T ausführen wird. Von den beigemischten Eigenschwingungen soll vorläufig abgesehen werden; für a müssen dann analoge Formeln wie (164), (164') gelten, die Konstanten seien S_a, C_a, δ_a. Durch passende Verfügung über den Anfangspunkt der Zeitskala haben wir es ganz in unserer Hand einer der Grössen δ_σ, δ_a einen beliebigen Wert zu ertheilen; hieraus Nutzen ziehend setzen wir $\delta_a = 0$ und erhalten dann

$$a = S_a \sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}. \tag{165}$$

Unsere Bevorzugung von a entspricht genau dem Bedürfniss der Praxis, denn in dieser wird das Indikatordiagramm in der Regel das zunächst Gegebene sein.

Die Annahme (164) und (165) über σ und a führen die Indikatorgleichung (163) über in

$$\left\{S_a\left(\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\right)^2\right) - V^{(\omega)}S_\sigma\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\right)^2\right\}\sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} - V^{(\omega)}C_\sigma\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\right)^2\cos 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} = 0,$$

www.libtool.com.cn

und ergeben daher, da t beliebig ist:

$$S_\sigma = -\frac{S_\sigma}{V^{(\omega)}}\frac{T^2-\mathrm{T}^2}{T^2}, \quad C_\sigma = 0. \tag{166}$$

Die *Vergrösserung von Parallelverschiebungsschwingungen der Periode* T *im Indikatordiagramm* ist hiernach

$$\mathfrak{B}_\mathrm{T}^{(\omega)} = \frac{\sqrt{S_\sigma^2+C_\sigma^2}}{\sqrt{S_\sigma^2+C_\sigma^2}} = -V^{(\omega)}\frac{T^2}{T^2-\mathrm{T}^2} = -V^{(\omega)}\frac{L}{L-\Lambda} = -\frac{J^{(\omega)}}{L-\Lambda}. \tag{167}$$

Wie L die zu T, so ist hier Λ die zu T gehörige äquivalente Pendellänge.

Für sehr kurze Perioden T *nimmt die Vergrösserung* $\mathfrak{B}_\mathrm{T}^{(\omega)}$ *den Werth*

$$\mathfrak{B}_0^{(\omega)} = -V^{(\omega)} = -\frac{J^{(\omega)}}{L} \tag{168}$$

an, was nach der uns bekannten Bedeutung von $V^{(\omega)}$ für schnelle Parallelverschiebungen von vorne herein zu erwarten war. *Für sehr lange Perioden andererseits darf*

$$\mathfrak{B}_\mathrm{T}^{(\omega)} = V^{(\omega)}\frac{T^2}{\mathrm{T}^2} = V^{(\omega)}\frac{L}{\Lambda} = \frac{J^{(\omega)}}{\Lambda} \tag{169}$$

gesetzt werden. Bis zum Werthe $\mathrm{T} = T$ nimmt die Vergrösserung numerisch zu, dann numerisch ab; für $\mathrm{T} = T$, wenn also die Schwingungsperiode mit der Eigenperiode des Seismographen zusammenfällt, ergiebt sich eine unendliche Vergrösserung. Das ist praktisch eine Unmöglichkeit; was in Wirklichkeit tritt, werden wir sogleich erkennen, wenn wir nun daran gehen, auch die *bei dem Einsatz der Sinusschwingungen erregten Eigenschwingungen* zu berücksichtigen.

44. *Begleitende Eigenschwingungen.* Die etwa vorher schon vorhandenen Eigenschwingungen können bei Seite gelassen werden, da sie sich nach dem Satz der Superposition späterhin ohne Veränderung überlagern würden. So soll denn angenommen werden, dass die Seismograph bis zum Eintreffen der Sinusschwingungen in Ruhe gewesen sei. Eine besondere Schwierigkeit bietet die Feststellung der Art des Einsatzes, der ja auf die mannigfachste Weise vorsichgehen kann. Da es hier unnöthig scheint, die Untersuchung weit auszuspinnen, wollen wir uns mit der einfachsten Annahme eines *plötzlichen Einsatzes* bei beliebiger Phase begnügen.

Der Einsatz finde zur Zeit $t = t_0$ statt. Weiterhin sei

$$\sigma = S_\sigma \sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}. \tag{170}$$

Dann muss zur Zeit $t = t_0$ die Ausweichung σ plötzlich den Werth σ_0 und die Verschiebungsgeschwindigkeit plötzlich den Werth $(d\sigma/dt)_0$ annehmen. Nach den Schlussbemerkungen des Artikels 42 erhalten dabei a und da/dt für die folgenden Bewegungen die Anfangswerthe $a_0 = -V^{(\omega)}\sigma_0$, $(da/dt)_0 = -V^{(\omega)}(d\sigma/dt)_0$. Benutzen

www.libtool.com.cn

wir die allgemeine Lösung (159), so gilt darum fernerhin:

$$a_1 = -V^{(a)}\sigma_1 + \frac{2\pi}{T}V^{(a)}\int_{t_0}^{t_1} dt\,\sigma \sin 2\pi\frac{t_1-t}{T}. \tag{171}$$

Eine im Anschluss hieran geführte Rechnung giebt unter Rücksicht auf (166) ohne Schwierigkeiten:

$$a = S_a \sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} - \frac{\mathrm{T}}{T}S_a\cos 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}\sin 2\pi\frac{t-t_0}{T} - \left(\frac{\mathrm{T}}{T}\right)^2 S_a \sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}\cos 2\pi\frac{t-t_0}{T}; \tag{172}$$

es wurde hierbei, da Verwechselungen ausgeschlossen sind, t_1 durch t ersetzt und demgemäss der Index 1 bis a fortgelassen. — Die beiden letzten Glieder zeigen die erregten Eigenschwingungen; die Amplitude ergiebt sich durch Wurzelziehen aus der Summe der Quadrate der Faktoren von $\sin 2\pi(t-t_0)/T$ und $\cos 2\pi(t-t_0)/T$ zu:

$$S_a' = \frac{\mathrm{T}}{T}S_a\sqrt{\left(\frac{\mathrm{T}}{T}\right)^2\sin^2 2\pi\frac{t_0}{\mathrm{T}} + \cos^2 2\pi\frac{t_0}{\mathrm{T}}} = \frac{\mathrm{T}}{T}S_a\sqrt{\left(\left(\frac{\mathrm{T}}{T}\right)^2 - 1\right)\sin^2 2\pi\frac{t_0}{\mathrm{T}} + 1}. \tag{173}$$

Die letzte Darstellung lehrt, dass die grösste und die kleinste Amplitude, welche die erregten Eigenschwingungen zeigen können, durch

$$\frac{\mathrm{T}}{T}S_a \text{ und } \left(\frac{\mathrm{T}}{T}\right)^2 S_a$$

angegeben werden. *Für seismische Schwingungen von kleinerer Periode als die der Eigenschwingungen* ($\mathrm{T} < T$), *haben also die erregten Eigenschwingungen kleinere Amplituden wie die erzwungenen Schwingungen der Periode* T, *für Schwingungen von grösserer Periode* ($\mathrm{T} > T$) *dagegen grössere Amplituden.* Geht die Periode der seismischen Schwingungen in die der Eigenschwingungen über, so wird die Amplitude der erregten Eigenschwingungen gleich der der erzwungenen Schwingungen. —

Besonderes Interesse erweckt die Wirkung seismischer Schwingungen, deren Periode nahe oder genau gleich der der Eigenschwingungen ist. Nach der eben hingeschriebenen Folgerung muss der Indikator dann gleichzeitig Schwingungen der beiden Perioden T und T von nahe gleicher Amplitude ausführen. Hieraus folgt, dass das Diagramm *Schwebungen* zeigen wird, indem die Amplitude von Zeit zu Zeit nahezu auf Null herabsinken, und dazwischen Maxima von nahezu der Grösse $2S_a$ erreichen muss. Die Zeit Θ von einem Minimum zum nächsten wird bestimmt durch die Zeit, in welcher die eine Periode gegenüber der anderen gerade eine volle Schwingung mehr oder weniger ergiebt. Es ist also:

$$\frac{\Theta}{\mathrm{T}} - \frac{\Theta}{T} = \pm 1;\quad \Theta = \pm\frac{T\mathrm{T}}{T-\mathrm{T}}. \tag{174}$$

www.libtool.com.cn

Da beim Einsatz der seismischen Störung der Indikator zunächst kleine Schwingungen vollführt, so folgt, dass er mit einem Minimum der Amplitude beginnt, um dann in der Zeit

$$\tfrac{1}{2}\Theta = \pm\tfrac{1}{2}\frac{T\mathrm{T}}{T-\mathrm{T}}$$

das erste Maximum (von nahe der Grösse $2S_a$) erreichen. Ist $\mathrm{T} = T$, so geht das Anwachsen der Rechnung nach ins Unendliche, in Wirklichkeit so weit, als es dem Bau des Instrumentes und die Genauigkeit der bei der Berechnung zu Grunde gelegten Indikatorgleichung entspricht. — Wie schnell das Anwachsen erfolgt, erfahren wir für $\mathrm{T} = T$ mittels (171) oder (172), denn diese Gleichungen ergeben für $\mathrm{T} = T$:

$$(175)\quad \left\{\begin{aligned} a = &-\tfrac{1}{2}V^{(\omega)}S_a\cos 2\pi\frac{t_0}{T}\sin 2\pi\frac{t-t_0}{T} - V^{(\omega)}S_a\sin 2\pi\frac{t_0}{T}\cos 2\pi\frac{t-t_0}{T}\\ &- V^{(\omega)}S_a\frac{\pi(t-t_0)}{T}\cos 2\pi\frac{t}{T}.\end{aligned}\right.$$

Das Anwachsen der Amplitude wird durch das letzte Glied rechts dargestellt; *die Zunahme innerhalb einer Periode T beträgt danach:*

$$V^{(\omega)}S_a\pi,$$

also nahe dreimal so viel, als der einfachen Indikatorvergrösserung $V^{(\omega)}$ als Endwerth entsprechen würde. Das gleiche Resultat gilt auch für Perioden T, welche der Eigenperiode nur nahezu gleich sind, und bei beliebiger Art des Einsatzes der Störungen. *Wir erkennen hiernach, dass wenige seismische Schwingungen in einer der Eigenperiode benachbarten Periode hinreichen, um dem Indikator eine gegenüber $V^{(\omega)}$ vielfach vergrösserte Amplitude zu ertheilen.*

45. *Periodische Neigungen.* Bei Untersuchung des Einflusses periodischer Neigungen werden wir ganz ähnlich vorgehen, wie in den beiden letzten Artikeln. Hier ist

$$(176)\qquad \frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a + V^{(\omega)}gi_s = -\frac{g}{L}a + \frac{J^{(\omega)}}{L}gi_s$$

und

$$(177)\qquad i_s = S_s\sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} + C_s\cos 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}$$

zu setzen. Wird zu (177) unter passender Verfügung über den Anfangspunkt der Zeit

$$(178)\qquad a = S_a\sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}$$

hinzugenommen, so liefert (176):

$$(179)\qquad S_s = -\frac{S_a}{J^{(\omega)}}\frac{T^2-\mathrm{T}^2}{\mathrm{T}^2} = -\frac{S_a}{J^{(\omega)}}\frac{L-\Lambda}{\Lambda};\quad C_s = 0.$$

www.libtool.com.cn

$$(180) \qquad S_s = \mathfrak{V}_T^{(\omega)} S_i, \quad \mathfrak{V}_T^{(\omega)} = -J^{(\omega)} \frac{T^2}{T^2 - T^2} = -J^{(\omega)} \frac{\Lambda}{L - \Lambda}.$$

Für sehr langsame Neigungsschwingungen erscheint hiernach die Empfindlichkeit $\mathfrak{V}_T^{(\omega)}$, wie zu erwarten, $= J^{(\omega)}$, für sehr schnelle Schwingungen ist sie $= -J^{(\omega)}\Lambda/L = -V^{(\omega)}\Lambda$. — Bis herauf zum Werthe $T = T$ nimmt die Empfindlichkeit numerisch zu, dann ab; für $T = T$ wird sie unendlich gross.

Bei einem *plötzlichen Einsatz* der Neigungsschwingungen zur Zeit $t = t_0$ sind hier als Anfangswerthe für a, da/dt einfacher wie vorhin $a_0 = 0$, $(da/dt)_0 = 0$ zu setzen, so ergiebt (161):

$$(181) \quad a = S_s \sin 2\pi \frac{t}{T} - \frac{T}{T} S_s \cos 2\pi \frac{t_0}{T} \sin 2\pi \frac{t - t_0}{T} - S_s \sin 2\pi \frac{t_0}{T} \cos 2\pi \frac{t - t_0}{T}.$$

Die Amplitude der erregten Eigenschwingungen ist hiernach

$$(182) \quad S_s' = \frac{T}{T} S_s \sqrt{\left(\frac{T}{T}\right)^2 \sin^2 2\pi \frac{t_0}{T} + \cos^2 2\pi \frac{t_0}{T}} = \frac{T}{T} S_s \sqrt{\left(\left(\frac{T}{T}\right)^2 - 1\right) \sin^2 2\pi \frac{t_0}{T} + 1}.$$

Die grösste und die kleinste mögliche Amplitude werden durch

$$S_s \text{ und } \frac{T}{T} S_s$$

angegeben. Die erregten Eigenschwingungen haben also umgekehrt wie bei den Parallelverschiebungen eine grössere oder kleinere Amplitude als die erzwungenen Schwingungen der Periode T, jenachdem T kleiner oder grösser ist als T. Für $T = T'$ werden die Amplituden wiederum einander gleich. —

Die vorhin gefundenen Schwebungen bei Perioden T, die nahe an der Eigenperiode des Seismographen liegen, treten auch hier in der gleichen Weise auf. Im Falle T nahe $= T$ ist ergiebt sich zunächst nach dem Einsatze für die Amplitude innerhalb jeder Periode T eine Zunahme um

$$J^{(\omega)} S_i \pi.$$

§ 6. Einwirkung der Dämpfung.

46. *Indikatorgleichung.* Bis hierher wurde zur Vereinfachung der Untersuchungen stets angenommen, dass die innere Bewegung des Seismographen ohne jede Hemmung erfolge. Einmal bestehende Schwingungen müssten dann unendlich lange andauern und sich so allen weiterhin durch seismische Störungen und Schwereänderungen erregten Bewegungen unverändert überlagern. In Wirklichkeit trifft das nicht zu; stets treten Bewegungshindernisse mannigfacher Art auf,

www.libtool.com.cn

welche die Wirkung vergangener Zeiten mehr und mehr vermindern und schliesslich unmerklich machen. Es ist ohne Weiteres klar, dass hierin für die Seismographen nicht nur kein Nachtheil, sondern sogar ein Vortheil liegt, und es entsteht so für uns die Aufgabe, die Bewegungshemmnisse zu studiren, um festzustellen, wie sie bei der Verwerthung der Diagramme zu berücksichtigen sind, und in welcher Art und Stärke sie wünschenswerth erscheinen. Von einfachen Anschlägen, die den Bewegungsbereich des Gehänges begrenzen, werden wir, als etwas Aeusserliches, absehen können.

Für die Praxis sind zwei Klassen von Bewegungswiderständen sehr scharf zu unterscheiden. Bei der einen vermehrt und vermindert sich der Bewegungswiderstand in bedeutendem Masse mit der Geschwindigkeit der Bewegung, und sinkt mit dieser zu Null herab. Bei der anderen ist der Widerstand in der Hauptsache von der Geschwindigkeit unabhängig und bleibt selbst im Ruhezustande bestehen. Die erste Klasse der Widerstände wird vor allem durch die Zähigkeit der Flüssigkeiten und Gase geboten, die zweite Klasse durch die Reibung fester Körper aufeinander. Wir wollen die Hemmung der Bewegung im ersten Falle als *„Dämpfung"* bezeichnen, und wollen im zweiten Falle sagen, sie sei durch *„Reibung"* verursacht. Es wird sich zeigen, dass die Dämpfung sehr nützlich ist, weil sie die Nachwirkung seismischer Störungen beschränkt, dass die Reibung dagegen ungünstig ist, weil sie starken Störungen gegenüber ungenügend wirkt, und die Aufzeichnungen schwacher Störungen in unliebsamer Weise beeinträchtigt.

In diesem Paragraphen soll zunächst der Einfluss der Dämpfung untersucht werden. *Wir werden dabei den Widerstand gegen die Bewegung von dem Ausschlag unabhängig und mit der Geschwindigkeit proportional setzen.* Wenn die Zähigkeit der tropfbaren oder gasförmigen Flüssigkeiten, oder die elektromagnetische Dämpfung benutzt wird, lässt sich dieses Gesetz bei zweckmässiger Konstruktion sehr leicht mit jeder wünschenswerthen Schärfe realisieren. Für die Praxis kommen wohl nur diese Fälle in Betracht, sodass unsere Annahme ihren Bedürfnissen gerecht wird. —

Bei der Aufstellung der Indikatorgleichung ist es genügend, wenn wir uns auf die Voraussetzung eines Freiheitsgrades beschränken, denn wiederum und in gleicher Weise wie früher lässt sich der Fall mehrerer Freiheitsgrade auf den eines einzigen zurückführen.

Wir knüpfen an die Ueberlegungen des Artikels 33. $Q^{(D)}$ sei die Resultante der dämpfenden Kräfte in Bezug auf den Indikator, dann ist nach der gemachten Annahme zu schreiben

$$Q^{(D)} = -\varphi \frac{da}{dt}, \tag{183}$$

wobei φ eine gewisse Konstante bedeutet. Anstelle der bisher benutzten Indikatorgleichung tritt hiernach

www.libtool.com.cn

$$(184)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2a}{dt^2} &= -\frac{f}{m}a-\frac{\varphi}{m}\frac{da}{dt}-V^{(a)}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}-gi_x-\Delta g_x\right)-V^{(y)}\left(\frac{d^2\eta}{dt^2}-gi_y-\Delta g_y\right)\\ &\quad -V^{(z)}\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\Delta g_z\right)-W^{(i_x)}\frac{d^2i_x}{dt^2}-W^{(i_y)}\frac{d^2i_y}{dt^2}-W^{(\vartheta_z)}\frac{d^2\vartheta_z}{dt^2}. \end{aligned}\right.$$

Das zweite Glied rechts bildet den einzigen Unterschied gegen früher. Im Falle eines einfachen Pendels ist wiederum

$$\frac{f}{m}=\frac{g}{L},\ J=VL.$$

So wollen wir denn auch wieder L die *„äquivalente Pendellänge"* nennen und die übrigen sich anschliessenden Beziehungen für V, J, $V^{(a)}$, $J^{(a)}$ beibehalten (vergl. z. B. Art. 40). Dass $J^{(a)}$, $J^{(\varphi)}$ wie bisher die statischen Empfindlichkeiten gegen Neigungsänderungen angeben, und $gJ^{(a)}$ die Empfindlichkeit gegen Schwereänderungen in der Richtung s bedeutet, ist aus (184) sogleich ersichtlich. Nicht so unmittelbar erkennbar ist, ob $V^{(a)}$, $V^{(\varphi)}$, $V^{(z)}$, $W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$, $W^{(\vartheta_z)}$ negativ genommen ihre Bedeutungen als Vergrösserungen sehr schneller Parallelverschiebungen, Neigungen und Drehungen um die Vertikale beibehalten, doch werden wir bald erfahren, dass auch dieses zutrifft. Die Entwickelungen des Artikels 36 über den Einfluss der Aufstellung auf die Koefficienten bleiben gültig, sodass auch der Vergleich mit einem Seismographen punktförmiger Masse wie früher vorgenommen werden kann, und der gemeinsamen Richtung von V und J wieder der Name *„äquivalente Schwingungsrichtung"* zukommt. —

Nur in einem wesentlichen Punkte finden wir gegen früher ein anderes Verhalten: Die Schwingungsperiode T wird nicht mehr durch die früheren Beziehungen mit f und L verbunden.

47. *Eigenbewegungen.* Es hängt dies mit dem Einfluss der Dämpfung auf die Eigenbewegungen zusammen, den wir nun näher untersuchen wollen. Bei Abwesenheit äusserer Störungen gilt die Gleichung:

$$(185)\qquad \frac{d^2a}{dt^2}=-\frac{f}{m}a-\frac{\varphi}{m}\frac{da}{dt}.$$

Ihre Lösung ergiebt sich in

$$(186)\qquad a=Ae^{-\frac{t}{\tau}}\sin 2\pi\frac{t+\delta}{T}=e^{-\frac{t}{\tau}}\left(S\sin 2\pi\frac{t}{T}+C\cos 2\pi\frac{t}{T}\right),$$

wobei e die Basis des natürlichen Logarithmensystemes, also die Zahl 2,71828... ist, und A, δ, S, C, T, τ Konstanten darstellen. A, δ bezüglich S, C bleiben willkürlich und entsprechen der Unbestimmtheit des Anfangszustandes. T und τ sind durch f, φ, m festbestimmt:

$$187)\qquad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=\frac{f}{m}-\left(\frac{\varphi}{2m}\right)^2,\quad \tau=\frac{2m}{\varphi}$$

www.libtool.com.cn

und zwar ist T die *Schwingungsperiode* — also $T/2$ die *Schwingungsdauer* — und τ die *„Relaxationszeit"*, d. h. diejenige Zeit, in welcher die Amplitude der Schwingungen auf $1/e$ des Werthes herabsinkt. — Ich habe bei diesen Angaben vorausgesetzt, dass mf grösser als $(\varphi/2)^2$, und demgemäss T reel sei. Wie die Verhältnisse sich ändern, wenn dieses nicht der Fall ist, wird sogleich besprochen werden.

Bei ausgeschalteter Dämpfung, also für $\varphi = 0$, $\tau = \infty$ ergäbe sich eine Schwingungsdauer T_0 bestimmt durch:

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{f}{m} = \frac{g}{L}. \tag{188}$$

Wir wollen T_0 die *„reducirte Schwingungsperiode"*, $T_0/2$ die *„reducirte Schwingungsdauer"* nennen. Werden T_0 und τ verwerthet, so wandelt sich (185) um in:

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau}\frac{da}{dt}, \tag{189}$$

wobei dann die reducirte Schwingungsdauer T_0 die Intensität der inneren Kräfte des Seismographen und die Relaxationszeit τ die Intensität der Dämpfung charakterisirt. Zur Bestimmung der Schwingungsperiode ergiebt (187) mittels (188) die Beziehung:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 - \frac{1}{\tau^2}, \tag{190}$$

sodass

$$T = T_0 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2}}, \quad T_0 = T \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{T}{2\pi\tau}\right)^2}} \tag{191}$$

ist.

Das Verhältniss zweier grösster Ausweichungen, die unmittelbar aufeinander folgen — also auf verschiedenen Seiten der Ruhelage liegen —, heisst *„Dämpfungsverhältniss"*; einfache Rechnungen im Anschluss an (186) ergeben die Beziehung:

$$\text{Dämpfungsverhältniss} = 1 : e^{-\frac{T}{2\tau}} = e^{\frac{T}{2\tau}} : 1. \tag{192}$$

Das Verhältniss zweier aufeinander folgender im gleichen Sinne durchlaufener Schwingungsbögen — jeder gemessen von einer grössten Ausweichung bis zur nächsten auf der anderen Seite der Ruhelage — ist hiernach

$$= 1 : \left(e^{-T/2\tau}\right)^2 = 1 : e^{-T/\tau} = e^{T/\tau} : 1.$$

Die Formel (186) ist zur Darstellung der Eigenschwingungen nur dann

www.libtool.com.cn

bequem, wenn

$$\tau > \frac{T_0}{2\pi} \tag{193}$$

ist, d. h. wenn die Schwingungsperiode T einen reellen Werth hat. Andernfalls, wenn

$$\tau < \frac{T_0}{2\pi} \tag{194}$$

ist, empfiehlt es sich, (186) durch

$$a = A_1 e^{-\frac{t}{\tau_1'}} + A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2'}} \tag{195}$$

zu ersetzen, wo dann A_1, A_2 die willkürlichen Konstanten sind, welche den Anfangszustand, nämlich die Anfangswerthe von a und da/dt bestimmen. τ_1' und τ_2' sollen weiterhin *„Dämpfungszeiten"* genannt werden. Sie ergeben sich durch Einsetzen von (195) in (189) als Wurzeln der Gleichung:

$$\left(\frac{1}{\tau'}\right)^2 - \frac{2}{\tau}\frac{1}{\tau'} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 0, \tag{196}$$

sodass

$$\frac{1}{\tau_1'} = \frac{1}{\tau}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi\tau}{T_0}\right)^2}\right), \quad \frac{1}{\tau_2'} = \frac{1}{\tau}\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi\tau}{T_0}\right)^2}\right) \tag{197}$$

gesetzt werden darf. Dabei ist

$$\tau_1'\tau_2' = \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2. \tag{198}$$

Für den Fall (194) werden τ_1' und τ_2' reell, wobei

$$\tau_2' < \tau < \frac{T_0}{2\pi} < \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\tau} < \tau_1', \tag{199}$$

und es folgt nach (195), dass die Eigenbewegungen aperiodisch werden. Auch im Grenzfall:

$$\tau = \frac{T_0}{2\pi} \tag{200}$$

finden wir schon aperiodische Bewegung, denn die Schwingungsperiode T wird dann nach (191) unendlich gross. Für die Darstellung der Eigenbewegungen bietet sich die aus (186) durch Grenzübergang folgende Gleichung:

$$a = e^{-\frac{t}{\tau}}(S't + C) \tag{201}$$

mit den willkürlichen Konstanten S' und C.

www.libtool.com.cn

48. *Gesetze der Superposition; allgemeine Lösungen der Indikatorgleichung.* Unter Benutzung der charakteristischen Zeiten T und τ nimmt die *Indikatorgleichung* nun die Form an:

$$(202)\quad \begin{cases} a = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau}\frac{da}{dt} - V^{(\alpha)}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - gi_\alpha - \Delta g_\alpha\right) - V^{(\gamma)}\left(\frac{d^2\eta}{dt^2} - gi_\gamma - \Delta g_\gamma\right) \\ \qquad - V^{(\varepsilon)}\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \Delta g_\varepsilon\right) - W^{(i_\alpha)}\frac{d^2 i_\alpha}{dt^2} - W^{(i_\gamma)}\frac{d^2 i_\gamma}{dt^2} - W^{(\vartheta_\varepsilon)}\frac{d^2\vartheta_\varepsilon}{dt^2} \\ = -\frac{g}{L}a - \frac{2}{\tau}\frac{da}{dt} - \frac{J^{(\alpha)}}{L}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - gi_\alpha - \Delta g_\alpha\right) - \frac{J^{(\gamma)}}{L}\left(\frac{d^2\eta}{dt^2} - gi_\gamma - \Delta g_\gamma\right) \\ \qquad - \frac{J^{(\varepsilon)}}{L}\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \Delta g_\varepsilon\right) - W^{(i_\alpha)}\frac{d^2 i_\alpha}{dt^2} - W^{(i_\gamma)}\frac{d^2 i_\gamma}{dt^2} - W^{(\vartheta_\varepsilon)}\frac{d^2\vartheta_\varepsilon}{dt^2}. \end{cases}$$

Das Neue gegen früher ist das Dämpfungsglied $-(2/\tau)(da/dt)$; daneben muss beachtet werden, dass T_0 nun nicht mehr die Schwingungsperiode bezeichnet.

Alle im Artikel 41 festgestellten Gesetze der Superposition bleiben auch für (202), also bei Mitwirkung der Dämpfung gültig, sodass wir den ganzen Inhalt jenes Artikel hier übernehmen können. Wir werden später erkennen, dass dieses bei der gewöhnlichen Reibung nicht ebenso ist, und sich so für die Dämpfung ein sehr grosser Vortheil ergiebt.

Mit Rücksicht auf die Superposition der Störungswirkungen ist es auch jetzt nicht nöthig, beim Aufsuchen der allgemeinen Lösungen der Indikatorgleichung alle Störungsglieder gleichzeitig zu berücksichtigen, sondern hinreichend, ihre Wirkung einzeln festzustellen. Wiederum genügen die beiden Beispiele:

$$(203)\quad \frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau}\frac{da}{dt} - V^{(\alpha)}\frac{d^2\sigma}{dt^2},$$

$$(204)\quad \frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau}\frac{da}{dt} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 J^{(\alpha)} i_\alpha,$$

von denen sich das erste auf Parallelverschiebungen, das zweite auf Neigungsänderungen bezieht.

I. *Parallelverschiebungen.* Multiplicirt man (203) mit

$$\frac{T}{2\pi}\,dt\,e^{-\frac{t_1-t}{\tau}}\sin 2\pi\frac{t_1-t}{T}$$

und integrirt von t_0 bis t_1, so ergiebt sich mittels ähnlicher, wenn auch komplicirterer Rechnungen wie in Artikel 42 unter Rücksicht auf (190) als *allgemeine Lösung*:

www.libtool.com.cn

$$(205)\quad \begin{cases} a_1 = a_0 e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} \cos 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} + \frac{T}{2\pi\tau} a_0 e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} \sin 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} \\ \quad + \frac{T}{2\pi}\left(\frac{da}{dt}\right)_0 e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} \sin 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} - \frac{T}{2\pi} V^{(\omega)} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d^2\sigma}{dt^2} e^{-\frac{t_1-t}{\tau}} \sin 2\pi \frac{t_1-t}{T} \end{cases}$$

oder auch:

$$(206)\quad \begin{cases} a_1 + V^{(\omega)}\sigma_1 = (a_0 + V^{(\omega)}\sigma_0) e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} \cos 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} + \frac{T}{2\pi\tau}(a_0 + V^{(\omega)}\sigma_0) e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} \sin 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} \\ \quad - 2\frac{T}{2\pi\tau} V^{(\omega)}\sigma_0 e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} \sin 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} + \frac{T}{2\pi}\left(\left(\frac{da}{dt}\right)_0 + V^{(\omega)}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0\right) e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} \sin 2\pi \frac{t_1-t}{T} \\ \quad + \frac{2\pi}{T_0}\frac{T}{T_0}\left(1 - 2\left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2\right) V^{(\omega)} \int_{t_0}^{t_1} dt\, \sigma\, e^{-\frac{t_1-t}{\tau}} \sin 2\pi \frac{t_1-t}{T} + \frac{2}{\tau} V^{(\omega)} \int_{t_0}^{t_1} dt\, \sigma\, e^{-\frac{t_1-t}{\tau}} \cos 2\pi \frac{t_1-t}{T}. \end{cases}$$

Diese Formeln empfehlen sich bei *periodischen Einzelbewegungen*, also für den Fall:

$$(207)\qquad \tau > \frac{T_0}{2\pi},\ T \text{ reel und endlich.}$$

Im *Grenzfall der Aperiodicität*:

$$(208)\qquad \tau = \frac{T_0}{2\pi},\ T = \infty$$

sind sie zu ersetzen durch

$$(209)\quad a_1 = a_0\left(1 + \frac{t_1-t_0}{\tau}\right) e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} + \left(\frac{da}{dt}\right)_0 (t_1-t_0) e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} - V^{(\omega)} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d^2\sigma}{dt^2} (t_1-t) e^{-\frac{t_1-t}{\tau}}$$

$$(210)\quad a_1 + V^{(\omega)}\sigma_1 = (a_0 + V^{(\omega)}\sigma_0)\left(1 + \frac{t_1-t_0}{\tau}\right) e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} - 2V^{(\omega)}\sigma_0 \frac{t_1-t_0}{\tau} e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}}$$
$$+ \left(\left(\frac{da}{dt}\right)_0 + V^{(\omega)}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0\right)(t_1-t_0) e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} + \frac{2\pi}{T_0} V^{(\omega)} \int_{t_0}^{t_1} dt\, \sigma \left(2 - \frac{t_1-t}{\tau}\right) e^{-\frac{t_1-t}{\tau}}.$$

In den übrigen Fällen *aperiodischer Bewegung*:

$$(211)\qquad \tau < \frac{T_0}{2\pi},\ T \text{ rein imaginär,}$$

www.libtool.com.cn

erhalten wir zweckmässigere Formen, wenn berücksichtigt wird, dass:

$$(212)\quad \begin{cases} e^{-\frac{t_1-t}{\tau}}\cos 2\pi\frac{t_1-t}{T} = \frac{1}{2}e^{-(t_1-t)\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{2\pi\tau i}{T}\right)}+\frac{1}{2}e^{-(t_1-t)\frac{1}{\tau}\left(1+\frac{2\pi\tau i}{T}\right)} \\ \qquad\qquad = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{t_1-t}{\tau_1'}}+e^{-\frac{t_1-t}{\tau_2'}}\right), \\ e^{-\frac{t_1-t}{\tau}}\sin 2\pi\frac{t_1-t}{T} = \frac{1}{2i}e^{-(t_1-t)\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{2\pi\tau i}{T}\right)}-\frac{1}{2i}e^{-(t_1-t)\frac{1}{\tau}\left(1+\frac{2\pi\tau i}{T}\right)} \\ \qquad\qquad = \frac{1}{2i}\left(e^{-\frac{t_1-t}{\tau_1'}}-e^{-\frac{t_1-t}{\tau_2'}}\right) \end{cases}$$

ist; es ergiebt sich:

$$(213)\quad \begin{cases} a_1 = a_0\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_1'}}+e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_2'}}\right)+a_0\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\pi\tau}{T_0}\right)^2}}\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_1'}}-e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_2'}}\right) \\ \qquad +\frac{\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{2\pi\tau}{T_0}\right)^2}}\left(\frac{da}{dt}\right)_0\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_1'}}-e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_2'}}\right) \\ \qquad -\frac{\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{2\pi\tau}{T_0}\right)^2}}V^{(\omega)}\int_{t_0}^{t_1}dt\frac{d^2\sigma}{dt^2}\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{t_1-t}{\tau_1'}}-e^{-\frac{t_1-t}{\tau_2'}}\right); \end{cases}$$

$$(214)\quad \begin{cases} a_1+V^{\omega}\sigma_1 = (a_0+V^{(\omega)}\sigma_0)\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_1'}}+e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_2'}}\right)+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\pi\tau}{T_0}\right)^2}}(a_0+V^{(\omega)}\sigma_0)\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_1'}}-e^{-\frac{t_1-t^0}{\tau_2'}}\right) \\ \qquad -\frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{2\pi\tau}{T_0}\right)^2}}V^{(\omega)}\sigma_0\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_1'}}-e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_2'}}\right)+\frac{\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{2\pi\tau}{T_0}\right)^2}}\left(\left(\frac{da}{dt}\right)_0+V^{(\omega)}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0\right)\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{t^1-t_0}{\tau_1'}}-e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_2'}}\right) \\ \qquad -\frac{1}{\tau}\frac{2-\left(\frac{2\pi\tau}{T_0}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{2\pi\tau}{T_0}\right)^2}}V^{(\omega)}\int_{t_0}^{t_1}dt\,\sigma\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{t_1-t}{\tau_1'}}-e^{-\frac{t_1-t}{\tau_2'}}\right)+\frac{2}{\tau}V^{(\omega)}\int_{t_0}^{t_1}dt\,\sigma\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{t_1-t}{\tau_1'}}+e^{-\frac{t_1-t}{\tau_2'}}\right). \end{cases}$$

www.libtool.com.cn

II *Neigungsänderungen.* Die allgemeinen Lösungen der Gleichung (204), welche für Neigungsänderungen gilt, noch besonders hinzuschreiben, scheint unnöthig, denn sie ergeben sich in einfachster Weise aus (205), (209) und (213), wenn man dem Vergleiche von (203) und (204) entsprechend $V^{(\omega)}$ durch $-(2\pi/T_0)^2\, J^{(\omega)}$ und $d^2\sigma/dt^2$ durch i_σ ersetzt.

Finden in einem gegenüber T und τ sehr kurzen Zeitmoment erhebliche Parallelverschiebungen statt, so ist nach (206), (210), (214), oder nach (203) im Bereiche des Zeitmomentes:

$$(215)\qquad \begin{cases} a-a_0 = -V^{(\omega)}(\sigma-\sigma_0), \\ \dfrac{da}{dt}-\left(\dfrac{da}{dt}\right)_0 = -V^{(\omega)}\left(\dfrac{d\sigma}{dt}-\left(\dfrac{d\sigma}{dt}\right)_0\right)+\dfrac{2}{\tau}V^{(\omega)}(\sigma-\sigma_0). \end{cases}$$

$-V^{(\omega)}$ bedeutet hiernach auch bei Dämpfung die Vergrösserung sehr schneller Parallelverschiebungen.

Entsprechende Anwendung der Gleichungen (205), (209), (213) bei Ersatz von $d^2\sigma/dt^2$ durch $-gi_\sigma$, oder der Gleichung (204) ergiebt

$$(215')\qquad a-a_0 = 0, \quad \frac{da}{dt}-\left(\frac{da}{dt}\right)_0 = 0$$

und lehrt, *dass sehr schnelle Neigungsänderungen bei ihrer Einwirkung in erster Klasse auch im Falle der Dämpfung ohne direkten Einfluss bleiben.*

49. Nachwirkungen von Anfangszuständen und Störungen. Vergleicht man die hier für Dämpfung gefundenen Darstellungen der Indikatorbewegungen mit denjenigen, welche sich im Artikel (42) für den Fall der Abwesenheit aller Bewegungswiderstände ergaben, so zeigt sich als bedeutungsvoller Unterschied das Hinzutreten von Faktoren der Form $e^{-\frac{t_1-t}{\tau}}$. Da diese mit wachsender Zwischenzeit t_1-t kleiner und kleiner werden, *so folgt, dass wegen der Dämpfung die Nachwirkung des Anfangszustandes oder späterer Störungen sich nicht mehr unvermindert in alle Zukunft erstreckt, sondern allmählich mehr und mehr, schliesslich unter jede Grenze herabsinkt.*

Wir wollen untersuchen, wie die Geschwindigkeit, mit der die Nachwirkung verschwindet, sich ändert, wenn die Dämpfung grösser und grösser, die Relaxationszeit τ also kleiner und kleiner wird.

Anfänglich, solange

$$\tau > \frac{T_0}{2\pi}$$

ist, die Eigenbewegungen also *periodisch* sind, äussert sich die Dämpfung in dem Faktor $e^{-(t_1-t)/\tau}$, bezüglich $e^{-(t_1-t_0)/\tau}$. *Die Nachwirkung verschwindet dann also um so schneller, je grösser die Dämpfung ist*; die gleichen Veränderungen

www.libtool.com.cn

finden bei n-mal kleinerer Relaxationszeit in n-mal kleineren Zeiten statt. Dieses gilt bis zur Grenze der Aperiodicität:

$$\tau = \frac{T_0}{2\pi}.$$

Von da ab, wenn

$$\tau < \frac{T_0}{2\pi}$$

ist, und die Eigenbewegungen aperiodisch sind, wirkt die Dämpfung durch die beiden Faktoren $e^{-(t_1-t)/\tau_1'}$, $e^{-(t_1-t)/\tau_2'}$, bezüglich $e^{-(t_1-t_0)/\tau_1'}$, $e^{-(t_1-t_0)/\tau_2'}$. Nun ist τ_2' zwar kleiner als $T/2\pi$ und nimmt mit τ weiter und weiter ab; anders aber steht es um τ_1', denn diese Zeit wächst nach (197), wenn τ abnimmt, und ist nach (199) stets grösser als

$$\left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\tau}.$$

Wenn also die Dämpfung die Grenze der Aperiodicität überschreitet, so beginnt die Nachwirkung der Anfangszustände und der Störungen sich wieder über längere Zeiträume zu erstrecken und dehnt sich ohne Aufhören und ohne Grenze weiter und weiter aus.

Für uns knüpft sich hieran der äusserst wichtige Schluss, dass man zur Erzielung einer möglichst schnell verschwindenden Nachwirkung die Dämpfung nicht über die Grenze der Aperiodicität:

$$\tau = \frac{T}{2\pi}$$

hinaustreiben darf.

50. *Periodische Störungen.* Von besonderer Wichtigkeit für die Praxis ist auch jetzt wieder die mit den Artikeln 43—45 gleichlaufende Untersuchung des Einflusses periodischer Störungen. Wieder beginnen wir mit den *Parallelverschiebungen* und sehen zunächst von den etwaigen sich superponirenden Eigenbewegungen ab. In

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau}\frac{da}{dt} - V^{(\omega)}\frac{d^2\sigma}{dt^2} \tag{216}$$

setzen wir also

$$\sigma = S_\sigma \sin 2\pi \frac{t}{\mathrm{T}} + C_\sigma \cos 2\pi \frac{t}{\mathrm{T}}, \tag{217}$$

oder

$$\sigma = \sqrt{S_\sigma^2 + C_\sigma^2} \sin 2\pi \frac{t+\delta}{\mathrm{T}};\ tg\, 2\pi \frac{\delta}{\mathrm{T}} = \frac{C_\sigma}{S_\sigma} \tag{217'}$$

www.libtool.com.cn

und — über den Anfangspunkt der Zeitskala wiederum zu unserer Bequemlichkeit verfügend —:

$$a = S_a \sin 2\pi \frac{t}{T}, \tag{218}$$

dann bestimmt (216) den Zusammenhang zwischen S_σ, C_σ und S_a in den Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{c} S_\sigma = -\frac{S_a}{V^{(\omega)}}\left(1-\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right);\ C_\sigma = \frac{S_a}{V^{(\omega)}} 2\frac{T_0}{2\pi\tau}\frac{T}{T_0}, \\ ctg\, 2\pi\frac{\delta_\sigma}{T} = \frac{1}{2}\frac{2\pi\tau}{T_0}\left(\frac{T}{T_0}-\frac{T_0}{T}\right). \end{array} \right. \tag{219}$$

Vergleicht man hiermit die Formeln (166) des Artikels 43, so zeigt sich, dass der Zusammenhang zwischen der Amplitude S_a von a und der Amplitude S_σ des gleichphasigen Antheiles in σ genau derselbe ist wie bei Abwesenheit der Dämpfung. Diese äussert sich allein in dem Auftreten des in der Phase um T/4 verschobenen Antheiles $C_\sigma \cos 2\pi t/T$. Das Verhältniss der Gesammtamplituden von a und σ ist:

$$S_a : \sqrt{S_\sigma^2 + C_\sigma^2} = V^{(\omega)} : \sqrt{\left(1-\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)^2 + 4\left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2\left(\frac{T}{T_0}\right)^2}; \tag{220}$$

die Vergrösserung von Parallelverschiebungen der Periode T im Indikatordiagramm wird hiernach angegeben durch:

$$\mathfrak{B}^{(\omega)} = \frac{V^{(\omega)}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)^2 + 4\left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2\left(\frac{T}{T_0}\right)^2}}. \tag{221}$$

Der Wurzel wollen wir ein solches Vorzeichen geben, *dass $\mathfrak{B}^{(\omega)}$ positiv wird.* Sollte also $V^{(\omega)}$ negativ sein, so wäre für die Wurzel ebenfalls ein negatives Vorzeichen zu wählen.

Bei *periodischen Neigungsänderungen* gilt:

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau}\frac{da}{dt} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 J^{(\omega)} i_s; \tag{222}$$

setzen wir hierin:

$$i_s = S_i \sin 2\pi\frac{t}{T} + C_i \cos 2\pi\frac{t}{T}, \tag{223}$$

oder:

$$i_s = \sqrt{S_i^2 + C_i^2}\sin 2\pi\frac{t+\delta}{T},\ tg\, 2\pi\frac{\delta}{T} = \frac{C_i}{S_i}, \tag{223'}$$

www.libtool.com.cn

und wiederum:

$$a = S_a \sin 2\pi \frac{t}{T}, \tag{224}$$

so folgt:

$$\begin{cases} S_i = \frac{S_a}{J^{(\omega)}}\left(1-\left(\frac{T_0}{T}\right)^2\right); \; C_i = \frac{S_a}{J^{(\omega)}} 2 \frac{T_0}{2\pi\tau}\frac{T_0}{T}, \\ ctg\, 2\pi \frac{\delta_i}{T} = \frac{1}{2}\frac{2\pi\tau}{T_0}\left(\frac{T}{T_0}-\frac{T_0}{T}\right), \end{cases} \tag{225}$$

und

$$S_a : \sqrt{S_i^2+C_i^2} = J^{(\omega)} : \sqrt{\left(1-\left(\frac{T_0}{T}\right)^2\right)^2+4\left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2\left(\frac{T_0}{T}\right)^2}. \tag{226}$$

Die *scheinbare Indikatorlänge für Neigungsänderungen der Periode* T ist hiernach angegeben durch:

$$\mathfrak{J}^{(\omega)} = \frac{S_a}{\sqrt{S_i^2+C_i^2}} = \frac{J^{(\omega)}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{T_0}{T}\right)^2\right)^2+4\left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2\left(\frac{T_0}{T}\right)^2}}. \tag{227}$$

Gemäss der Ableitung gelten diese Formeln ganz unabhängig von der Intensität der Dämpfung, also für den Fall periodischer ebenso wohl wie für den Fall aperiodischer Eigenbewegungen.

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in den Darstellungen $\mathfrak{V}^{(\omega)}/V^{(\omega)}$ und $\mathfrak{J}^{(\omega)}/J^{(\omega)}$ ist seiner Form nach stets grösser als 0, *die Vergrösserung periodischer Verschiebungen und die scheinbare Indikatorlänge für periodische Neigungen können also bei Dämpfung niemals unendlich gross werden.*

$\mathfrak{J}^{(\omega)}$ und $\mathfrak{V}^{(\omega)}$ hängen innig zusammen, denn es ist

$$\frac{\mathfrak{J}^{(\omega)}}{J^{(\omega)}} = \frac{\mathfrak{V}^{(\omega)}}{V^{(\omega)}}\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \frac{\mathfrak{V}^{(\omega)}}{V^{(\omega)}}\frac{\Lambda}{L}. \tag{228}$$

Λ bedeutet wieder die zur Schwingungsperiode T gehörige äquivalente Pendellänge. Da

$$J^{(\omega)} = V^{(\omega)} L \tag{229}$$

ist, ergiebt sich die bemerkenswerthe Folgerung:

$$\mathfrak{J}^{(\omega)} = \mathfrak{V}^{(\omega)} \Lambda; \tag{230}$$

zwischen der scheinbaren Indikatorvergrösserung $\mathfrak{V}^{(\omega)}$, der scheinbaren äquivalenten Indikatorlänge $\mathfrak{J}^{(\omega)}$ und der zugehörigen Periode der Störungen T, *bezüglich der zugehörigen äquivalenten Pendellänge Λ besteht also dieselbe einfache Beziehung, wie zwischen der wirklichen Indikatorvergrösserung $V^{(\omega)}$, der wirklichen äquivalenten Indikatorlänge $J^{(\omega)}$ und der reducirten Schwingungsperiode T_0, bezüglich der äquivalenten Pendellänge L des Seismographen.*

www.libtool.com.cn

51. *Indikatorvergrösserungen periodischer Störungen.* Mit Rücksicht auf die Beziehungen zwischen $\mathfrak{B}^{(\alpha)}$ und $\mathfrak{Z}^{(\alpha)}$ können wir uns auf die Untersuchung einer der beiden Grössen beschränken und werden dabei die praktisch wichtigere Indikatorvergrösserung $\mathfrak{B}^{(\alpha)}$ bevorzugen. Diese ist gegeben durch:

$$\mathfrak{B}^{(\alpha)} = \frac{V^{(\alpha)}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)^2+4\left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2\left(\frac{T}{T_0}\right)^2}}. \tag{231}$$

Wir setzen $V^{(\alpha)}$ als positiv voraus und geben der Wurzel rechts positives Vorzeichen, damit auch $\mathfrak{B}^{(\alpha)}$ positiv wird.

Aus (231) folgt

$$\frac{d\mathfrak{B}^{(\alpha)}}{dT} = 2V^{(\alpha)}\frac{T}{T_0}\frac{1}{T_0}\frac{1-2\left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2-\left(\frac{T}{T_0}\right)^2}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)^2+4\left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2\left(\frac{T}{T_0}\right)^2}^3}; \tag{232}$$

$d\mathfrak{B}^{(\alpha)}/dT$ kann hiernach nur 0 sein, wenn

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = 1-2\left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2 \tag{233}$$

ist. Bei nicht zu starker Dämpfung, so lange

$$\tau > \sqrt{2}\,\frac{T_0}{2\pi}, \tag{234}$$

ist dieses möglich. Dann hat $d\mathfrak{B}^{(\alpha)}/dT$ nach (232) für kleine Werthe von T positives Vorzeichen, und geht für den durch (233) bestimmten Werth durch 0 hindurch, um weiterhin negativ zu bleiben. Die Vergrösserung $\mathfrak{B}^{(\alpha)}$ wächst also mit wachsender Störungsperiode T bis diese den durch (233) gegebenen Werth erreicht, um dann dauernd abzunehmen. Für den Maximalwerth von $\mathfrak{B}^{(\alpha)}$ liefern (231), (233) die Formel

$$(\mathfrak{B}^{(\alpha)})_{\text{Maximum}} = \tfrac{1}{2}\frac{2\pi\tau}{T_0}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2}}. \tag{235}$$

Ist die rechte Seite von (233) negativ, so giebt es keinen reellen, also keinen in Betracht kommenden Werth von T, für welche die Gleichung erfüllt ist, $d\mathfrak{B}^{(\alpha)}/dT$ ist stets negativ, $\mathfrak{B}^{(\alpha)}$ nimmt von Anfang an mit wachsender Periode T ab. Der Uebergang von dem einen zum anderen Falle findet für

$$\frac{T_0}{2\pi\tau} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \tag{236}$$

www.libtool.com.cn

statt. Es ist dann $T/T_0 = \sqrt{2}$ und das Dämpfungsverhältniss ergiebt sich

$$= e^{\pi} : 1 = 23{,}1 : 1. \tag{237}$$

Dies entspricht einer sehr starken, für die Praxis kaum noch in Betracht kommenden Dämpfung, sodass wir es in der Regel mit dem Falle einer erst steigenden, dann fallenden Vergrösserung zu thun haben.

Der Grenzwerth von $\mathfrak{V}^{(\alpha)}$ für verschwindende Perioden T ist nach (231) stets

$$\mathfrak{V}_0^{(\alpha)} = V^{(\alpha)}. \tag{238}$$

Für Störungsperioden T, welche die reducirte Eigenperiode T_0 vielfach übertreffen, kann nach (231)

$$\mathfrak{V}^{(\alpha)} = V^{(\alpha)}\left(\frac{T_0}{T}\right)^2 = V^{(\alpha)}\frac{L}{\Lambda} \tag{239}$$

gesetzt werden. *Der Einfluss der Dämpfung verschwindet hiernach sehr bemerkenswerther Weise sowohl für sehr kleine als auch für sehr grosse Störungsperioden.*

Eine genauere Einsicht in den Einfluss der Dämpfung auf die Indikatorvergrösserung periodischer Störungen bieten die Tabelle auf der nächsten Seite und Figur 5. Sie zeigen, dass bei geringer Dämpfung diejenigen Perioden, welche der Eigenperiode nahe kommen, sehr stark bevorzugt werden, und dass andererseits bei sehr starker Dämpfung die Empfindlichkeit gegenüber allen Perioden ausser den sehr kleinen und sehr grossen eine erhebliche Einbusse erleidet. *Dazwischen giebt es einen Bereich für das Dämpfungsverhältniss, etwa durch 3 : 1 und 8 : 1 begrenzt, wo die Vergrösserung $\mathfrak{V}^{(\alpha)}$ bis hierauf zu Perioden* T, *welche die reducirte Schwingungsperiode T_0 etwas überschreiten, sich von der Indikatorvergrösserung $V^{(\alpha)}$ weder nach der einen noch nach der anderen Seite erheblich entfernt.* Wählt man die Dämpfung also in diesem Bereich, so werden die periodischen Parallelverschiebungen in den Diagrammen des Seismographen bis etwas über $T = T_0$ hinaus nahezu in den richtigen Verhältnissen wiedergegeben. Am glücklichsten zeigt sich dieser ausgleichende Einfluss der Dämpfung wohl etwa bei dem Dämpfungsverhältniss 5 : 1, sodass dieses sich am meisten empfiehlt. — Ueber etwa $T = \sqrt{2}\ T_0 = 1{,}4\ T_0$ hinaus verliert die Dämpfung dann allmählich ihren Einfluss, indem immer mehr der Abfall der Vergrösserung zur Geltung kommt, der auch bei Abwesenheit der Dämpfung eintreten würde.

In der Tabelle und in der Figur ist auch gemäss (219) die *Phasenverzögerung* der Indikatorbewegung gegenüber der Erdbewegung dargestellt. In Zeittheilen gemessen beträgt sie δ, in Bruchtheilen der Periode gemessen δ/T; von der im Diagramm abgelesenen Zeit muss man um δ zurückgehen, um zu der entsprechenden Phase der Erdbewegung zu gelangen.

52. *Begleitende Eigenschwingungen.* Bei wiederstandsloser Bewegung des Seismographengehänges haben wir in Artikel 44 die durch den Einsatz periodischer Störungen erregten Eigenbewegungen direkt mittels der allgemeinen Lösungen der Indikatorgleichung berechnet. Es wurde dieser Weg in Rücksicht

www.libtool.com.cn

Abhängigkeit des Dämpfungs-Verhältnisses $\varepsilon:1$ und der Schwingungsperiode T von der Relaxationszeit τ und der reducirten Schwingungsperiode T_0. Vergrösserung $\mathfrak{V}^{(\sigma)}$ und Phasenverschiebung δ periodischer Verschiebungen σ parallel s.

$\varepsilon:1$		1:1	1,1:1	3:2	2:1	3:1	4:1	5:1	6:1	8:1	10:1	23,1:1	100:1	1000:1	$\infty:1$	—
T/T_0		1	1,0004	1,008	1,024	1,059	1,093	1,124	1,151	1,199	1,240	1,414	1,775	2,416	∞	aperiod
τ/T		∞	5,247	1,233	0,721	0,455	0,361	0,311	0,279	0,240	0,217	0,159	0,109	0,072	0	—
τ/T_0		∞	5,249	1,243	0,739	0,482	0,394	0,349	0,321	0,288	0,270	0,225	1,198	0,175	0,159	0,133
$T_0/2\pi\tau$		0	0,0303	0,128	0,215	0,330	0,404	0,456	0,495	0,552	0,591	0,707	0,826	0,910	1	1,2
Maximal-werth von $\mathfrak{V}^{(\sigma)}$	T/T_0	1	0,9991	0,983	0,952	0,884	0,821	0,764	0,714	0,625	0,549	0	(0)	(0)	(0)	(0)
	$\mathfrak{V}^{(\sigma)}/V^{(\sigma)}$	∞	16,5	3,94	2,38	1,60	1,35	1,23	1,16	1,09	1,05	1	(1)	(1)	(1)	(1)
$T/T_0 = \frac{1}{2}$	$\mathfrak{V}^{(\sigma)}/V^{(\sigma)}$	$\frac{1}{2}$	1,332	1,31	1,27	1,22	1,17	1,14	1,11	1,07	1,05	0,97	0,90	0,85	8/10	0,71
$T/T_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$		2	1,993	1,88	1,71	1,46	1,32	1,23	1,16	1,08	1,03	0,89	0,79	0,72	2/3	0,56
$T/T_0 = 1$		∞	16,5	3,90	2,32	1,51	1,24	1,10	1,01	0,91	0,85	0,71	0,61	0,55	1/2	0,42
$T/T_0 = \sqrt{2}$		1	0,996	0,94	0,85	0,73	0,66	0,61	0,58	0,54	0,51	0,45	0,39	0,36	1/3	0,28
$T/T_0 = 2$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$.0,9990	$\frac{1}{3}$.0,99	$\frac{1}{3}$.0,96	$\frac{1}{3}$.0,91	$\frac{1}{3}$.0,88	$\frac{1}{3}$.0,85	$\frac{1}{3}$.0,83	$\frac{1}{3}$.0,81	$\frac{1}{3}$.0,78	$\frac{1}{3}$.0,73	$\frac{1}{3}$.0,67	$\frac{1}{3}$.0,64	$\frac{1}{3}$.6/10	$\frac{1}{3}$.0,53
$T/T_0 = \frac{1}{2}$	$\frac{\delta}{T}$	$\frac{1}{2}$	0,493	0,473	0,456	0,434	0,422	0,413	0,407	0,399	0,394	0,380	0,367	0,360	0,352	0,339
$T/T_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$		$\frac{1}{2}$	0,487	0,445	0,413	0,381	0,364	0,355	0,349	0,341	0,336	0.324	0,314	0,309	0,304	0,295
$T/T_0 = 1$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$T/T_0 = \sqrt{2}$		0	0,013	0,055	0,087	0,119	0,136	0,145	0,151	0,159	0,164	0,176	0,186	0,191	0,196	0,205
$T/T_0 = 2$		0	0,007	0,027	0,044	0,066	0,078	0,087	0,093	0,101	0,106	0,120	0,133	0,140	0,148	0,161

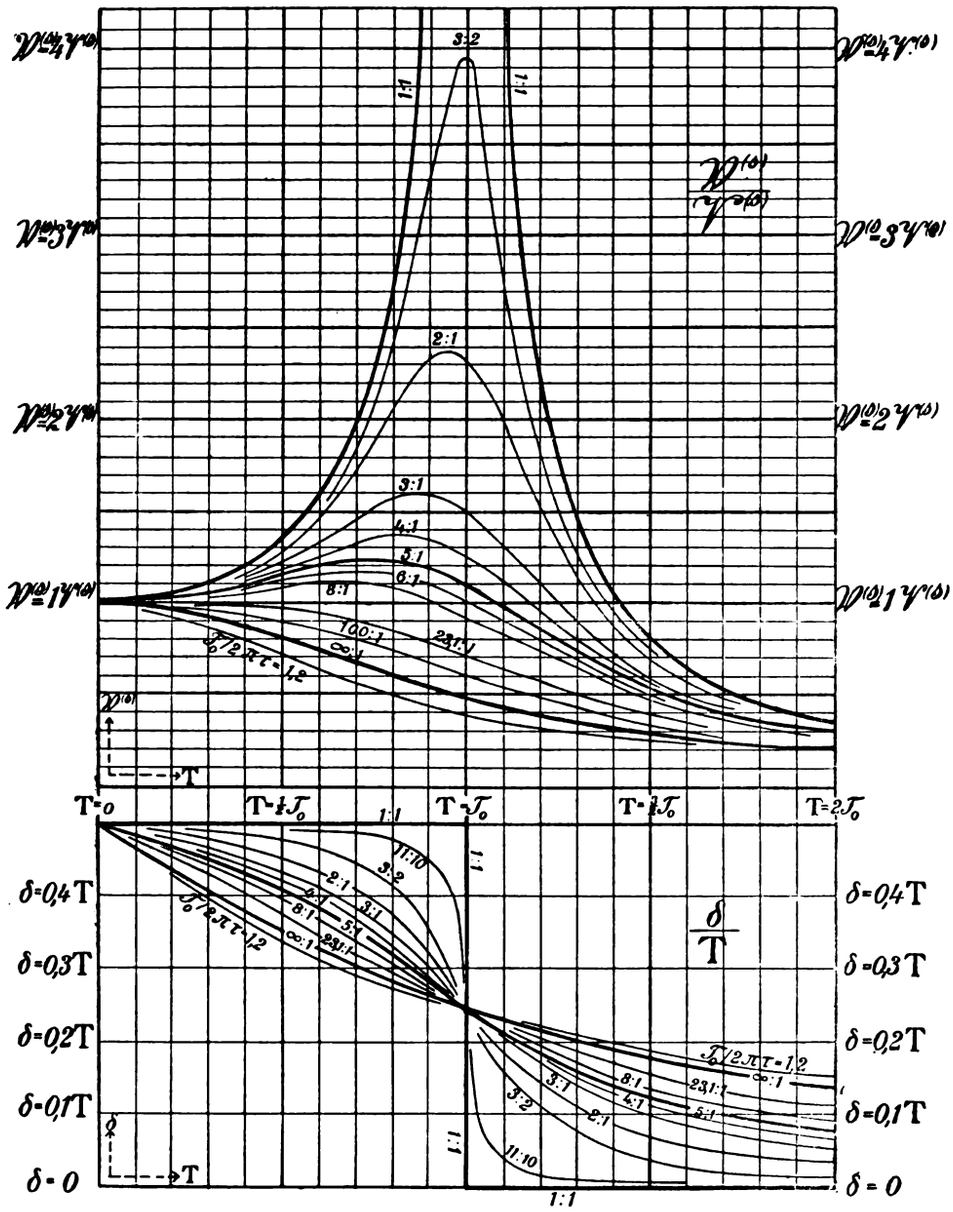
$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau}\frac{da}{dt} - V^{(\sigma)}\frac{d^2\sigma}{dt^2}. \qquad a = A\sin 2\pi\frac{t}{T};\ \sigma = \Sigma\sin 2\pi\frac{t+\delta}{T};\ A/\Sigma = \mathfrak{V}^{(\sigma)}.$$

T bedeutet die Periode der Verschiebungen. Durch die Linie ..... wird die Lage des Maximums von $\mathfrak{V}^{(\sigma)}$ angezeigt.

Die Bewegungen (σ) der Erdoberfläche gehen den Bewegungen (a) des Indikators um die Zeit δ voraus und haben eine $\mathfrak{V}^{(\sigma)}$-mal kleinere Amplitude.

Für das Dämpfungsverhältniss scheint sich am besten 5:1 zu empfehlen, doch sind 3:1 und 8:1 wohl noch zweckmässig.

www.libtool.com.cn



Figur 5.

www.libtool.com.cn

auf den Fall $T = T_0$ gewählt, wo eine Beziehung auf S_a wegen seines unendlich grossen Werthes zu vermeiden war. Jetzt, wo dieser Umstand nicht mehr störend ist, soll unter Benutzung von S_a ein kürzerer Weg eingeschlagen werden.

Wiederum nehmen wir an, dass die Störungen den bis dahin ruhenden Seismographen plötzlich mit voller Stärke treffen. t_0 sei der Zeitpunkt des Einsatzes, weiterhin gelte:

$$\sigma = S_\sigma \sin 2\pi \frac{t}{T} + C_\sigma \cos 2\pi \frac{t}{T}; \tag{240}$$

es handele sich also um *Parallelverschiebungen*. Die nach der Zeit t_0 erfolgenden Indikatorbewegungen sind aufzufassen als Superposition einer erzwungenen Schwingung, deren Ausweichung mit $a^{(\sigma)}$, und einer Eigenschwingung, deren Ausweichung mit a' bezeichnet werden soll:

$$a = a^{(\sigma)} + a'. \tag{241}$$

Den Anfangspunkt der Zeit passend wählend, können wir

$$a^{(\sigma)} = S_a \sin 2\pi \frac{t}{T} \tag{242}$$

setzen und zwischen S_a, S_σ, C_σ den in Artikel 50 festgestellten Zusammenhang annehmen. Für a' gilt die Formel

$$a' = S'_a e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \sin 2\pi \frac{t-t_0}{T} + C'_a e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \cos 2\pi \frac{t-t_0}{T}. \tag{243}$$

Unsere Aufgabe ist es, S'_a und C'_a zu bestimmen.

Bei sehr schnellen, sich über einen sehr kurzen Zeitraum erstreckenden Störungen ist nach (215) $a = -V^{(a)}\sigma + \text{const}$, $da/dt = -V^{(a)}(d\sigma/dt) + 2V^{(a)}\sigma/\tau + \text{const}$. Diese Formeln wenden wir auf den Einsatz an. Unmittelbar vorher ist $a = 0$, $da/dt = 0$, $\sigma = 0$, $d\sigma/dt = 0$, unmittelbar nachher $\sigma = \sigma_0$, $d\sigma/dt = (d\sigma/dt)_0$, so folgt für den Zeitpunkt unmittelbar nachher $a_0 = -V^{(a)}\sigma_0$, $(da/dt)_0 = -V^{(a)}(d\sigma/dt)_0 + 2V^{(a)}\sigma_0/\tau$. (241) in Verbindung mit (242), (243) sowie (240) und (219) ergiebt daher

$$\begin{cases} S'_a = S_a \dfrac{T}{T_0}\left\{\dfrac{T_0}{2\pi\tau}\left(\dfrac{T}{T_0}\right)^2 \sin 2\pi\frac{t_0}{T} - \left(1 - 2\left(\dfrac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2\right)\dfrac{T}{T_0}\cos 2\pi\frac{t_0}{T}\right\} \\ C'_a = -S_a\left\{\left(\dfrac{T}{T_0}\right)^2 \sin 2\pi\frac{t_0}{T} + 2\dfrac{T_0}{2\pi\tau}\dfrac{T}{T_0}\cos 2\pi\frac{t_0}{T}\right\}. \end{cases} \tag{244}$$

Betrachten wir zunächst die für uns besonders wichtigen Fälle mittlerer Dämpfung, welche in der Tabelle auf Seite 80 durch Einrahmung hervorgehoben sind. Es liegt dann $T_0/2\pi\tau$ in der Nähe von 1/2, T/T_0 in der Nähe von 1, sodass S'_a, C'_a und die Gesammtamplitude $\sqrt{S'^2_a + C'^2_a}$ der beim Einsatz der Störungen erregten Eigenschwingungen für Perioden T unterhalb T_0 sowie

www.libtool.com.cn

in dessen Nachbarschaft höchstens die Grössenordnung S_a und für grössere Perioden die Grössenordnung $S_a T^2/T_0^2$ erhalten, wobei S_a die Amplitude der den Störungen synchronen erzwungenen Schwingungen bedeutet. Nun bleibt S_a dauernd bestehen, solange die Störungen anhalten, während die Amplitude der Eigenschwingungen wegen der hier angenommenen Stärke der Dämpfung schon in einer Periode T auf 1/9 bis 1/64 des anfänglichen Werthes herabsinkt. Wir werden hieraus schliessen können, dass die beim Einsatz erregten Eigenschwingungen nur einen geringen, vorübergehenden Einfluss haben. Von besonderer Wichtigheit ist, *dass der Seismograph sich gegenüber Störungsperioden, welche der Eigenperiode nahe liegen, völlig anders als bei Abwesenheit der Dämpfung verhält.* Da nämlich die Eigenschwingungen schon nach wenigen Hin- und Hergängen unmerklich werden, *so finden keine Schwebungen statt und bei einer mit der Eigenperiode übereinstimmenden Störungsperiode tritt auch kein dauerndes Anwachsen der Amplitude ein.* Es stellt sich vielmehr mit einer der Dämpfung entsprechenden Geschwindigkeit der von den Eigenschwingungen freie Endzustand her. Wie gross der Vorteil ist, der sich hiernach infolge der Dämpfung für die Lesbarkeit der Seismographen Diagramme ergiebt, brauche ich wohl nicht noch zu betonen.

Mit geringer werdender Dämpfung vermindert sich deren schützender Einfluss; wählt man sie noch stärker, als dem Dämpfungsverhältniss 8 : 1 entspricht, so werden die Eigenschwingungen bis zur Grenze der Aperiodicität zwar noch schneller beseitigt, aber der Gewinn ist nicht gross und wohl kein hinreichender Ersatz für die Einbusse an Empfindlichkeit

Bei einem plötzlichen Einsatz von periodischen Neigungsstörungen zur Zeit t_0 haben wir unmittelbar nacher $a = a_0 = 0$, $da/dt = (da/dt)_0 = 0$ zu setzen; so folgt hier mittels entsprechender Rechnungen

$$(245) \qquad S_a' = -S_a \frac{T}{T_0}\left\{\frac{T_0}{2\pi\tau}\sin 2\pi\frac{t_0}{T} + \frac{T_0}{T}\cos 2\pi\frac{t_0}{T}\right\},\quad C_a' = -S_a \sin 2\pi\frac{t_0}{T}.$$

Bei mittelstarker Dämpfung ist hiernach die Anfangsamplitude der Eigenschwingungen für Perioden T unterhalb T_0 von der Grössenordnung $S_a T_0/T$, für Perioden in der Nähe von T_0 und darüber von der Grössenordnung S_a. Ueber den Einfluss der Dämpfung ist im Wesentlichen dasselbe zu sagen wie vorhin, nur können hier bei kleinen Störungsperioden T die Eigenschwingungen auf einige Zeit gegenüber den erzwungenen Schwingungen kräftig zur Geltung kommen.

§ 7. Einwirkung der Reibung im Gehänge.

53. *Reibung im Gehänge und am Schreibstift.* Unter den Bewegungshemmnissen wollen wir nun, nachdem die Dämpfung untersucht worden ist, nur noch die Reibung fester Körper aufeinander berücksichtigen. *Dabei soll vorausgesetzt werden*

www.libtool.com.cn

1) dass die Widerstandskraft bei Bewegung von der Geschwindigkeit unabhängig ist, 2) dass die Reibung bei relativer Ruhe der Körper den Eintritt der Bewegung nur solange verhindert, als die Kräfte noch nicht gross genug sind, um die der Bewegung entsprechende Widerstandskraft zu überwinden.

Bekanntlich wird insbesondere das zweite Gesetz meist merklich verletzt, indem zur Einleitung der Bewegung ein erheblich grösserer Antrieb erforderlich ist, als nach dem Widerstand während der Bewegung zunächst zu erwarten wäre. Wir wollen aber die sich so ergebenden weiteren Komplikationen nicht besonders berücksichtigen, da sie nur eine unbedeutende Rolle spielen, solange die Reibung überhaupt soweit herabgedrückt ist, als im Interesse der Brauchbarkeit des Seismographen erforderlich scheint.

Bei photographischer Registrirung macht sich die Reibung nur im Gehänge selbst bemerkbar, bei mechanischer Registrirung überdies bei der Bewegung des Schreibstiftes auf der Schreibfläche. Im letzteren Falle bringt die Eigenbewegung der Schreibfläche ein wesentlich neues Moment in die Erscheinung, welches für die Arbeit des Seismographen von Vortheil ist, die theoretische Auffassung aber erheblich erschwert. Mit Rücksicht hierauf werden wir in den folgenden Untersuchungen zwischen *„Reibung im Gehänge“* und *„Reibung am Schreibstift“* unterscheiden.

54. *Indikatorgleichung bei Reibung im Gehänge.* $Q^{(R)}$ sei die Indikator-Resultante (Art. 31) der sämmtlichen im Gehänge wirkenden Reibungskräfte; die fingirte Kraft $Q^{(R)}$ vom Indikator ersetze also das gesammte im Gehänge wirksame durch Reibung veranlasste Kraftsystem. Bedeutet dann R die positiv genommene Intensität von $Q^{(R)}$ während der Bewegung, so ist nach den im vorigen Artikel formulirten Gesetzen bei positiver Bewegungsrichtung des Indikators $Q^{(R)} = -R$, bei negativer Bewegungsrichtung $Q^{(R)} = +R$; im Falle der Ruhe kann jeder Werth von $-R$ bis $+R$ auftreten.

Der Einfluss der Reibung auf die Bewegungen des Gehänges ist leicht zu erkennen, wenn $Q^{(R)}$ in die Bewegungsgleichung (104) eingefügt wird. *Für die Bewegungsgleichung des Indikators in der von uns gewählten Form, wobei die linke Seite durch das Glied d^2a/dt^2 gebildet wird, ergiebt sich so:*

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau}\frac{da}{dt} + \frac{Q^{(R)}}{m} + \text{Störungs-Glieder}, \tag{246}$$

das heisst, es tritt rechts das *„Reibungsglied“*

$$\frac{Q^{(R)}}{m} \tag{247}$$

hinzu. m bedeutet die resultirende Masse des Gehänges (Art. 32). Nach den gemachten Auseinandersetzungen *ist allgemein*:

$$-\frac{R}{m} \leqq \frac{Q^{(R)}}{m} \leqq +\frac{R}{m}, \tag{248}$$

und gilt speciell für $da/dt > 0$ der untere, für $da/dt < 0$ der obere Grenzwerth.

www.libtool.com.cn

Nach (246) muss bei Abwesenheit von Störungen im Falle der Ruhe die Beziehung

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a = \frac{Q^{(z)}}{m} \tag{249}$$

erfüllt werden; da nun aber für $Q^{(z)}/m$ nur die Grenzbestimmung (248) vorgeschrieben ist, so folgt für a kein bestimmter Werth, sondern nur die Grenzbestimmung

$$-r \gtreqless a \leqq +r, \tag{250}$$

wobei r bestimmt ist durch die Formel

$$\frac{R}{m} = r\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = r\,\frac{g}{L}. \tag{251}$$

Bei Abwesenheit von Störungen vermag also die Reibung innerhalb der durch (250) gegebenen Grenzen jeden beliebigen Ausschlag des Gehänges dauernd aufrecht zu erhalten. r wird weiterhin *„maximaler Reibungsausschlag"* genannt werden. Unter seiner Benutzung ergiebt sich für das Reibungsglied der Indikatorgleichung (246) anstelle von (248) die Bedingung

$$-r\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = -r\,\frac{g}{L} \gtreqless \frac{Q^{(z)}}{m} \leqq +r\,\frac{g}{L} = +r\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2. \tag{252}$$

Die Indikatorgleichung selbst kann unter Benutzung von r für Zeiten der Indikatorbewegung geschrieben werden:

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau}\frac{da}{dt} \mp \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 r + \text{Störungs-Glieder}, \tag{253}$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen zu wählen ist, jenachdem die Bewegungsrichtung, also auch da/dt, positiv oder negativ ist.

55. *Allgemeine Sätze.* Der Indikator sei in Ruhe und befinde sich in der Mittellage, es sei also $da/dt = 0$ und $a = 0$; dann kann Bewegung nur eintreten, wenn die Störungen für sich eine Beschleunigung d^2a/dt^2 ergeben, welche das Reibungsglied vermöge seiner Beschränkung (252) nicht aufzuheben vermag. Betrachten wir also zum Beispiel das Störungsglied

$$-\frac{J^{(a)}}{L}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - g i_s - \Delta g_s\right),$$

so ist eine durch dieses bewirkte Bewegung des Indikators nur dann zu erwarten, wenn sein Werth über die Grenzen $\pm R/m = \pm gr/L$ hinausgezt. Die Neigungen i_s müssen hiernach die Grenzen $\pm r/J^{(a)}$, die Schwereänderungen Δg_s die Grenzen $\pm gr/J^{(a)}$ überschreiten und die Beschleunigungen $d^2\xi/dt^2$ müssen äquivalent mit Schwereänderungen ausserhalb dieser Grenzen werden. *Hieraus folgt das sehr übersichtliche Resultat, dass zur Einleitung der Indikatorbewegung die Neigungen i_s, die Schwereänderungen Δg_s und die Schwereänderungen, welche den Beschleunigungen $d^2\xi/dt^2$ äquivalent sind, solche Werthe überschreiten müssen, welchen bei dauerndem*

www.libtool.com.cn

Bestehen eine Aenderung der Indikatormittellage um den maximalen Reibungsausschlag r entspräche. — Durch Weiterführung der Ueberlegungen ist leicht einzusehen, *dass im Falle eines von vorne herein vorhandenen durch die Reibung aufrecht erhaltenen Ausschlages a zur Einleitung einer Indikatorbewegung nach der Seite des Ausschlages hin ein grösserer, nach der anderen Seite ein kleinerer Antrieb durch die Störungen nöthig ist; als Maass für die nothwendigen Intensitäten des Antriebes ergeben sich dabei die Ausschläge* $a+r$ *und* $-a+r$.

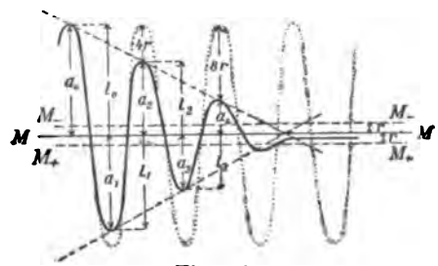
Während eines Zeitintervalles, in welchem der Indikator sich nach einer und derselben Richtung bewegt, gilt nach (253)

$$(253') \qquad \frac{d^2(a\pm r)}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2(a\pm r) - \frac{2}{\tau}\frac{d(a\pm r)}{dt} + \text{Störungs-Glieder.}$$

Hieraus kann geschlossen werden, *dass während eines jeden Intervalles unveränderlicher Bewegungsrichtung die Bewegungen des Indikators infolge der Reibung gerade so vorsichgehen, als ob die Mittellage des Indikators um den maximalen Reibungsausschlag entgegengesetzt der Bewegungsrichtung verschoben wäre.* Wir wollen diesen Satz, der für die rechnerische Verwerthung der Reibung vielfach sehr bequem ist, den *„Satz der verschobenen Mittellage“* nennen. Kehrt die Bewegungsrichtung des Indikators um, so springt die scheinbare Mittellage um $2r$, zu der symmetrisch zur wirklichen Mittellage auf der anderen Seite gelegenen Stelle.

Der Satz der Superposition der Wirkungen von Störungen (Art. 41) *wird durch die Reibung aufgehoben.* Dieses ist leicht einzusehen, wenn man beachtet, dass bei Reibung erst eine gewisse Grösse der Störung nothwendig ist, um eine Bewegung des Indikators zu veranlassen. Denkt man sich dergleichen einzeln unwirksame Störungen in genügender Zahl superponirt, so lassen sich immer wirksame Störungen konstruiren, während der Satz der Superposition dabei als Summe der Ausschläge 0 nur immer wieder den Ausschlag 0 ergäbe. — *Man kann den Satz der Superposition für die Berechnung der Wirkungen von Störungen retten, wenn man den Kunstgriff anwendet, die Reibung selbst als eine äussere Störung zu betrachten,* wenn man also in der Indikatorgleichung (246) das Reibungsglied $Q^{(z)}/m$ zu den Störungsgliedern zählt.

56. *Eigenschwingungen bei Reibung im Gehänge.* Um den Einfluss der Reibung im Gehänge auf die Eigenbewegungen festzustellen, wollen wir den im vorigen Artikel aufgestellten Satz der verschobenen Mittellage anwenden. Zunächst möge *der Fall unmerklicher Dämpfung* behandelt werden. Fehlte dann auch die Reibung, so würde der Indikator gleich gross bleibende Sinusschwingungen vollführen und im Diagramm eine Sinuskurve, etwa die in Figur 6 punktirte, um die wirkliche Mittellinie, MM, zeichnen. Bei Mitwirkung der Reibung gehen die Schwingungen von einem



Figur 6.

www.libtool.com.cn

Umkehrpunkt zum nächsten abwechselnd um die verschobenen Mittellinien, M_+M_+ und M_-M_- der Figur, von Statten. Da diese um r von der wirklichen Mittellinie abstehen, *so nimmt der Ausschlag zunächst bei jeder Schwingung von einer Seite zur andern um $2r$, um den doppelten maximalen Reibungsausschlag ab.* Zum Schluss, bei der letzten Schwingung, kann die Abnahme geringer sein. Dieses trifft, wie leicht ersichtlich, dann ein, wenn die wirkliche Mittellinie nicht mehr überschritten wird.

Sind $a_0, a_1, a_2, \ldots$ die aufeinander folgenden Ausschläge, und werden positiv gerechnete Beträge durch Einklammerung in geraden Strichen bezeichnet, so ist

$$|a_1| = \|a_0|-2r|,\ |a_2| = \|a_1|-2r| = \|a_0|-4r|, \ldots, \tag{254}$$

$$|a_n| = \|a_0|-2nr|, \tag{254'}$$

wobei die Formeln auch noch für die letzte Schwingung gültig sind. Man muss von dieser absehen, sobald die wirkliche Mittellinie nicht mehr überschritten wird, wenn man in Anlehnung an (254') schreibt:

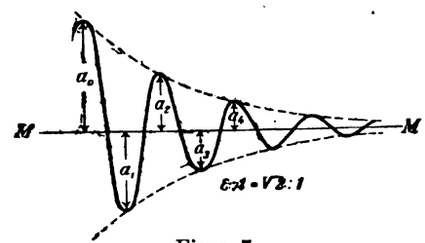
$$r = \frac{1}{2n}(|a_0|-|a_n|). \tag{254''}$$

Von besonderem Interesse ist der Verlauf der *Scheitellinien* im Diagramm, das heisst, der Linien, welche die Punkte grösster Ausweichung nach derselben Seite verbinden. *Sie liegen symmetrisch zu der wahren Mittellinie (MM) und sind in unserem Falle gerade.* Ihre Neigung wird bestimmt durch die Bedingung, dass sie der Mittellinie in einer Schwingungsperiode T um $4r$ näherkommen. Die Stücke der Scheitellinien jenseits des Schnittpunktes haben für die Indikator-Schwingungen nur noch bis zu den verschobenen Mittellinien direkte Bedeutung; was darüber hinausliegt, ist nichts weiter als eine mathematische Fortsetzung, denn die Schwingungen hören auf, sowie ein Umkehrpunkt zwischen die verschobenen Scheitellinien fällt.

Die Geradlinigkeit der Scheitellinien und der im Endlichen liegende Schnittpunkt geben für die Reibung im Gehänge einen sehr charakteristischen Unterschied gegenüber der Dämpfung. Bei dieser sind die Scheitellinien, welche in Figur 7 für das Dämpfungsverhältniss $\varepsilon:1 = \sqrt{2}:1$ dargestellt sind, Exponentialkurven der Gleichung

$$a = \pm a_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}, \tag{255}$$

die sich der Mittellinie zwar immer mehr annähern, aber sie niemals völlig erreichen.



Figur 7.

Für die Praxis ist es meist bequemer, statt mit „*Ausschlägen*“ $a_0, a_1, a_2, \ldots$, mit „*Schwingungsweiten*“

$$l_0 = a_0-a_1|,\ l_1 = |a_1-a_2|,\ l_2 = |a_2-a_3|, \ldots\ldots \tag{256}$$

www.libtool.com.cn

zu rechnen. Für diese ergiebt sich bis zum Schluss der Schwingungen, also durchweg, gültig:

$$l_n = l_0 - 4nr, \qquad r = \frac{1}{4n}(l_0 - l_n). \tag{257}$$

Die Formeln (254) oder (257) ermöglichen es in einfacher Weise, aus den Diagrammen des in Schwingungen versetzten Seismographen die Grösse des Reibungsausschlages r festzustellen.

Während die Dämpfung nicht im Stande ist, den einmal schwingenden Seismographen jemals zur völligen Ruhe zu bringen, ist das bei der Reibung im Gehänge anders, *hier giebt es eine bestimmte letzte Schwingung*, von der ab der Indikator in Ruhe bleibt. In der Figur 6 findet sie in positiver Bewegungsrichtung um die verschobene Mittellinie $M_+ M_+$ statt. *Wie hier, so endet die Bewegung im Allgemeinen nach Vollendung einer ganzen Schwingung um eine der verschobenen Mittellinien, sobald die erreichte Endlage innerhalb des von den verschobenen Mittellinien begrenzten Bereiches fällt.*

Auch bei der Behandlung des Falles merklicher Dämpfung, zu der wir uns nun wenden wollen, benutzen mir den Satz der verschobenen Mittellage. Danach erfolgt die Schwingung von einem Umkehrpunkt zum nächsten um die betreffende der beiden verschobenen Mittellage genau so, wie bei Abwesenheit der Reibung um die wahre Mittellage. Bedeutet

$$\varepsilon : 1$$

das *Dämpfungsverhältniss*, so gilt hiernach für die aufeinander folgenden grössten Ausweichungen $a_0, a_1, a_2, \ldots . a_n, \ldots$, wenn von der letzten eventuell abgesehen wird:

$$|a_1| + r = (|a_0| - r)\frac{1}{\varepsilon}, \quad |a_2| + r = (|a_1| - r)\frac{1}{\varepsilon}, \ldots . , \tag{258}$$

$$|a_n| + r\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1} = \left(|a_0| + r\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\right)\frac{1}{\varepsilon^n}. \tag{258'}$$

Man kann diese Formeln auch mit Einschluss der letzten Ausweichung benutzen, wenn man für diese $-|a|$ anstelle von $|a|$ setzt.

Im Falle der Reibung sinkt nach (258') der Ausdruck $|a_n| + r(\varepsilon+1)/(\varepsilon-1)$ *gerade so herab, wie ohne Reibung die Grösse* $|a_n|$ *des Ausschlages selbst.* Analoges gilt für die Schwingungsweiten $l_0 = |a_0| + |a_1|$, $l_1 = |a_1| + |a_2|, \ldots .$, für welche (258') ergiebt

$$l_n + 2r\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1} = \left(l_0 + 2r\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\right)\frac{1}{\varepsilon^n}. \tag{259}$$

Bedeutet T die Schwingungsperiode, τ die Relaxationszeit, t_n die zum n-ten Ausschlag gehörige Zeit, so ist

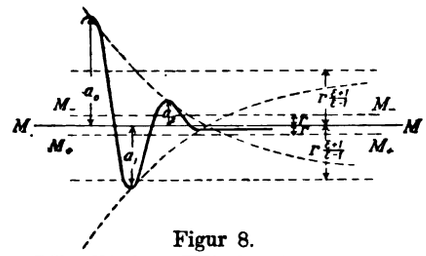
www.libtool.com.cn

$$\varepsilon = e^{\frac{T}{2\tau}}, \quad n = 2\frac{t_n - t_0}{T}, \quad \frac{1}{\varepsilon^n} = e^{-\frac{t_n - t_0}{\tau}}, \tag{260}$$

also nach (258′)

$$|a_n| + r\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1} = \left(|a_0| + r\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\right)e^{-\frac{t_n - t_0}{\tau}}. \tag{261}$$

Diese Formel, erläutert durch Figur 8, lehrt, dass die Scheitellinien ebendieselben Exponentialkurven sind wie bei Abwesenheit der Reibung (Figur 7), dass sie aber gegen die wahre Mittellinie um $\pm r(\varepsilon+1)/(\varepsilon-1)$ verschoben erscheinen. Infolge der Verschiebung werden die Asymptoten nicht mehr durch die wahre Mittellinie, sondern durch zwei ihr im Abstande $r(\varepsilon+1)/(\varepsilon-1)$ parallel laufende Linien gebildet, und *schneiden die Scheitellinien einander in einem im Endlichen gelegenen Punkte auf der wahren Mittellinie.* Wieder kommen die Scheitellinien jenseits des Schnittpunktes nur noch bis zu den verschobenen Mittellinien in Betracht.



Figur 8.

In Figur 8 ist bei derselben Schwingungsperiode derselbe Reibungsausschlag wie in Figur 6 und dasselbe Dämpfungsverhältniss wie in Figur 7 angenommen, so dass sie uns die gemeinsame Wirkung der in Figur 6 und 7 getrennten Ursachen für die Verminderung der Schwingungsamplitude zeigt.

Ein unmittelbareres Bild von der Abnahme der Ausschläge a_n und der Schwingungsweiten l_n als (258′) und (259) ergeben die folgenden, aus ihnen leicht ableitbaren Gleichungen:

$$|a_n| = |a_0|\frac{1}{\varepsilon^n} - r\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^n}\right), \tag{262}$$

$$l_n = l_0\frac{1}{\varepsilon^n} - 2r\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^n}\right). \tag{263}$$

Die Indikatorbewegung endet, wenn die rechte Seite von (262) einen Werth zwischen $+r$ und $-r$ annimmt; liegt er zwischen 0 und $-r$, so ist für ihn $|a_n|$ durch $-|a_n|$ zu ersetzten. Bei (263) kennzeichnet sich die Endlage des Indikators durch den letzten positiven Werth von l_n.

Für die Abnahme des Ausschlages von einer grössten Ausweichung bis zur nächsten nach der entgegengesetzten Seite erhalten wir mittels (262)

$$|a_n| - |a_{n+1}| = |a_n|\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right) + r\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{264}$$

ferner für die Abnahme des Ausschlages von einer grössten Ausweichung bis zur nächsten nach derselben Seite

$$|a_n| - |a_{n+2}| = |a_n|\left(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right) + r\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)^2. \tag{265}$$

www.libtool.com.cn

Die für die Schwingungsweiten l gültigen Gleichungen, welche (264) und (265) entsprechen, enthalten $2r$ anstelle von r.

Beiläufig mag noch bemerkt werden, dass sich die Scheitellinien infolge der Dämpfung stets unter einem stumpferen Winkel in der wahren Mittellinie schneiden (Figur 8), als der Reibung allein entsprechen würde (Figur 6). Im letzten Falle wäre $8r$ der Betrag, um welchen die Scheitellinien für den Zeitzuwachs einer Periode T einander näher kommen. Bei Mitwirkung von Dämpfung findet man für den entsprechenden Betrag bei den Tangenten der Scheitellinien in ihrem Schnittpunkt auf der wahren Mittellinie

$$2r\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\frac{T}{\tau} = 8r\left(1+\tfrac{1}{12}\left(\frac{T}{2\tau}\right)^2+\cdots\right), \tag{266}$$

wobei in der Klammer hörere Potenzen von $T/2\tau$ folgen. Das hingeschriebene Glied mit der zweiten Potenz hat für $2\tau = T$ etwa den Werth 1/12, das Dämpfungsverhältniss ist dabei $\varepsilon:1 = e:1 = 2{,}718\ldots:1$, also noch für diese recht erhebliche Dämpfung hat das erste Glied der Reihe hinter der 1 nur einen kleinen Einfluss:

Für eine nicht sehr grosse Dämpfung schneiden sich die Scheitellinien in der wahren Mittellinie sehr nahe unter demselben Winkel wie bei alleiniger Wirkung der Reibung.

Aus diesem Umstand wird man in manchen Fällen bei der Bestimmung des maximalen Reibungsausschlages r aus den Aufzeichnungen der Eigenbewegungen Nutzen ziehen können.

57. *Periodische Störungen bei Reibung im Gehänge.* Unter Berücksichtigung der Störungsglieder erster Klasse für die Richtung s lautet die Indikatorgleichung nach (253), wenn Reibung im Gehänge, jedoch keine Dämpfung wirksam ist:

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a \mp \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r - V^{(\omega)}\left(\frac{d^2\sigma}{dt^2} - g i_s - \Delta g_s\right). \tag{267}$$

Wir wollen zunächst fragen, welche Amplitude periodische Verschiebungs- und Neigungsstörungen mindestens haben müssen, um den Indikator trotz der Reibung in Bewegung zu setzen.

Für *Verschiebungsstörungen* ist hierzu nöthig, dass $V^{(\omega)}d^2\sigma/dt^2$ die Grenzen $\mp(2\pi/T)^2 r$ überschreitet. Setzen wir also

$$\sigma = \sum \sin 2\pi\frac{t+\delta}{\mathrm{T}}, \tag{268}$$

sodass $\sum$ die maximale Amplitude der Verschiebung und T die Periode bedeutet, so folgt als *Bedingung* für *Indikatorbewegungen:*

$$\sum > \left(\frac{\mathrm{T}}{T}\right)^2 \frac{r}{V^{(\omega)}}. \tag{269}$$

www.libtool.com.cn

Es mag hier bemerkt werden, dass $r/V^{(\omega)}$ diejenige Amplitude der Verschiebung angiebt, welche bei sehr kurzer Störungsperiode für die Indikatorbewegungen eine Amplitude gleich dem maximalen Reibungsausschlag r veranlassen würde. — *Die Reibung zeigt nach* (269) *bei Verschiebungsstörungen einen um so geringeren Einfluss, je kürzer die Störungsperiode ist, und zwar nimmt die eben noch unterdrückte Amplitude proportional mit dem Quadrat der Störungsperiode ab.*

Für *Neigungsstörungen* muss $V^{(\omega)} g i_s$ die Grenzen $\mp (2\pi/T_0)^2 r = \mp (g/L) r$ überschreiten, also i_s die Grenzen $\mp r/J^{(\omega)}$. Hier ist ein Einfluss der Störungsperiode nicht zu bemerken.

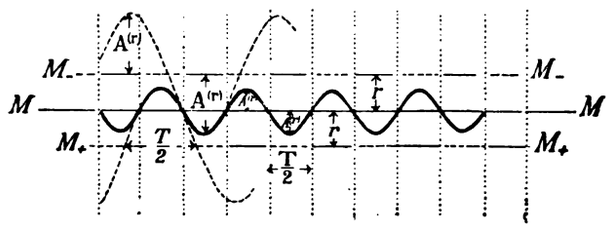
Ist die Amplitude der Störungen gross genug, um Bewegungen des Indikators zu verursachen, so bewirkt die Reibung eine Verkleinerung der Amplitude. a, A seien die jeweilig stattfindenden und die maximalen Ausschläge des Indikators, $a^{(0)}$, S_a diejenigen, welche sich bei Abwesenheit der Reibung ergeben würden. Für den letzteren Fall darf dann bei passender Verfügung über den Anfangspunkt der Zeit

$$a^{(0)} = S_a \sin 2\pi \frac{t}{T} \tag{270}$$

gesetzt werden.

Es kann vorkommen, dass der Indikator wegen der Reibung nicht stetig von einer Seite zur anderen, sondern ruckweise vorwärts schreitet, indem er von Zeit zu Zeit hängen bleibt; von dieser Komplikation soll abgesehen werden. Wir nehmen also an, dass der Indikator während je einer halben Periode T in der einen Richtung, während der anderen in der anderen fortschreitet. Die Reibung ergiebt dann abwechselnd in Zeitabschnitten von der Länge T/2 konstante Kräfte in entgegengesetzten Richtungen. Gemäss der Bemerkung am Schlusse des Artikels 55 wollen wir die wirklich eintretende Indikatorbewegung als Superposition auffassen der durch (270) dargestellten Bewegung, welche ohne die Reibung stattfinden würde, und derjenigen, welche den Reibungskräften allein entspräche. Die letztere, nur fingirte, soll nun aufgesucht werden.

In Figur 9 stellen wie früher MM, M_-M_-, M_+M_+ die wahre und die beiden verschobenen Mittellinien dar. Die punktirten vertikalen Linien sollen die Um-



Figur 9.

kehrzeiten der wirklichen Indikatorbewegung bezeichnen, also die Zeiten, in welchen bei der fingirten Bewegung die Störungskräfte plötzlich umspringen.

www.libtool.com.cn

Nach dem vorigen Artikel haben wir es in jedem Intervall zwischen zwei solchen Zeiten mit einer Eigenschwingung des Indikators um eine verschobene Mittellinie zu thun. Die so nach einander in Betracht kommenden Stücke der Mittellinien sind ausgezogen, die übrigen nur gestrichelt. Die Eigenschwingungen mit den maximalen Ausschlägeen $A^{(r)}$ in ihrer weiteren, hier nicht zur Geltung kommenden Ausdehnung sind zum Theil gestrichelt angedeutet. Die Kurve mit der Amplitude $A^{(r)}$, welche der fingirten Indikatorbewegung entspricht, ist ausgezogen. Zu den Sprungzeiten muss mit den Kräften auch die Indikatorbeschleunigung d^2a/dt^2 den Werth wechseln, etwas ähnliches gilt aber nicht auch von der Geschwindigkeit da/dt und dem Ausschlag a. Hieraus und aus der Symmetrie der Bewegung ist leicht ersichtlich, dass der Indikator in der Reibungsbewegung zu den Sprungzeiten die wahre Mittellinie mit unveränderter Richtung passiren muss.

Diese Ueberlegungen lehren, dass die zu den Reibungskräften gehörige fingirte Bewegung zwar aus Theilen von Sinusschwingungen besteht, aber nicht eine einheitliche Sinusschwingung darstellt, also auch nicht durch eine Formel der Art (270) beschrieben werden kann.

Die *Eigenbewegungen, von denen die fingirte Indikatorbewegung Stücke herauslöst*, entsprechen bei passend gewählter Anfangszeit der Formel

$$a^{(r)} \pm r = \mathrm{A}^{(r)} \cos 2\pi \frac{t}{T}; \tag{271}$$

unter Rücksicht hierauf ist aus der Figur abzulesen:

$$\mathrm{A}^{(r)} \cos 2\pi \frac{\mathrm{T}}{4T} = r, \tag{272}$$

sodass für die Amplitude $A^{(r)}$ der fingirten Reibungsbewegung folgt:

$$A^{(r)} = \mathrm{A}^{(r)} - r = r \frac{1 - \cos 2\pi \frac{\mathrm{T}}{4T}}{\cos 2\pi \frac{\mathrm{T}}{4T}}. \tag{273}$$

Ist die Störungsperiode T klein gegenüber der Eigenperiode T, so empfiehlt es sich, in (273) den Faktor des maximalen Reibungsanschlages r durch eine Reihenentwicklung zu ersetzen:

$$A^{(r)} = r \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{\mathrm{T}}{T}\right)^2 \left(1 + \frac{5\pi^2}{48} \left(\frac{\mathrm{T}}{T}\right)^2 + \cdots\right). \tag{274}$$

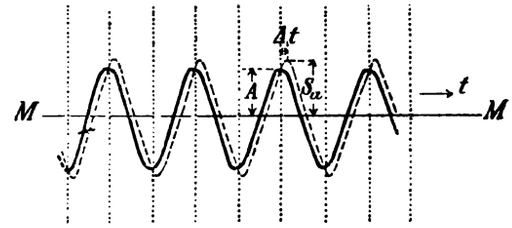
Bei kleinen Störungsperioden T *nimmt die Amplitude der fingirten Reibungsbewegung hiernach proportional mit dem Quadrat der Periode ab.*

Für die Geschwindigkeit des Indikators an den Uebungsstellen von einer einheitlichen Schwingung zur anderen, ergiebt sich mittels der Formel (271):

$$\frac{\mathrm{T}}{2\pi} \frac{\overline{da^{(r)}}}{dt} = r \frac{\mathrm{T}}{T} \operatorname{tg} 2\pi \frac{\mathrm{T}}{4T}. — \tag{275}$$

www.libtool.com.cn

Die wirkliche Indikatorbewegung entsteht durch Superposition der untersuchten fingirten Bewegung und derjenigen, welche ohne die Reibung stattfinden würde. Wird daher in Figur 10 durch die ausgezogene Kurve die wirkliche Bewegung, durch die gestrichelte Kurve diejenige bei Abwesenheit der Reibung bezeichnet, so müssen die Differenzen der jeweiligen Koordinaten $a^{(\nu)}$ angeben und durch die ausgezogene Kurve in Figur 9 dargestellt werden. Die punktirten vertikalen Linien in beiden Figuren sind hiernach einander zuzuordnen. Ihrer für Figur 9 festgestellten Bedeutung nach kennzeichnen sie die Umkehr der Bewegungsrichtung des Indikators, d. h. die Indikatorgeschwindigkeit 0. In Figur 10 müssen ihnen also maximale Ausweichungen der ausgezogenen Kurve entsprechen.



Figur 10.

Aus diesen Erwägungen ergiebt sich als für unsere Rechnung wesentliches Resultat, dass die Indikatorgeschwindigkeit bei der fingirten Reibungsbewegung in den punktirten Linien der Figur 9 gleich und entgegengesetzt der Indikatorgeschwindigkeit zu entsprechenden Zeiten bei der in Figur 10 gestrichelt dargestellten Bewegung ohne Mitwirkung der Reibung sein muss. Unter Rücksicht hierauf folgt:

$$S_a \sin 2\pi \frac{\Delta t}{T} = \frac{T}{2\pi} \overline{\frac{da^{(\nu)}}{dt}}, \tag{276}$$

wenn S_a die grösste Ausweichung bei reibungsloser Bewegung bedeutet, diese selbst durch

$$a^{(0)} = S_a \sin 2\pi \frac{t}{T} \tag{277}$$

dargestellt wird, und Δt in Anlehnung an Figur 10 die *Verfrühung des grössten Ausschlages infolge der Reibung* bezeichnet. Ferner erhalten wir für die *Verkleinerung der grössten Ausschläge durch die Reibung* die Formeln:

$$A = S_a \cos 2\pi \frac{\Delta t}{T}, \quad S_a^2 - A^2 = \left(\frac{T}{2\pi} \overline{\frac{da^{(\nu)}}{dt}}\right)^2, \tag{278}$$

in welchen S_a und A die grössten Ausschläge ohne und bei Mitwirkung der Reibung bezeichnen und $\overline{da^{(\nu)}/dt}$ durch (275) angegeben wird.

Wenn die Bewegung, welche ohne Reibung eintreten würde, unter eine gewisse Grenze herabsinkt, versagen unsere Ueberlegungen und Formeln. Die konstruirte ausgezogene Kurve der Figur 10 erhält dann nämlich andere Umkehrpunkte, als unserer ursprünglichen Annahme über die Bewegung des Indikators entspricht. Um die Verhältnisse zu übersehen, wollen wir beachten, dass die ausgezogene Kurve an den punktirten Linien, d. h. in den bisher von uns angenommenen Um-

www.libtool.com.cn

kehrpunkten einen Sprung in der Krümmung erleidet, wie es dem durch Reibung bewirkten Sprung in der Beschleunigung des Indikators entspricht. Hinter einer punktirten Linie ist die Krümmung jedesmal geringer als vorher. Sinkt nun die Amplitude der Bewegung mehr und mehr, so krümmt sich die Kurve schliesslich nach dem Sprunge umgekehrt und entfernt sich darum entgegen unserer Annahme von Neuem von der Mittellinie. Die bisherigen Umkehrpunkte werden dann durch andere ersetzt, indem sie selbst in Ruhepunkte übergehen. Die Reibungskräfte werden andere, als bei unseren Konstruktionen angenommen wurde, diese verlieren also ihre Bedeutung. Der Indikator wird nun abwechselnd auf jeder Seite der Mittellage eine Zeit lang ruhen, also im Diagramm eine parallele Linie zur Mittellinie ziehen, um dann mit neu beginnender Bewegung hinüberzugehen. —

Die *Grenze der Gültigkeit unserer früheren Darstellung* kennzeichnet sich dadurch, dass der zweite Differentialquotient des Ausschlags nach der Zeit für die ausgezogene Kurve der Figur 10 auf den punktirten Linien gerade zu 0 herabgeht. Hieraus folgt als Grenzbedingung:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathrm{A}^{(r)} \cos 2\pi \frac{\mathrm{T}}{4T} = \left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\right)^2 S_a \cos 2\pi \frac{\Delta t}{\mathrm{T}}. \tag{279}$$

Unter Benutzung der früheren Formeln (271), (275), (276), (278) ergiebt sich dann weiter, dass eine Kurve der in Figur 10 dargestellten einfachsten Art vom Indikator nur beschrieben wird, wenn die Störungen ohne die Reibung mindestens eine Amplitude

$$S_a = \left(\frac{\mathrm{T}}{T}\right)^2 r \sqrt{1+\left(\frac{T}{\mathrm{T}}\right)^2 \mathrm{tg}^2 2\pi \frac{\mathrm{T}}{4T}} \tag{280}$$

ergeben würden, und dass dabei die wirkliche Indikatorbewegung mindestens eine Amplitude von der Grösse

$$A = \left(\frac{\mathrm{T}}{T}\right)^2 r \tag{281}$$

hat. Schwingungen geringerer Ausdehnung werden vom Indikator mit Ruhepausen ausgeführt; auf die Komplikationen, welche sich so ergeben, soll nicht näher eingegangen werden. Ebenso mag der Hinweis genügen, dass bei grösseren Störungsperioden leicht ersichtlich noch weiterer Anlass zur Komplikation der Indikatorbewegung durch zeitweiliges Hängenbleiben geboten wird.

58. *Periodische Störungen bei Reibung im Gehänge und Dämpfung.* Das Auftreten der Dämpfung hat zur Folge, dass in der Indikatorgleichung rechts das Glied $-(2/\tau)(da/dt)$ hinzukommt. Für die Frage, welche Störungen mindestens nothwendig sind, um den ruhenden Indikator in Bewegung zu setzen, ist das ohne Belang; unsere Schlüsse im vorigen Artikel in dieser Richtung gelten also auch im Falle der Dämpfung bei Ersatz von T durch T_0.

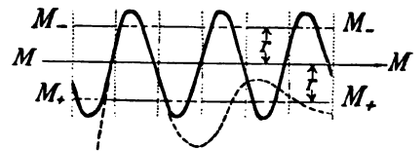
Die Verminderung des Indikatorausschlags durch die Reibung im Gehänge wird bei gleichzeitiger Wirkung von Dämpfung noch viel komplicirter gestaltet,

www.libtool.com.cn

als wir sie schon ohnedies fanden. Da aber dennoch die mathematischen Entwicklungen in wesentlich gleicher Weise geführt werden können, so werden hier unter Hinweis auf den vorigen Artikel kurze Andeutungen genügen.

Wieder beschränken wir uns auf den einfachsten Fall, wo der Indikator sich während einer halben Störungsperiode T in der einen Richtung und während der anderen in umgekehrter Richtung bewegt. Wiederum suchen wir zunächst die den Reibungskräften entsprechende Theilbewegung auf.

In jeder der halben Perioden findet auch jetzt eine freie Schwingung des Indikators in Bezug auf eine der beiden verschobenen Mittellagen statt, infolge der Dämpfung vollzieht sich der Uebergang von einer Schwingung zur nächsten jedoch nicht mehr in der wahren Mittellage. In Figur 11, welche sich an Figur 9 anlehnt, zeigt sich dieses darin, dass die Schnittpunkte der ausgezogenen Kurve der fingirten Indikatorbewegung mit den punktirt gezeichneten Uebergangslinien nicht mehr in die Mittellinie MM fallen. Da an den Uebergangsstellen weder im Ausschlag a noch in der Geschwindigkeit da/dt ein Sprung eintreten darf, erhalten wir zur Bestimmung der Kurve die beiden Bedingungen, dass am Ende jedes der Stücke Ausschlag und Geschwindigkeit entgegengesetzt gleiche Werthe wie am Anfang haben müssen. Für eines der zu M_+M_+ gehörigen Kurvenstücken darf bei passender Wahl des Anfangspunktes der Zeit geschrieben werden:



Figur 11.

$$a^{(r)} = A^{(r)} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos 2\pi \frac{t}{T} - r. \tag{282}$$

t_1 und t_2 seien die Zeitpunkte, in welchen das Kurvenstück begonnen und beendet wird. Dann gilt die erste der folgenden Gleichungen:

$$\begin{cases} \frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{T}{4}, \quad \frac{t_2 + t_1}{2} = \Delta' t; \\ t_1 = \Delta' t - \frac{T}{4}; \quad t_2 = \Delta' t + \frac{T}{4}; \end{cases} \tag{283}$$

die zweite fügen wir zur Definition von $\Delta' t$ hinzu und erhalten in der dritten und der vierten uns weiterhin bequeme Darstellungen von t_1 und t_2.

Zu t_1 und t_2 mögen die Werthe $a_1^{(r)}$, $a_2^{(r)}$, $(da^{(r)}/dt)_1$ und $(da^{(r)}/dt)_2$ gehören. Die vorhin formulirten Bedingungen zur Bestimmung der Indikatorkurve lauten dann:

$$a_1^{(r)} + a_2^{(r)} = 0, \quad \left(\frac{da^{(r)}}{dt}\right)_1 + \left(\frac{da^{(r)}}{dt}\right)_2 = 0 \tag{284}$$

und ergeben mittels (282):

www.libtool.com.cn

$$\text{(285)}\qquad \operatorname{tg} 2\pi\frac{\Delta' t}{T} = -\frac{\dfrac{T}{2\pi\tau}-\dfrac{e^{+\frac{T}{4\tau}}-e^{-\frac{T}{4\tau}}}{e^{+\frac{T}{4\tau}}+e^{-\frac{T}{4\tau}}}\operatorname{tg} 2\pi\dfrac{T}{4T}}{1+\dfrac{T}{2\pi\tau}\dfrac{e^{+\frac{T}{4\tau}}-e^{-\frac{T}{4\tau}}}{e^{+\frac{T}{4\tau}}+e^{-\frac{T}{4\tau}}}\operatorname{tg} 2\pi\dfrac{T}{4T}},$$

$$\text{(286)}\qquad A^{(r)}\tfrac{1}{2}\left\{e^{-\frac{\Delta' t-\frac{T}{4}}{\tau}}\cos 2\pi\frac{\Delta' t-\frac{T}{4}}{T}+e^{-\frac{\Delta' t+\frac{T}{4}}{\tau}}\cos 2\pi\frac{\Delta' t+\frac{T}{4}}{T}\right\} = r.$$

Die erste Gleichung erlaubt die Berechnung von $\Delta' t$, die zweite giebt dann $A^{(r)}$. Für die Amplitude und die Geschwindigkeit an den Uebergangsstellen folgt:

$$\text{(287)}\qquad \overline{a^{(r)}} = A^{(r)}\tfrac{1}{2}\left\{e^{-\frac{\Delta' t-\frac{T}{4}}{\tau}}\cos 2\pi\frac{\Delta' t-\frac{T}{4}}{T}-e^{-\frac{\Delta' t+\frac{T}{4}}{\tau}}\cos 2\pi\frac{\Delta' t+\frac{T}{4}}{T}\right\},$$

$$\text{(288)}\qquad \frac{T}{2\pi}\frac{\overline{da^{(r)}}}{dt} = \mp A^{(r)}e^{-\frac{\Delta' t\mp\frac{T}{4}}{\tau}}\left\{\frac{T}{2\pi\tau}\cos 2\pi\frac{\Delta' t\mp\frac{T}{4}}{T}+\frac{T}{T}\sin 2\pi\frac{\Delta' t\mp\frac{T}{4}}{T}\right\},$$

wobei in der zweiten Formel rechts nach Belieben die oberen oder die unteren Vorzeichen genommen werden können.

Die Bewegung des Indikators unter Mitwirkung der Reibung ergiebt sich durch Superposition der so bestimmten fingirten Reibungsbewegung über die Bewegung:

$$\text{(289)}\qquad a^{(0)} = S_a \sin 2\pi\frac{t}{T},$$

welche ohne Reibung stattfinden würde. Die Ueberlegungen gestalten sich dabei ähnlich, wie diejenigen, welche an Figur 10 geknüpft wurden. Wir wollen wieder mit Δt die Zeitdifferenz der Uebergangszeiten von einer Abtheilung der fingirten Reibungsbewegung zur anderen gegenüber den Zeiten grösster Ausweichung in der reibungslosen Bewegung bezeichnen, sodass Δt die Phasenverfrühung der grössten Ausweichungen infolge der Reibung darstellt, dann ergiebt sich zur Bestimmung von Δt wiederum die Formel

$$\text{(290)}\qquad S_a \sin 2\pi\frac{\Delta t}{T} = \frac{T}{2\pi}\frac{\overline{da^{(r)}}}{dt}.$$

Die Berechnung der Verkleinerung der grössten Ausschläge infolge der Reibung gestaltet sich aber dennoch komplicirter wie früher, weil noch berücksichtigt

www.libtool.com.cn

werden muss, dass die fingirte Reibungsbewegung nun nach (287) an den Uebergangsstellen von Null verschiedene Ausschläge besitzt. Bedeutet wiederum A den grössten Ausschlag bei Mitwirkung von Reibung, so folgt statt (278):

$$A = S_a \cos 2\pi \frac{\Delta t}{T} - \bar{a}_r. \quad (291)$$

Bei Störungsperioden, welche klein sind gegenüber der Eigenperiode, und bei nicht zu grosser Dämpfung — nicht stärkerer, als wir sie für die Praxis zweckmässig fanden , nähert sich nach diesen Formeln der Einfluss der Reibung bis auf Glieder höherer Ordnung in T/T bezüglich $T/2\pi\tau$ dem ohne Dämpfung, sodass unter Ersatz der Eigenperiode T durch die reducirte Schwingungsperiode T_0 die einfachen Formeln des vorigen Artikels verwendet werden können. Man darf dann für jede Abtheilung der fingirten Reibungsbewegung statt (271) und (282) schreiben:

$$a^{(r)} = \pm r 2\pi^2 \left(\left(\frac{T}{4T_0}\right)^2 - \left(\frac{t}{T_0}\right)^2 \right), \quad (292)$$

wobei der Zeit t das Intervall von $-T/4$ bis $+T/4$ anzuweisen ist. Die grösste Ausweichung bei der Bewegung wird:

$$A^{(r)} = r \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{T}{T_0}\right)^2. \quad (293)$$

An den Uebergangsstellen ist

$$\overline{a^{(r)}} = 0, \quad \frac{T}{2\pi} \overline{\frac{da^{(r)}}{dt}} = r \frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \quad (294)$$

zu setzen. — Für die Verzögerung Δt des grössten Ausschlages des Indikators durch die Reibung erhalten wir entsprechend (277) die Formel:

$$S_a \sin 2\pi \frac{\Delta t}{T} = r \frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{T_0}\right)^2, \quad (295)$$

wobei S_a den grössten Ausschlag bei Abwesenheit der Reibung bedeutet. Die Verkleinerung des grössten Ausschlages durch die Reibung wird wie nach (278) durch

$$S_a^2 - A^2 = \left(r \frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \right)^2 \quad (296)$$

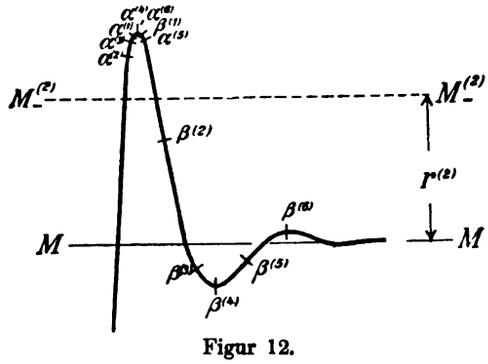
bestimmt, wenn A den wirklichen grössten Ausschlag des Indikators angiebt. —

Nach (296) ist die Verkleinerung der Indikatorausschläge durch die Reibung bei kleinen Störungsperioden T *auch im Falle der Dämpfung von der Grössenordnung* $r(T/T_0)^2$.

Um eine Uebersicht über die sehr komplicirten Verhältnisse bei grösseren Störungsperioden zu gewinnen, wo die eben zusammengestellten Formeln nicht mehr brauchbar sind, empfiehlt es sich, die Ueberlegungen an eine Figur, wie No. 12 zu knüpfen, welche die Eigenschwingungen des Instrumentes ohne Mit-

www.libtool.com.cn

wirkung der Reibung darstellt, und diejenigen Stücke der Kurve herauszusuchen, welche zur fingirten Reibungsbewegung gehören. Als Dämpfungsverhältniss ist in gezeichneten Falle 5 : 1 genommen worden. — Jedes zu einer fingirten Reibungsbewegung gehörige Stück, z. B. $\alpha^{(1)}\beta^{(1)}$, $\alpha^{(2)}\beta^{(2)}$, $\alpha^{(3)}\beta^{(3)}$, ... ist dadurch charakterisirt, dass an beiden Enden die gleiche Geschwindigkeit herrschen muss. Der zeitliche Abstand der Enden giebt jedesmal die halbe Störungsperiode, T/2 an. Das arithmetische Mittel der Ausschläge der beiden Enden muss gleich dem maximalen Reibungsausschlag r sein, das heisst, die beiden Enden müssen von einer der verschobenen Mittellinien (der *nicht* zugehörigen, $M_- M_-$ in den Fällen der Figur) gleich weit abstehen. Die verschobene Mittellinie erhält hiernach in der Figur für jedes andere Kurvenstück eine andere Lage. Soll die Figur also wirklich ein Indikatordiagramm bei Abwesenheit der Reibung wiedergeben, so müsste für jede andere Störungsperiode eine andere Intensität der Reibung vorausgesetzt werden. Will man die letztere, also den maximalen Reibungsausschlag, festhalten, so kann angenommen werden, dass die Figur das Indikatordiagramm nicht direkt, sondern in variirten Querdimensionen darstellt.



Figur 12.

In der Figur gehören $\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}$ zu $T = \frac{1}{10}T$, $\alpha^{(3)}, \beta^{(3)}$ zu $T = T/2$, $\alpha^{(4)}, \beta^{(4)}$ zu $T = T$, $\alpha^{(6)}, \beta^{(6)}$ zu $T = 2T$. Für $T = T/2$, also $T/4T = 45/360$ ist, da wir $\varepsilon : 1 = 5 : 1$, $T/2\pi\tau = 0{,}512$ annehmen, $T/4\tau = 0{,}40$, $\Delta' t/T = -6{,}2/360$, $\Delta' t/\tau = 0{,}055$, $a_1^{(r)} = 0{,}988\,A^{(r)} - r$, $a_2^{(r)} = 0{,}552\,A^{(r)} - r$, $A^{(r)} = 1{,}30\,r$, $\bar{a}^{(r)} = 0{,}28\,r$.

Man wird der Figur leicht entnehmen, *dass bei mittlerer Dämpfung für nicht zu kleine Störungsperioden* T *die Amplituden der fingirten Reibungsbewegung von der Grössenordnung des maximalen Reibungsausschlages r sind, dass also auch die Veränderung der Indikatorbewegung durch die Reibung von dieser Grössenordnung ist.* Für sehr kleine Störungsperioden ist nach (293) der Einfluss geringer. —

§ 8. Einwirkung der Reibung am Schreibstift.

59. *Reibung am Schreibstift.* Bei der Reibung am Schreibstift, der bei mechanischer Registrirung den Indikator darstellt, kommt als charakteristisches Element die Bewegung der Schreibfläche mit in Wirksamkeit. Wir wollen ihre Geschwindigkeit mit v, die in der Schwingungsperiode T oder T_0 zurückgelegte

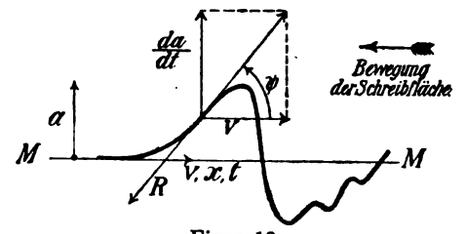
www.libtool.com.cn

Strecke mit w oder w_0 bezeichnen. Es sei ferner x die Strecke, um welche die Schreibtafel von einem beliebig gewählten Zeitpunkt ab vorgerückt ist. Nach diesen Festsetzungen gilt:

$$w = vT, \quad w_0 = vT_0, \quad x = x_0 + vt. \tag{297}$$

Figur 13 stelle ein Indikatordiagramm vor, MM sei die Mittellinie, die Schreibfläche bewege sich nach *links*.

a) Wir beginnen mit dem einfachsten Fall, in welchem *der Indikator geradlinig und senkrecht zur Mittellinie MM hin- und hergeht.*



Figur 13.

In Wirklichkeit bewegen sich Schreibfläche und Schreibstift, da es aber nur auf die Relativbewegung ankommt, ist es erlaubt und bequemer, in der Vorstellung die ganze Bewegung dem Schreibstift zu übertragen, also zum Beispiel für unsere Figur anzunehmen, dass er sich — ausser den Ausschlägen entsprechend auf und ab — der Registrirung entsprechend nach *rechts* bewege. ψ sei der Winkel seiner (Relativ-)Bewegung gegen die Mittellinie MM. Es ist dann:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{v}\frac{da}{dt}. \tag{298}$$

Die Reibung giebt eine der Relativbewegung entgegengesetzte Kraft. Da die Geschwindigkeit niemals 0 werden kann, haben wir den früheren Festsetzungen (in Artikel 53) entsprechend anzunehmen, dass die Intensität der Kraft stets unverändert den Maximalwerth, den wir R' nennen wollen, besitze. Als treibende Kraft für den Indikator ergiebt sich hiernach bei Anblick der Figur:

$$Q^{(R)} = -R'\sin\psi = -\frac{R'}{v}\frac{da}{dt}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{v}\frac{da}{dt}\right)^2}}. \tag{299}$$

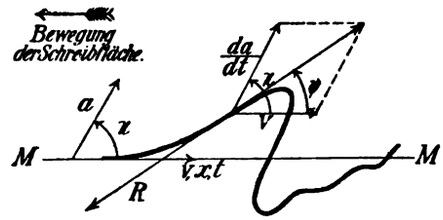
Bei sehr kleinen Indikatorgeschwindigkeiten da/dt darf die Wurzel in dem letzten Gliede der Gleichung (299) durch 1 ersetzt werden, $Q^{(R)}$ erscheint dann proportional mit da/dt. Wird da/dt grösser und grösser, so nimmt im Vergleich damit die Indikatorkraft $Q^{(R)}$ immer langsamer zu und nähert sich schliesslich, wenn die Indikatorgeschwindigkeit da/dt weit über die Registrirgeschwindigkeit v hinauswächst, dem Maximalwerth R' an. *Hieraus folgt, dass die Reibung am Schreibstift in ihrer Einwirkung auf die Indikatorbewegungen zwischen der Dämpfung und der Reibung im Gehänge steht. Sie zeigt um so genauer das Verhalten der Dämpfung, je kleiner die Indikatorgeschwindigkeit im Verhältniss zur Registrirgeschwindigkeit ist, und um so genauer das Verhalten der Reibung im Gehänge, je mehr die Indikatorgeschwindigkeit die Registrirgeschwindigkeit übertrifft. —*

www.libtool.com.cn

Die bisherigen Schlussfolgerungen beziehen sich auf den Fall der geradlinigen und zur Mittellinie senkrechten Bewegung des Indikators. Wir wollen nun der Reihe nach untersuchen, wie sie bei immer komplicirteren Bewegungsformen des Indikators zu ändern sind.

b) Der zunächst in Betracht kommende Fall ist derjenige, *in welchem die Indikatorbahn noch geradlinig, aber gegen die Mittellinie geneigt ist.*

χ sei der Winkel, den die Richtung der positiven Indikatorbewegung bei ruhend gedachter Schreibfläche gegen die Mittellinie bildet, ψ wiederum der entsprechende Winkel für die jeweilige Relativbewegung des Indikators (Figur 14). Es ist dann



Figur 14.

$$\text{(300)} \qquad \operatorname{ctg}\psi = \frac{1}{\sin\chi}\frac{v}{\frac{da}{dt}} + \operatorname{ctg}\chi,$$

$$\text{(301)} \qquad Q^{(R)} = -R'\cos(\chi-\psi). \; -$$

Ist da/dt sehr klein gegenüber v, so darf

$$\text{(302)} \qquad \sin\psi = \sin\chi\frac{1}{v}\frac{da}{dt}, \quad \cos\psi = 1,$$

also

$$\text{(303)} \qquad Q^{(R)} = -R'\cos\chi - \left(\frac{R'}{v}\sin^2\chi\right)\frac{da}{dt}$$

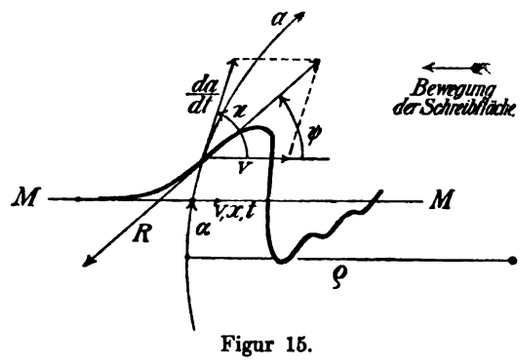
gesetzt werden. *Die Reibung im Gehänge entspricht also nun bei sehr kleinen Indikatorgeschwindigkeiten einer konstanten ablenkenden Kraft und einer Dämpfung.*

Ist andererseits da/dt sehr gross gegenüber v, so erhalten wir

$$\text{(304)} \qquad \psi = \chi \text{ oder } = \chi - \pi, \quad Q^{(R)} = \mp R';$$

bei sehr grossen Indikatorgeschwindigkeiten ergiebt sich also wieder die gleiche Wirkung wie bei Reibung im Gehänge.

c) Drittens untersuchen wir *den Fall einer kreisförmigen Indikatorbahn* (Figur 15).



Figur 15.

Am einfachsten wäre es, wenn der Mittelpunkt der Indikatorbahn auf der Mittellinie des Diagramms läge, die Bahn die Mittellinie also senkrecht schnitte. Es scheint aber nicht nöthig diesen Fall noch besonders auszuzeichnen; wir wollen vielmehr sogleich den Fall einer *„abgelenkten" Mittellage* betrachten und die *„Ablenkung"*, das heisst

www.libtool.com.cn

den (Bogen-)Abstand der Mittellage von der Lage, in welcher die Bewegungsrichtung senkrecht zur Registrirrichtung ist, mit α bezeichnen. Der Ausschlag a werde wie gewöhnlich von der Mittellage ab gerechnet; ψ möge dieselbe, χ die analoge, aus der Figur ersichtliche, Bedeutung wie vorhin haben; χ_0 gehöre zu $a = 0$. Es variirt dann χ mit a und zwar ist

$$\chi = \frac{\pi}{2} \mp \frac{\alpha}{\varrho} \mp \frac{a}{\varrho} = \chi_0 \mp \frac{a}{\varrho}. \tag{305}$$

Das obere oder untere Vorzeichen gilt, jenachdem die Registrirbewegung der Schreibfläche in der Richtung vom Mittelpunkt der Indikatorbahn zum Schreibstift, wie in der Figur, oder umgekehrt erfolgt. Zur Bestimmung der Kraft $Q^{(R)}$, welche der Indikator erfährt, erhalten wir wieder, wie im Falle b, die Formeln

$$\operatorname{ctg}\psi = \frac{1}{\sin\chi}\frac{v}{\frac{da}{dt}} + \operatorname{ctg}\chi, \quad Q^{(R)} = -R'\cos(\chi - \psi). \tag{306}$$

Bei sehr kleinen Indikatorgeschwindigkeiten ergiebt sich wiederum die Gleichung (303), wobei aber zu beachten ist, dass χ mit a variirt. Um zu einfachen Schlussfolgerungen zu gelangen, setzen wir auch die Indikatorausschläge selbst als klein voraus, ersetzen in (303) demgemäss $\cos\chi$ durch $\cos\chi_0 \pm (a/\varrho)\sin\chi_0$, $\sin^2\chi$ durch $\sin^2\chi_0$ und erhalten

$$Q^{(R)} = \mp\left(\frac{R'}{\varrho}\sin\chi_0\right)a - R'\cos\chi_0 - \left(\frac{R'}{v}\sin^2\chi_0\right)\frac{da}{dt}. \tag{307}$$

Bei (gegenüber der Registrirgeschwindigkeit v) sehr kleinen Indikatorgeschwindigkeiten da/dt und (gegenüber dem Radius der Indikatorbahn) sehr kleinen Indikatorausschlägen a entspricht die Reibung am Schreibstift einer dem Indikatorausschlag proportionalen stabilisirenden oder astasirenden Kraft, einer konstanten ablenkenden Kraft und einer mit der Indikatorgeschwindigkeit proportionalen dämpfenden Kraft.

Stabilisirung oder Astasirung tritt ein, jenachdem die Registrirbewegung der Schreibfläche in der Richtung vom Mittelpunkt der Indikatorbahn zum Schreibstift (wie in der Figur) oder umgekehrt erfolgt.

Bei (gegenüber der Registrirgeschwindigkeit v) sehr grossen Indikatorgeschwindigkeiten da/dt ergiebt sich wieder

$$Q^{(R)} = \mp R', \tag{308}$$

also die gleiche Wirkung wie bei Reibung im Gehänge.

d) Im allgemeinsten Fall muss nicht nur angenommen werden, dass die Bahn beliebig gekrümmt ist, sondern auch, dass als Ausschlag a eine beliebige Funktion der Bogenlänge zu rechnen ist. Es scheint unnöthig, auf die dann eintretenden Komplikationen weiter einzugehen, und genügend, darauf hinzuweisen, dass doch auch dann für kleine Stückchen der Bahn Kreisform und lineare Verknüpfung zwischen Bogenlänge und Ausschlag angenommen werden kann, sodass

www.libtool.com.cn

bei hinreichend kleinen Ausschlägen sowohl für sehr kleine als für sehr grosse Indikatorgeschwindigkeiten die Sätze unter c) gültig bleiben. —

Ueberblicken wir im Ganzen die Ueberlegungen dieses Artikels, so kann geschlossen werden, dass der Dämpfung gegenüber die Reibung am Schreibstift mit der Reibung im Gehänge den Uebelstand theilt, die Nachwirkung grosser Störungen nicht genügend stark zu beseitigen. Den schlimmsten Fehler der Reibung im Gehänge, den, die Aufzeichnungen sehr kleiner Störungen ganz zu unterdrücken, theilt sie nicht, indem sie sich solchen gegenüber wie eine Dämpfung verhält. Freilich zeigt die Erfahrung, dass manchmal sehr hohe, in der Praxis nicht erfüllbare Anforderungen in Betreff der Verminderung der Reibung am Schreibstift gestellt werden müssen, wenn die Beeinträchtigung der Aufzeichnungen kleiner Störungen nicht doch empfindlich hoch sein soll.

60. *Indikatorgleichung bei Reibung am Schreibstift.* In die Indikatorgleichung geht rechts Q/m ein, wobei m die resultirende Masse ist, die Gleichung erhält also im Falle (a) einer geradlinigen, zur Registrirrichtung senkrechten Indikatorbahn (Figur 13) die Form:

$$(309)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2a}{dt^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \dfrac{2}{\tau}\dfrac{da}{dt} \mp \dfrac{R}{m} - \dfrac{R'}{m}\sin\psi + \text{ Störungsglieder} \\ \qquad = -\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \dfrac{2}{\tau}\dfrac{da}{dt} \mp \dfrac{R}{m} - \dfrac{R'}{mv}\dfrac{da}{dt}\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{v}\dfrac{da}{dt}\right)^2}} + \text{ Störungsglieder.} \end{cases}$$

R ist auf die Reibung im Gehänge zu beziehen. Wie hier im einfachsten Falle, so geht allgemein die Indikatorgeschwindigkeit bei Reibung im Gehänge in transcendenter Weise in die Indikatorgleichung ein. *Das Prinzip der Superposition wird hiernach wie bei der Reibung im Gehänge verletzt.* Es kann wiederum gerettet werden, wenn man die Reibung als äussere Störung ansieht.

Unnöthig scheint, noch für die Fälle (b), (c), (d) die Indikatorgleichung besonders hinzuschreiben, wichtig aber ist für uns, zu untersuchen, welche Formen die Indikatorgleichung in den schon vorhin ausgezeichneten Fällen sehr geringfügiger und sehr heftiger Störungen annimmt. Dies soll im Folgenden unter A und B geschehen.

A. *Die Indikatorausschläge sind im Verhältniss zur Registrirgeschwindigkeit so geringfügig, dass der Indikator in der Relativbewegung zur Schreibfläche stets nur mit geringer Neigung gegen die Registrirrichtung fortschreitet.*

Wir wollen hier sogleich den allgemeinsten Fall beliebig geformter Indikatorbahn annehmen, und dürfen dann gemäss dem unter (d) und (c) im vorigen Artikel Gesagten und mit Benutzung von (307) schreiben:

$$(310)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2a}{dt^2} = -\dfrac{R'}{m}\cos\chi_0 - \left(\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\right)^2 \pm \dfrac{R'}{\varrho m}\sin\chi_0\right)a - \left(\dfrac{2}{\tau} + \dfrac{R'}{vm}\sin^2\chi_0\right)\dfrac{da}{dt} \\ \qquad\qquad \mp \dfrac{R}{m} + \text{ Störungsglieder.} \end{cases}$$

www.libtool.com.cn

ϱ ist der Krümmungsradius der Indikatorbahn in der Mittellage des Indikators, χ_0 für diese der Winkel der positiven Richtung in der Indikatorbahn gegen die Richtung, in welcher im Diagramm die Zeit fortschreitet, $\chi = \chi_0 \mp a/\varrho$ der entsprechende Winkel beim Ausschlag a. Hier und in den Faktoren, welche R' enthalten, ist das obere Zeichen zu nehmen, wenn der Krümmungsmittelpunkt gegenüber der Bahn auf der Seite liegt, von welcher die Schreibfläche sich her bewegt — wie in Figur 15 —, andernfalls das untere Zeichen. Vor R/m gilt das obere oder untere Zeichen, jenachdem da/dt positiv oder negativ ist.

Bedeutet T_0' den durch die Reibung am Schreibstift veränderten Werth der reducirten Schwingungsdauer, so ist nach (310):

$$\left(\frac{2\pi}{T_0'}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \pm \frac{R'}{\varrho m}\sin\chi_0 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\left(1 \pm \frac{r'}{\varrho}\sin\chi_0\right). \tag{311}$$

r' bedeutet hier den maximalen Reibungsauschlag, der zu R' gehören würde, wenn die Reibung am Schreibstift ebenso wirkte, wie die Reibung im Gehänge:

$$r' = \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 \frac{R'}{m}. \tag{312}$$

Ist die Veränderung von T_0 infolge der Reibung am Schreibstift nur gering, so kann man nach (311) auch schreiben:

$$T_0' = T_0\left(1 \mp \tfrac{1}{2}\frac{r'}{\varrho}\sin\chi_0\right). \tag{313}$$

Für die konstante Ablenkung infolge der Reibung am Schreibstift ergiebt sich nach (310) die Grösse

$$a' = -\frac{\frac{R'}{m}\cos\chi_0}{\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \pm \frac{R'}{\varrho m}\sin\chi_0} = -\frac{r'\cos\chi_0}{1 \pm \frac{r'}{\varrho}\sin\chi_0}, \tag{314}$$

wobei es meist erlaubt sein wird, einfacher

$$a' = -r'\cos\chi_0 \tag{315}$$

zu schreiben.

Aenderung der reducirten Schwingungsdauer und konstante Ablenkung werden in der Regel wenig bedeutungsvoll sein. Von grosser Wichtigkeit aber ist die Verstärkung der Dämpfung, die wir nun untersuchen wollen, denn in ihr beruht ja die Verminderung der Empfindlichkeit des Seismographen gegen sehr kleine Störungen.

Als Relaxationszeit tritt nach (310) anstelle von τ eine durch die Gleichung

www.libtool.com.cn

$$\frac{1}{\tau'} = \frac{1}{\tau} + \frac{R'}{2mv}\sin^2\chi_0 = \frac{1}{\tau} + \frac{2\pi^2}{T_0}\frac{r'}{w_0}\sin^2\chi_0 \tag{316}$$

bestimmte Zeit τ'.

Je grösser die Relaxationszeit ist, um so kleiner ist die Dämpfung; wir erkennen hiernach aus (316), *dass die Dämpfung infolge der Reibung am Schreibstift mit wachsender Registrirgeschwindigkeit abnimmt.*

In die Rechnungen über den Einfluss der Dämpfung geht vornehmlich der Ausdruck $T_0/2\pi\tau$ ein. Der Ersatzwerth bei Reibung am Schreibstift ist:

$$\frac{T_0'}{2\pi\tau'} = \frac{T_0'}{2\pi\tau} + \frac{T_0'}{4\pi}\frac{R'}{mv}\sin^2\chi_0 = \frac{T_0'}{2\pi\tau} + \pi\frac{T_0'}{T_0}\frac{r'}{w_0}\sin^2\chi_0. \tag{317}$$

Die Eigenschwingungen des Seismographen werden aperiodisch, wenn $T_0'/2\pi\tau'$ den Werth 1 erreicht. Wird die Mittellinie von der Bahnkurve senkrecht geschnitten, und ist keine besondere Dämpfung vorhanden, so tritt dieses ein für

$$R' = \frac{4\pi mv}{T_0'}, \quad r' = \frac{w_0}{\pi}\frac{T_0}{T_0'}. \tag{318}$$

Findet auch abgesehen von der Reibung am Schreibstift Dämpfung statt, so tritt die Aperiodicität schon bei kleineren Werthen der Reibungskraft R', bezüglich des zugehörigen maximalen Reibungsausschlages r' ein. Ist zum Beispiel ohne Mitwirkung der Reibung am Schreibstift das Dämpfungsverhältniss 5 : 1, also nach der Tabelle auf Seite 80 $T_0/2\pi\tau = 0{,}456$, so ergiebt sich Aperiodicität schon bei einer Intensität der Reibung entsprechend:

$$R' = 0{,}544\cdot\frac{4\pi mv}{T_0}, \quad r' = \frac{0{,}544}{\pi}w_0 = 0{,}173\,w_0.$$

Von einer etwaigen Aenderung der reducirten Schwingungsperiode durch die Reibung ist hier abgesehen.

B. *Die Indikatorbewegungen finden im Verhältniss zur Registrirgeschwindigkeit so heftig statt, dass der Indikator in seiner Relativbewegung zur Schreibfläche während des Haupttheiles der Zeit nahezu in derjenigen Richtung sich bewegt, welche sich bei ruhender Schreibfläche ergeben würde.* Wir ersetzen dann entsprechend den Ueberlegungen des vorigen Artikels $Q^{(R)}$ durch $\mp R'$ und erhalten als Indikatorgleichung

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2a}{dt^2} &= -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau}\frac{da}{dt} \mp \frac{R+R'}{m} + \text{Störungsglieder} \\ &= -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 (a \pm r \pm r') - \frac{2}{\tau}\frac{da}{dt} + \text{Störungsglieder}; \end{aligned}\right. \tag{319}$$

wobei von den doppelten Vorzeichen das obere oder untere gilt, jenachdem da/dt positiv oder negativ ist. Die Reibung am Schreibstift nimmt ganz das Verhalten der Reibung am Gehänge an.

www.libtool.com.cn

§ 9. Bestimmung der Konstanten.

61. *Direkte Bestimmung der Konstanten eines Horizontalseismographen ohne Reibung.* Wir wollen zunächst voraussetzen, dass die Reibung nicht merklich ist. Dann erfüllt der Indikatorausschlag a die Gleichung:

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau}\frac{da}{dt} - V^{(\omega)}\left(\frac{d^2\sigma}{dt^2} - g i_s - \Delta g_s\right), \tag{320}$$

wenn mit s die (horizontale) Arbeitsrichtung des Seismographen bezeichnet wird. σ ist seine Verschiebung $\| s$, i_s die Neigung parallel der zugehörigen Vertikalebene, Δg_s die ablenkende, parallel s gerichtete Komponente der Schwerkraft.

Direkt beobachtbar ist zunächst das Verhältniss $\varepsilon : 1$, in welchem wegen der Dämpfung die aufeinanderfolgenden grössten Ausschläge bei Eigenschwingungen abnehmen. Dieses *Dämpfungsverhältniss* liefert mittels der nach Artikel 47 gültigen Formeln:

$$\varepsilon = e^{\frac{T}{2\tau}}, \quad \frac{T}{2\pi\tau} = \frac{1}{\pi}\log\text{nat}\,\varepsilon = 0{,}733\log\varepsilon, \tag{321}$$

wobei $\log\varepsilon$ den gewöhnlichen Logarithmus bezeichnet, *den Werth von* $T/2\pi\tau$. Wird überdies die *thatsächliche Schwingungsperiode* T beobachtet, so ist es möglich, die *Relaxationszeit* τ zu bestimmen, ferner mittels der Gleichung

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = 1 + \left(\frac{T}{2\pi\tau}\right)^2 \tag{322}$$

die *reducirte Schwingungsperiode* T_0.

Bei *starker Dämpfung* ist es schwierig, T mit Schärfe zu messen, und daher vortheilhaft, wenn Vorsorge getroffen ist, die Dämpfung ohne Aenderung von T_0 bis auf einen kleinen Rest ausschalten zu können. Man geht dann den angegebenen Weg bei verminderter Dämpfung und bestimmt so T_0, schaltet darauf die volle Dämpfung ein und misst das Dämpfungsverhältniss $\varepsilon : 1$, welches mittels (321) und (322) die Relaxationszeit τ ergiebt. (Tabelle auf Seite 80.)

Es mag noch darauf hingewiesen werden, dass man gut thun wird, mit der Berechnung von τ zugleich die von $T_0/2\pi\tau$ zu verbinden, da gerade dieser Werth vornehmlich in die Rechnungen eingeht.

Mit T_0 hängt die „*äquivalente Pendellänge*“ L durch die Beziehung

$$\frac{g}{L} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \tag{323}$$

zusammen. Bei der Berechnung, wird es in den meisten Fällen durchaus genügen, für die Fallbeschleunigung g den unter 45° Breite im Meeresspiegel

www.libtool.com.cn

gültigen Werth

$$g = 9{,}81 \text{ (Meter, Sekunde)} \tag{324}$$

anzunehmen, der nirgends grössere Fehler als $^1/_8\,^0/_0$ ergiebt.

T_0, L, τ, T könnte man als *„innere Konstanten"* des Seismographen bezeichnen, wenn man ihnen als *„äussere Konstanten"* die *Indikatorvergrösserung* $V^{(\omega)}$, bezüglich die damit durch

$$J^{(\omega)} = LV^{(\omega)} \tag{325}$$

zusammenhängende *äquivalente Indikatorlänge* $J^{(\omega)}$ gegenüber stellt.

Die äusseren Konstanten ergeben sich am einfachsten durch Beobachtung der *Neigungsempfindlichkeit*. Bedeutet a den zur dauernden Neigung i_s gehörigen dauernden Ausschlag, so ist

$$\frac{a}{i_s} = J^{(\omega)} = LV^{(\omega)}. \tag{326}$$

i_s ist hier in Bogenmaass zu messen. — Benutzt man zur Herstellung von i_s zum Beispiel eine Stellschraube des Apparates von der Ganghöhe H, deren Kopf in N Theile getheilt ist, und die man um n Theile dreht, so ist

$$i_s = \frac{n}{N}\frac{H}{D}\sin\varphi, \tag{327}$$

wenn D den Abstand die Schraubenspitze von der Drehaxe und φ den Winkel zwischen der Drehaxe und der Arbeitsrichtung s bedeutet. Steht die Drehaxe auf der Arbeitsrichtung senkrecht, so geht (327) über in

$$i_s = \frac{n}{N}\frac{H}{D}. \tag{327'}$$

Es ist von einigem praktischen Interesse, zu beachten, dass diese einfache Formel sich auch dann ergiebt, wenn das Instrument auf drei Schrauben in den Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks steht, dessen Grundlinie parallel der Arbeitsrichtung s ist, sofern man eine der Schrauben an der Grundlinie zur Erzeugung der Neigung i_s benutzt und unter D die Länge der Grundlinie versteht.

Der *Ausschlag für eine Bogensekunde* ist $J^{(\omega)}/206000$.

62. *Indirekte Bestimmung der äusseren Konstanten eines Horizontalseismographen; Einleitung.* Ist es nicht möglich, die Neigungsempfindlichkeit zu messen, so ist, da wohl nur ausnahmsweise die Vergrösserung $V^{(\omega)}$ sehr kleiner Erschütterungen direkt bestimmt werden kann, die Feststellung der äusseren Konstanten erheblich umständlicher. *Es wird nöthig, auf die besondere Art der Konstruktion des Seismographen Rücksicht zu nehmen, und gemäss dieser $V^{(\omega)}$ oder $J^{(\omega)}$ zu berechnen.*

Manchmal lässt sich die *Empfindlichkeit gegen sehr schnelle Erschütterungen* leicht angeben, wie zum Beispiel bei den Horizontalpendeln einfachster Art. Man beginnt hier mit der Messung der Schwingungsperiode des eigentlichen Pendels unter der Einwirkung der Schwerkraft, wenn die Schwingungsaxe hori-

www.libtool.com.cn

zontal gestellt ist. Bedeutet T' die gefundene Periode, so liegt der Schwingungsmittelpunkt um die Strecke

$$L' = g\left(\frac{T'}{2\pi}\right)^2 \tag{328}$$

von der Drehaxe entfernt. Bedenkt man, dass in dem für die Registrirung vorbereiteten Instrument bei sehr schnellen Verschiebungen dieser Punkt in Ruhe bleibt, so wird es sogleich möglich, aus den Abmessungen des Instrumentes und seiner Stellung gegenüber dem Registrirapparat $V^{(\omega)}$ zu berechnen. — Ist eine Dämpfung vorhanden, und wird sie bei der Bestimmung von L' nicht in ordnungsmässiger Weise verwandt, so giebt die Methode allerdings nur dann brauchbare Resultate, wenn die Dämpfung nicht merklich T_0 ändert. Darüber wird eine besondere Untersuchung entscheiden müssen.

Sobald die Konstruktion Komplikationen zeigt, empfiehlt es sich, die durch die allgemeine Theorie (Artikel 34) gebotene Formel

$$V^{(\omega)} = \frac{1}{m}\int d\mu\left[\frac{\sigma'}{a}\right] \tag{329}$$

zu benutzen. Es bedeutet hierin m die resultirende Masse des Gehänges und ist die Summe über alle Massenelemente $d\mu$ des Gehänges auszudehnen, jedes multiplicirt mit der zum Ausschlag a gehörigen Verschiebung σ' relativ zum Gestell in der Richtung s und dividirt durch a.

63. *Bestimmung der resultirenden Masse.* Die resultirende Masse kann entweder durch Rechnung oder experimentell bestimmt werden. Im ersteren Falle kann man die allgemeine Formel

$$m = \int d\mu\left[\frac{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}{a^2}\right], \tag{330}$$

worin $\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2$ das Quadrat der zu a gehörigen Verschiebung von $d\mu$ gegen das Gestell bedeutet, meist in mannigfacher Weise bequemer gestalten.

In der Regel wird das Gehänge aus einer Anzahl von *festen Einzeltheilen bestehen, deren jeder sich relativ zum Gestell um eine bestimmt gegebene Axe dreht.* Es möge in einem solchen Falle l der Abstand irgend eines zweckmässig gewählten Punktes eines solchen Theiles von seiner Drehaxe, α die zu a gehörige Verschiebung des Punktes sein, M die ganze Masse des Theiles, p der Abstand seines Schwerpunktes von der Axe, Θ das Trägheitsmoment um eine zur Drehaxe parallelen Axe durch den Schwerpunkt. Dann ist

$$\left(\frac{p}{l}\right)^2 \mathrm{M} + \frac{1}{l^2}\Theta = \frac{1}{l^2}(p^2\mathrm{M}+\Theta) \tag{331}$$

zunächst seine resultirende Masse im ausgewählten Punkt und also

$$\left[\frac{\alpha}{a}\right]^2 \frac{1}{l^2}(p^2\mathrm{M}+\Theta) \tag{332}$$

sein Antheil an der resultirenden Masse m im Indikator.

www.libtool.com.cn

M wird im Allgemeinen durch direkte Wägung festgestellt werden können. p ergiebt sich leicht, wenn man den Theil auf Schneiden auflegt oder an Fäden aufhängt.

Lässt sich die Drehaxe des Theiles horizontal lagern, und kann man ihn dann unter der alleinigen Einwirkung der Schwerkraft schwingen lassen, so ist

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{gp\mathrm{M}}{p^2\mathrm{M}+\Theta}, \tag{333}$$

wenn T die Schwingungsperiode bedeutet, man erhält also bei schon bekanntem Werth von $p\mathrm{M}$ sogleich $p^2\mathrm{M}+\Theta$.

Kann man die Drehaxe des Theiles vertikal stellen, so empfiehlt sich folgende Methode zur Bestimmung von $p^2\mathrm{M}+\Theta$. Man setzt eine Federkraft, welche den Theil in eine bestimmte Lage zu führen strebt, wenn eine solche noch nicht vorhanden sein sollte, in passender Weise hinzu, ohne die Massen merklich zu vergrössern. Die Schwingungsperiode sei T. Es ist dann

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{p^2\mathrm{M}+\Theta}{F}, \tag{334}$$

wobei F von der Intensität der Federkraft abhängt. Im Abstande p' von der Drehaxe werde nun eine Masse M' mit dem Trägheitsmoment Θ' in Bezug auf die eigene Schwerpunktsaxe hinzugefügt und die sich ergebende Schwingungsperiode T' ebenfalls beobachtet. Es ist

$$\left(\frac{T'}{2\pi}\right)^2 = \frac{p^2\mathrm{M}+\Theta+p'^2\mathrm{M}'+\Theta'}{F}, \tag{335}$$

also folgt:

$$\frac{T^2}{T'^2-T^2} = \frac{p^2\mathrm{M}+\Theta}{p'^2\mathrm{M}'+\Theta'}, \tag{336}$$

und es kann $p^2\mathrm{M}+\Theta$ nun berechnet werden, wenn $p'^2\mathrm{M}'+\Theta'$ bekannt ist. Das letztere ist in üblicher Weise zu erreichen, indem man das Zusatzgewicht (M') zweckmässig wählt.

Eine der zuletzt beschriebenen ähnliche Methode lässt sich manchmal mit sehr grossem Vortheil anwenden, *um die ganze resultirende Masse m mit einem Mal zu bestimmen.* Man fügt zu diesem Zweck an irgend einem der beweglichen Theile *ohne Veränderung der zurücktreibenden Kräfte* eine Masse so hinzu, dass die Vermehrung m' der resultirenden Masse m des Gehänges (mittels der Formel 332) leicht berechnet werden kann, und beobachtet die Vergrösserung der Schwingungsperiode. Ist T_0' die vergrösserte reducirte Schwingungsperiode, so gilt die Beziehung

$$m : m+m' = T_0^2 : T_0'^2, \tag{337}$$

welche m zu berechnen erlaubt. —

www.libtool.com.cn

64. *Indirekte Bestimmung der äusseren Konstanten eines Horizontalseismographen; Einzelnes.* Auch für $\int d\mu\,[\sigma'/a]$ wird man leicht Vereinfachungen der Rechnung finden. Ein jeder der vorhin betrachteten drehbaren Theile liefert zu $\int d\mu\,[\sigma'/a]$ den Antheil

$$\mathrm{M}\left[\frac{\sigma'}{a}\right],$$

wobei σ' die zum Ausschlag a gehörige Verschiebung des Schwerpunktes parallel der Arbeitsrichtung s bedeutet. —

Zuweilen ist es möglich und bequem die *äusseren Konstanten* $V^{(\omega)}$, $J^{(\omega)}$ *durch experimentelle Bestimmung der Empfindlichkeit gegen Schwereänderungen festzustellen.* Zwar hat man über die Schwerekomponente Δg_s, auf die es hier ankommt, keine Gewalt, man kann sie aber im Experiment ersetzen durch Kräfte anderer Art, die man auf die Massen des Gehänges in passender Weise einwirken lässt. Es geschieht das zum Beispiel, wenn man an jedem Massentheil M des Gehänges im Schwerpunkt eine Kraft von der Intensität

$$\mathrm{M}\,\Delta g_s \tag{338}$$

parallel s wirken lässt. Ist der Ausschlag, den man dann erhält a, so folgt nach der Indikatorgleichung (320)

$$V^{(\omega)} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \frac{a}{\Delta g_s}, \quad J^{(\omega)} = LV^{(\omega)} = \frac{g}{\Delta g_s} a. \tag{339}$$

—

Die erforderliche Kraft $\mathrm{M}\,\Delta g_s$ entspricht einem Zug, welcher der Schwerkraft entgegen eine Masse

$$\Delta \mathrm{M} = \mathrm{M}\,\frac{\Delta g_s}{g} \tag{340}$$

zu tragen vermag. — Bezeichnen wir das für das Experiment gewählte Verhältniss $\Delta g_s/g$ mit i_s:

$$i_s = \frac{\Delta g_s}{g} = \frac{\Delta \mathrm{M}}{\mathrm{M}}, \tag{341}$$

so wird

$$J^{(\omega)} = \frac{a}{i_s}, \tag{342}$$

wodurch in leicht übersehbarer Weise die Bedeutung des Experimentes auch als eine indirekte Bestimmung der Neigungsempfindlichkeit dargethan wird. —

Bei der Ausführung der Messungen wird man sich für einen gewissen Werth i_s des Verhältnisses $\Delta g_s/g$ entscheiden, unter Verwerthung von (340) die Züge parallel s entsprechend reguliren, den Indikatorausschlag a beobachten und mittels (342) $J^{(\omega)}$ berechnen. —

Der Theorie wird in erster Linie entsprochen, wenn die Züge $\mathrm{M}\,\Delta g_s = \Delta \mathrm{M}.g$ in den Schwerpunkten der Massen M wirken. Statt dessen kann man sie in beliebig anderer Weise angreifen lassen, sofern man dafür sorgt, dass die näm-

www.libtool.com.cn

liche Indikatorresultante hervorgeht. Ist zum Beispiel für einen drehbaren Theil des Gehänges mit der Masse M der Abstand des Schwerpunktes von der Axe $= p$, so kann $M \Delta g_s = \Delta M . g$ durch die Kraft $\Delta M' . g = \Delta M . (p/l) g$ im Abstande l in gleicher Richtung von der Axe ersetzt werden. — Lässt sich der Theil vom übrigen Mechanismus absondern und mit horizontaler Axe lagern, und ist im Abstande l von der Axe ein Zug $= M' . g$, das heisst ein Zug, welcher der Schwere der Masse M' entspricht, nöthig, um den Schwerpunkt von M in gleicher Höhe mit der Drehaxe zu halten, so ist $M' = Mp/l$, also $\Delta M'/M' = i_s$. Die Rücksicht hierauf wird bei der experimentellen Feststellung von M' oftmals in willkommener Weise die Bestimmung des Schwerpunktes von M ersetzen.

Bei den mechanisch schreibenden Seismographen mit erheblicher Vergrösserung hat der Schreibarm zunächst auf die resultirende Masse und damit auch auf die äusseren Konstanten einen sehr grossen, leicht zu unterschätzenden Einfluss. Für mein astatisches Pendel ist bei 200-facher Vergrösserung der Bewegungen des Schwerpunktes des 1200 Kilogramm-Gewichtes die resultirende Masse des letzteren, im Schwerpunkt vereinigt gedacht, doch nur

$$\frac{1200}{200 . 200} \text{ Kilogramm} = 30 \text{ Gramm.}$$

Wäre also der den Schreibstift führende Arm auch nur so schwer, dass er am Schreibstift einer Masse von 30 Gramm entspäche, so würde er nach (329) die Indikatorvergrösserung doch schon auf etwa die Hälfte reduciren. Wie man sieht, kommt es selbst bei so grossem Pendelgewicht sehr darauf an, die Massenwirkung des Schreibarmes mit Sorgfalt zu vermindern. —

65. *Bestimmung der Konstanten eines Vertikalseismographen.* Die Indikatorgleichung lautet, wenn von der Reibung abgesehen wird

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau}\frac{da}{dt} - V^{(\omega)}\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \Delta g_s\right). \tag{343}$$

Ueber die Bestimmung der inneren Konstanten T_0, $L = g(T_0/2\pi)^2$, τ gilt genau das in Artikel 61 Gesagte.

Eine direkte Methode zur Bestimmung der äusseren Konstante $V^{(\omega)}$, der *Indikatorvergrösserung*, welche der Benutzung der Neigungsempfindlichkeit bei Horizontalseismographen entspräche, giebt es nicht. Eine direkte Methode, welche auf die Bedeutung von $V^{(\omega)}$ als Vergrösserung sehr schneller Vertikalbewegungen Rücksicht nimmt, wird nur selten anwendbar sein, so muss man im allgemeinen seine Zuflucht zu indirekten Methoden nehmen, welche auf die Eigenart der Konstruktion gegründet sind. Was in den Artikeln 62—64 für die Horizontalseismographen gesagt wurde, ist dabei im Wesentlichen auch hier verwerthbar.

Besonders empfehlenswerth ist meistens die in Artikel 64 besprochene Methode, welche der Benutzung einer Schwerkraftänderung entspricht. Da es sich hier um eine Schwerkraftvermehrung handelt, können die nothwendigen Züge

www.libtool.com.cn

einfach durch Auflegen oder Anhängen von Zusatzgewichten ΔM, bezüglich $\Delta M'$ gewonnen werden. Ist $\Delta g_s = \gamma g$ die gewählte Schwerkraftvermehrung, so ist $\Delta M = \gamma M$, $\Delta M' = \gamma M'$ zu nehmen, und man erhält $V^{(s)}$ mittels der Formel

$$V^{(s)} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \frac{a}{\Delta g_s} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \frac{1}{g}\frac{a}{\gamma} = \frac{a}{\gamma L}, \tag{344}$$

wenn a die gefundene Aenderung der Indikatorruhelage bedeutet. —

Ganz besonders wichtig ist es, jeden Vertikalseismographen sorgfältig auf eine etwaige Wirksamkeit auch als Horizontalseismographen zu untersuchen, denn es kann dazu sehr leicht versteckte Gelegenheit gegeben sein. Sollte sich eine Horizontalempfindlichkeit herausstellen, so lassen sich nur bei Vergleich der Aufzeichnungen des Apparates mit denen eines Horizontalseismographen sichere Schlüsse auf die Vertikalverrückungen ξ machen. Die Indikatorgleichung lautet dann (von der Reibung abgesehen):

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau}\frac{da}{dt} - V^{(s)}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - g i_s - \Delta g_s\right) - V^{(s)}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - \Delta g_s\right), \tag{345}$$

wenn die Richtung der Horizontalempfindlichkeit mit x bezeichnet wird, oder auch:

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau}\frac{da}{dt} - V^{(s)}\left(\frac{d^2\sigma}{dt^2} - g i_s \sin(s, z) - \Delta g_s\right), \tag{346}$$

wenn mit s die Wirkungsrichtung des Seismographen, seine *„äquivalente Schwingungsrichtung"* bezeichnet wird, die in der Ebene (x, z) liegt und mit der Vertikalen einen Winkel (s, z) bildet, dessen Tangente $= V^{(s)}/V^{(z)}$ ist. i_s bedeutet die Neigung parallel der Vertikalebene durch s und ist $= i_s$.

66. *Bestimmung der Konstanten bei Seismographen II. Klasse.* Bedeutung hat bisher von Seismographen II. Klasse nur der Klinograph von W. Schlüter gewonnen, es scheint daher hinreichend, allein diese Gruppe von Apparaten als ein Beispiel zu diskutiren. Da die Wirksamkeit als Seismograph I. Klasse sich kaum ganz beseitigen lässt, wollen wir als Indikatorgleichung annehmen:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2a}{dt^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \dfrac{2}{\tau}\dfrac{da}{dt} - V^{(x)}\left(\dfrac{d^2x}{dt^2} - g i_x - \Delta g_x\right) \\ \qquad\qquad - V^{(y)}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2} - g i_y - \Delta g_y\right) - V^{(z)}\left(\dfrac{d^2z}{dt^2} - \Delta g_z\right) - W^{(i_z)}\dfrac{d^2 i_z}{dt^2}, \end{cases} \tag{347}$$

wobei die x-Richtung der Verticalebene parallel gelegt ist, in der die Neigungen erfolgen, gegen welche der Seismograph in II. Klasse empfindlich ist. Ueber die Bestimmung der Konstanten T_0, τ, $V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$ gilt hier dasselbe, wie bei Seismographen I. Klasse. Es kommt für uns allein noch die Bestimmung der Konstanten II. Klasse $W^{(i_x)}$ in Betracht. Eine direkte Messung von $W^{(i_x)}$ als Empfindlichkeit gegen sehr schnelle Neigungsänderungen scheint möglich, aber nicht sehr vortheilhaft und ging bei dem bisher allein aktuellen Apparat von Schlüter nicht an. Die indirekte Bestimmung mittels der Rechnung wird an die

www.libtool.com.cn

in Artikel 34 aufgestellte Formel

$$W^{(i_n)} = \frac{1}{m}\int d\mu \left(z\left[\frac{\xi'}{a}\right] - x\left[\frac{\zeta'}{a}\right]\right) \tag{348}$$

knüpfen müssen, wobei m die resultirende Masse des Gehänges, x, z die Koordinaten seines Massenelementes $d\mu$ in Bezug auf ein System bedeuten, dessen y-Axe als Drehaxe für die Neigungen i_n gilt.

Zur Erhöhung der Uebersicht bei der Berechnung von $W^{(i_n)}$ wird man sich daran erinnern können, dass $a = -W^{(i_n)} i_n$ der plötzliche Indikatorausschlag bei einer plötzlich erfolgenden Neigung i_n ist, ferner, dass $-(d^2 i_n/dt^2)\int d\mu\,(z[\xi'/a] - x[\zeta'/a])$ die Resultante der Trägheitskräfte ist, welche durch die Neigungsbeschleunigung $d^2 i_n/dt^2$ wach gerufen werden, wenn das Gehänge gezwungen wird, die Neigungen des Apparates mitzumachen. Erleichterungen der Rechnung werden sich ferner einstellen, wenn man beachtet, dass die Trägheitskräfte irgend eines Theiles des Gehänges nach dem einfachen Prinzip der Superposition gewonnen werden können, wenn man seine jeweilige Bewegung irgend wie in Parallelverschiebungen und Drehungen zertheilt. So wird man zum Beispiel leicht erkennen, dass ein fester Theil des Gehänges, der um eine zur x-Richtung senkrechte horizontale Axe drehbar ist und relativ zum Gestell die Neigung i'_n ausführt, wenn der Indikator um a ausschlägt, zum Integral $\int d\mu (z[\xi'/a] - x[\zeta'/a])$ den Antheil

$$\mathrm{M}\varrho p \cos(p, \varrho)\left[\frac{i'_p}{a}\right] + (p^2\mathrm{M} + \Theta)\left[\frac{i'_p}{a}\right] \tag{349}$$

liefert, wobei $\varrho = \sqrt{x^2 + z^2}$ den Abstand der Drehaxe des Theiles von der für die Neigungen i_n gültigen Drehaxe bedeutet, und M die Masse des Theiles, Θ das Trägheitsmoment um eine zur Drehaxe parallelen Axe durch den Schwerpunkt, p der Abstand des Schwerpunktes von der Drehaxe des Theiles ist. Der Winkel (p, ϱ) ist zu rechnen zwischen der Richtung von der für i_n gültigen Axe nach der Drehaxe des Theiles und der Richtung von der Drehaxe des Theiles nach dem Schwerpunkt seiner Masse. — Das erste Glied von (349) entspricht der Parallelverschiebung des Theiles, das zweite der Drehung um seine eigene Axe, die beide zusammen der Neigung i_n äquivalent sind. — Der Antheil des Theiles zur resultirenden Masse m ist

$$(p^2\mathrm{M} + \Theta)\left[\frac{i'}{a}\right]^2. \; — \tag{350}$$

Der einfachste Klinograph wird geboten durch ein Pendel langsamer Schwingungsdauer, dessen Drehaxe in die für i_n angenommene Axe fällt. Dann giebt es nur einen drehbaren Theil, wie wir ihn besonders betrachteten, und es wird (bei $\varrho = 0$):

$$\begin{cases} \int d\mu \left(z\left[\frac{\xi'}{a}\right] - x\left[\frac{\zeta'}{a}\right]\right) = (p^2\mathrm{M} + \Theta)\left[\frac{i'}{a}\right], \\ m = (p^2\mathrm{M} + \Theta)\left[\frac{i'}{a}\right]^2, \end{cases} \tag{351}$$

www.libtool.com.cn

also

$$W^{(i_0)} = \left[\frac{a}{i'}\right], \tag{352}$$

wie ja von vorne herein einleuchtend ist. —

67. *Bestimmung der Reibungskonstanten.* Wirkt Reibung mit, so kann die Indikatorgleichung geschrieben werden:

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0'}\right)^2 (a \pm r + r' \cos(\chi - \psi)) - \frac{2}{\tau}\frac{da}{dt} + \text{Störungsglieder}, \tag{353}$$

wobei die Konstante r sich auf die Reibung im Gehänge und die Konstante r' sich auf die Reibung am Schreibstift bezieht ((253), (306), (312)). Vor r ist das positive oder negative Zeichen zu nehmen, jenachdem a wächst oder abnimmt; die Bedeutung von χ und ψ erhellt aus den Figuren 14 und 15 (Seite 100). Da die Reibung am Schreibstift, sofern sie überhaupt vorhanden ist, durch Abheben des Schreibstiftes leicht ausgeschaltet werden kann, wird es sich in allen Fällen zunächst darum handeln, unter Verwerthung von Artikel 56 neben T_0 und τ die Reibung im Gehänge, also den *„maximalen Reibungsausschlag“* r zu bestimmen. T_0 kann durch Astasirung oder Stabilisirung meist mannigfach geändert werden, ohne dass die Reibungskräfte merklich variiren. Es bleibt dann

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 r = \frac{R}{m} \tag{354}$$

konstant, wobei R die Indikatorresultante der Reibungskräfte ist; r aber ändert sich. Für die Beurtheilung der Intensität der Reibungskräfte ist r unter solchen Umständen nicht geeignet. *Es empfiehlt sich als Maass für den Fehler des Seismographen wegen Reibung*

$$(r)_1 = \frac{r}{T_0^2} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{R}{m}, \tag{355}$$

das heisst „den zur Schwingungsperiode von einer Sekunde gehörigen maximalen Reibungsausschlag“ zu wählen. Durch Multiplikation mit $4\pi^2$ ergiebt er R/m und erlaubt daher leicht die Berechnung der Reibungsresultante R, sobald die resultirende Masse m bekannt ist.

Bei den experimentellen Bestimmungen ist zu beachten, dass wie T_0 und τ, so auch die Schwingungsperiode T durch die Reibung im Gehänge nicht beeinflusst wird. Für r steht uns nach Artikel 56 bei nicht merklicher Dämpfung die Gleichung

$$\frac{1}{4n}(l_0 - l_n) = r \tag{356}$$

zur Verfügung, wobei l_0 die anfängliche Schwingungsweite, das heisst den Weg des Indikators von einer grössten Ausweichung bis zur nächsten, l_n die Schwingungsweite der $n$ten folgenden Schwingung bedeutet (Figur 6, Seite 86).

www.libtool.com.cn

Ist Dämpfung vorhanden, so tritt an Stelle von (356) nach (259):

$$(357) \qquad l_0 \frac{1}{\varepsilon^n} - l_n = 2r \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^n}\right) = 2r\left(1+\frac{2}{\varepsilon}+\cdots+\frac{2}{\varepsilon^{n-1}}+\frac{1}{\varepsilon^n}\right),$$

wobei $\varepsilon:1$ das Dämpfungsverhältniss ist. Für die Berechnung ist es bequem, zu bemerken, dass bei verschieden gewählten Anfangswerthen l_0, l_0' — die natürlich derselben Schwingungsreihe angehören können — und entsprechend verschiedenen Endwerthen l_n, l_n'

$$(358) \qquad \frac{l_0-l_0'}{l_n-l_n'} = \varepsilon^n$$

ist. Diese Gleichung kann zur Bestimmung von ε dienen, worauf sich dann r mittels (357) ergiebt. Setzt man $l_0' = l_1$, $n = 1$, daher $l_n = l_1$, $l_n' = l_2$, beobachtet demgemäss drei aufeinanderfolgende Schwingungsweiten, so wird

$$(359) \qquad \frac{l_0-l_1}{l_1-l_2} = \varepsilon, \quad \frac{1}{2}\frac{l_1^2-l_0 l_2}{l_0-l_2} = r.$$

Bei sehr starker Dämpfung, wo l_2 nicht mehr gut beobachtbar ist, kann man den Seismographen zweimal in verschiedener Stärke in Schwingungen versetzen, der einen Schwingungsreihe l_0, l_1, der anderen l_0', l_1' entnehmen, und erhält dann

$$(360) \qquad \frac{l_0-l_0'}{l_1-l_1'} = \varepsilon, \quad \frac{1}{2}\frac{l_1 l_0'-l_0 l_1'}{l_0+l_1-l_0'-l_1'} = r.$$

Kann die Dämpfung ausgeschaltet, oder doch stark vermindert werden, so wird man zweckmässig zunächst bei verminderter Dämpfung r feststellen, dann unter Benutzung des gefundenen Werthes von r bei voller Dämpfung mittels (357) ε bestimmen. Setzt man dabei $n = 1$, so ergiebt sich einfach

$$(361) \qquad \frac{l_0-2r}{l_1+2r} = \varepsilon. —$$

Auch bei der Reibung am Schreibstift wird man als festzustellende Grösse zweckmässig den *maximalen Reibungsausschlag* r' ansehen, der hier freilich nur bei ruhender Schreibfläche direkte Bedeutung hat, sonst Rechnungsgrösse ist. *Ein Maass für den Fehler des Instrumentes infolge der Reibung am Schreibstift ist wieder*

$$(362) \qquad (r_1') = \frac{r'}{T_0} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{R'}{m},$$

„der zur Schwingungsperiode von einer Sekunde gehörige maximale Reibungsausschlag“.

Bei der experimentellen Bestimmung von r' thut man gut, die Registrirgeschwindigkeit so zu verlangsamen, dass für die Eigenbewegungen des Seismometers die Kurve gerade noch auflösbar ist. Dann verhält sich die Reibung am Schreibstift nicht wesentlich anders als die im Gehänge, und es ergiebt also die vorhin beschriebene Methode der Bestimmung des maximalen Reibungsausschlages direkt $r+r'$. Da r schon bekannt ist, folgt nun r'.

www.libtool.com.cn

§ 10. Auswerthung der Diagramme.

68. *Einleitung.* Unser Weg durch die Theorie hat uns nun bis zur Grenze der Praxis geführt. Wir begannen mit der Untersuchung der Bewegungen der Erdoberfläche, welche durch den Seismographen aufgezeichnet werden sollen, fragten uns, wie die Aufzeichnungen von der Konstruktion des Seismographen abhängen, und studirten die bei materiellen Mechanismen nothwendig sich einstellenden Bewegungshemmnisse, welche in der Dämpfung nützlich, in der Reibung unerfreulich sind. Stets untersuchten wir ausführlich, wie die besonders wichtigen periodischen seismischen Störungen im Diagramm wiedergegeben werden. — Unsere Ueberlegungen führten zu der Erkenntniss, dass die Wirksamkeit eines Seismographen bei beliebiger Konstruktion von verhältnissmässig nur wenigen Konstanten bestimmt wird. Die Mittel zu ihrer Feststellung haben wir eben erst aufgesucht. So wissen wir denn nun, wie die Bewegung des Indikators mit dem Verlauf der Störungen zusammenhängt, und sehen uns vor die Aufgabe gestellt, die gewonnenen Kenntnisse für die Praxis zu verwerthen. Es möge erlaubt sein, im Hinblick hierauf noch einige Worte hinzuzufügen.

Für einen Horizontalseismographen kommen in erheblichem Abstande vom Erdbebenherde nur die Horizontalverrückungen parallel der Wirkungsrichtung des Seismographen in Betracht. Bezeichnen wir die Richtung mit s, die Verrückung mit σ, so ergiebt demgemäss die Indikatorgleichung (353) bei seismischen Störungen:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = -\frac{1}{V^{(\omega)}}\left\{\frac{d^2a}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 (a \pm r + r'\cos(\chi - \psi)) + \frac{2}{\tau}\frac{da}{dt}\right\} \tag{363}$$

als eine gewiss recht komplicirte Formel zur Bestimmung der seismischen Verrückungen σ. Zur Vereinfachung wird man bei der Konstruktion des Apparates vor allem danach streben müssen, die schädlichen und für die Auswerthung der Diagramme besonders unbequemen Reibungsglieder soweit herabzudrücken, dass sie zu Korrektionen herabsinken, die nur hin und wieder und beiläufig zu berücksichtigen sind. Können sie ganz vernachlässigt werden, so erhalten wir an Stelle von (363) die Formel

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = -\frac{1}{V^{(\omega)}}\left\{\frac{d^2a}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a + \frac{2}{\tau}\frac{da}{dt}\right\}. \tag{364}$$

Auch die Anwendung dieser macht noch erhebliche Umstände. Am einfachsten ist es, wenn die Periode T_0 so gross und gleichzeitig die Dämpfung so klein gemacht werden kann, dass die beiden letzten Glieder rechts für die seismischen Störungen nicht merklich in Betracht kommen; dann ergiebt (364):

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = -\frac{1}{V^{(\omega)}}\frac{d^2a}{dt^2}, \quad \sigma = -\frac{1}{V^{(\omega)}}a, \tag{365}$$

www.libtool.com.cn

der Seismograph scheint eine durchaus „*stationäre*“ Masse zu enthalten, relativ welcher die Bewegungen der Erdoberfläche parallel s in $V^{(a)}$-facher Vergrösserung umgekehrt aufgezeichnet werden.

In der Regel wird es freilich nicht möglich sein, die Eigenperiode des Instrumentes gegenüber den Perioden der seismischen Störungen hoch genug zu treiben, um diese Vereinfachung zu erreichen. Es müssen dann die beiden letzten Glieder in (364) noch beachtet werden.

Verhältnissmässig einfach gestaltet sich die Beurtheilung periodischer Störungen. Von dem Satze der Superposition Nutzen ziehend, kann man im Diagramm selbst schon die verschiedenen vorkommenden Perioden aufsuchen, und gemäss Paragraph 6 auf die Amplitude und die Phase der Störungen schliessen. — Interessant ist dabei der hin und wieder sich ereignende Fall, dass zwei nahe gleiche Perioden gleichzeitig auftreten, sodass die Amplitude in der Indikatorkurve abwechselnd anschwillt und herabsinkt. In den Bäuchen erhält man dann die Summe der Amplituden beider Bewegungen, in den Knoten die Differenz. Die Zahl der Ausweichungen von einem Bauch bis zu einem Knoten entspricht der Zahl der Schwingungen mit der grösseren Amplitude, die Zahl der vollständigen Schwingungen mit der kleineren Amplitude ist um $\frac{1}{2}$ grösser oder kleiner, jenachdem sich die grössten Ausweichungen mehr um die Bäuche oder um die Knoten zusammenschieben. — Wenn die interferirenden Perioden der Eigenperiode des Seismographen nahe kommen, wird man unter Umständen zweifelhaft sein, ob nicht etwa die Störungen einheitlicher Periode sind, und Eigenschwingungen das Phänomen verursachen, die durch die Störungen sekundär erregt worden sind. Bei wenig gedämpften Eigenschwingungen kann dem in der That so sein; bei kräftiger Dämpfung wird man bedenken müssen, dass die anfänglich erregten Eigenschwingungen entsprechend schnell herabsinken, also nur wenige Hin- und Her-Gänge des Indikators beeinflussen können. —

So wichtig die Rolle auch ist, welche die periodischen Schwingungen in den seismischen Störungen übernehmen, so kommen sie doch keineswegs allein in Betracht. Insbesondere zeigen sich oft stossartige Bewegungen in sehr charakteristischer Weise als Einleitung der einzelnen Phasen des Erdbebens, oder auch sonst in seinem Verlaufe. Die Göttinger Erfahrungen machen es wahrscheinlich, dass das Studium dieser einzelnen Stösse sich für die Seismometrie einst als wichtig erweisen wird. Mehrfach ist es schon jetzt gelungen, aus der Art, wie sich die Stösse in den verschiedenen Komponenten der Bewegungen der Erdoberfläche äussern, Schlüsse auf die Richtung zu ziehen, in welcher der Herd liegt. In den in der Einleitung erwähnten Fällen ferner, wo zwei oder mehrfach nacheinander sehr nahe übereinstimmende Erdbebendiagramme erhalten wurden, zeigten sich insbesondere auch die stossartigen Bewegungen in gleicher Weise. So scheint es denn durchaus geboten, diesen besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Bei ihrer Behandlung wird sich die direkte Bezugnahme auf die Gleichung (364), eventuell sogar unter Berücksichtigung der Reibungsglieder auf (363) nicht umgehen lassen. Doch kommt uns dabei oft zugute, dass es

www.libtool.com.cn

sich um Episoden handelt, die verhältnissmässig einfach und schnell verlaufen, oder die doch wenigstens einen charakteristischen und scharf markirten Anfang zeigen, auf dessen Untersuchung man sich eventuell beschränken kann.

Es bieten sich zwei Wege der direkten Rechnungen mittels (364) oder (363), indem man entweder darauf ausgehen kann $d^2\sigma/dt^2$ oder σ zu bestimmen.

69. *Bestimmung der Beschleunigungen, Kräfte und scheinbaren Neigungen.* $d^2\sigma/dt^2$ bedeutet zunächst *die Beschleunigung der Erdoberfläche* in der Richtung σ, dann, für einen Körper, der gezwungen ist, die Bewegungen der Erdoberfläche mitzumachen, *eine Zugkraft in der Richtung* σ. Rechnet man gemäss dem physikalischen Maasssystem nach Centimeter und Sekunden, so heisst die Einheit der Beschleunigung „*Gal*". Die Schwerebeschleunigung, die man gerne zum Vergleich heranziehen wird, ist im Mittel 981 Gal; bei Naheerdbeben kann es sich um viele Gal handeln, *bei Fernerdbeben wird das „Milligal"* = 1/1000 *Gal eine bequeme Einheit sein.* — Der Zug, welchen 1 Gramm Masse erfährt, ist gleich so viel *Dynen* als $d^2\sigma/dt^2$ *Gal* beträgt, und *der Zug, welchen 1 Kilogramm erfährt, gleich so viel Dynen als* $d^2\sigma/dt^2$ *Milligal beträgt.* $(-d^2\sigma/dt^2)/g$ giebt, wie wir in der Einleitung erfuhren, die *scheinbare Neigung* $[i_\sigma]$ der Erdoberfläche an. 1 Milligal in $d^2\sigma/dt^2$ bedeutet daher (1/1000).(1/981).206000 = 0,210 Winkelsekunden:

$$(366)\quad [i_\sigma] = -\frac{1}{g}\frac{d^2\sigma}{dt^2} \text{ in Bogenmaass } \left(= -0{,}210.1000\cdot\frac{d^2\sigma}{dt^2} \text{ in Winkelsekunden}\right).$$

Um $d^2\sigma/dt^2$ aus den Seismogrammen mittels der Gleichung

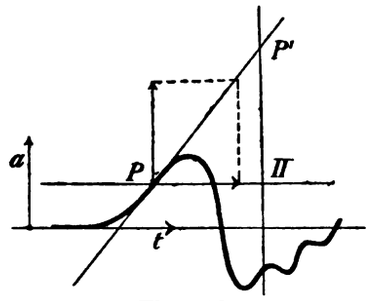
$$(367)\qquad \frac{d^2\sigma}{dt^2} = -\frac{1}{V^{(\sigma)}}\left\{\frac{d^2a}{dt^2}+\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a+\frac{2}{\tau}\frac{da}{dt}\right\}$$

zu erhalten, wird man zunächst den Ausschlag a selbst ablesen und das zweite Glied rechts berechnen. Dabei können mancherlei Hülfsmittel zur Erleichterung der Ablesung und der Berechnung (Tabellen, Rechenschieber etc.) verwendet werden. Bewegt sich der Indikator auf einem Kreisbogen, so wird — wenigstens für grössere Ausschläge — auch die Ablesung auf einem solchen erfolgen müssen.

Auch da/dt liesse sich durch Messung der Kurvenneigung direkt dem Diagramm entnehmen. Aus verschiedenen praktischen Gründen, vor allem, weil bei schnellen Indikatorbewegungen die Messung so zu ungenan würde, empfiehlt es sich meist mehr, zunächst mittels der abgelesenen a-Werthe eine neue Indikatorkurve in zweckmässigen Grössenverhältnissen zu zeichnen, wobei t als Abscisse, a als rechtwinklige Ordinate genommen werden. Es wird damit im Grunde nichts anderes als ein neues Indikatordiagramm mit zur Mittellinie senkrechten Indikatorbahn gewonnen, wie ein solches in Figur 13 Seite 99 dargestellt worden ist, und mit passenden Aenderungen hier in Figur 16 nochmals beigefügt wird. *Man konstruirt nun in dem betreffenden Punkt, etwa P, die Parallele zur Mittellinie und die Tangente der Kurve, sucht dann auf einer in einem bestimmten Abstande von P zur Mittellinie senkrechten Geraden die Schnittpunkte Π und P' auf, und*

www.libtool.com.cn

erhält in $\Pi P'$ ein Maass für da/dt. Entspricht $P\Pi$ auf der Abscissenskala der Zeit einem Zeitintervall von U Sekunden und $\Pi P'$ auf der Ordinatenskala der Indikatorausschläge einem Ausschlag A, so ist:



Figur 16.

$$\frac{da}{dt} = \frac{A}{U}. \tag{368}$$

Will man in $\Pi P'$ direkt da/dt ablesen, so ist nach (368) eine Theilung mit U-mal grösseren Intervallen zu benutzen als bei dem Auftragen der Ordinaten a.

Die Bestimmung von d^2a/dt^2 und damit des Hauptgliedes rechts in (367), des ersten Gliedes, bietet die meisten Schwierigkeiten. Eine direkte Auswerthung — durch Beobachtung des Krümmungsradius der Indikatorkurve — ist noch weniger zu empfehlen als bei da/dt. Weit zweckmässiger scheint es, die für da/dt gefundenen Werthe nun zur Konstruktion einer Kurve zu benutzen, welche da/dt in ganz gleicher Weise in rechtwinkligen Koordinaten darstellt, wie die Kurve in Figur 16 den Ausschlag a. Man erhält dann d^2a/dt^2 durch die gleiche Operation wie vorhin da/dt. Ist U wiederum das mit $P\Pi$ äquivalente Zeitintervall und bedeutet A' den Werth von da/dt, welcher gemäss der Ordinatentheilung zur Strecke $\Pi P'$ gehört, so ist

$$\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{A'}{U}. \tag{369}$$

Wieder kann d^2a/dt^2 in $\Pi P'$ direkt abgelesen werden, wenn die benutzte Theilung U-mal weitläufiger als die Ordinatentheilung ist.

Ist es nöthig, die Reibung zu berücksichtigen, so wird man bei der Bestimmung des zweiten Gliedes rechts in (367) nach Vorschrift von (363) Korrekturen anbringen müssen. —

70. *Bestimmung von Verrückungen.* Für die Bestimmung der Verrückung σ liefert die Indikatorgleichung (364) ohne Berücksichtigung der Reibung:

$$\left\{\begin{aligned} \sigma = \sigma_0 &+ \frac{1}{V^{(\omega)}}\left\{a_0 + (t-t_0)\left(V^{(\omega)}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0 + \left(\frac{da}{dt}\right)_0 + \frac{2}{\tau}a_0\right)\right\} \\ &- \frac{1}{V^{(\omega)}}\left\{a + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt\, a + \frac{2}{\tau}\int_{t_0}^{t} dt\, a\right\}. \end{aligned}\right. \tag{370}$$

Die in der ersten Zeile rechts geschriebenen konstanten und mit t proportionalen Glieder haben für die Praxis nur geringe Bedeutung. Man wird in der Regel gut thun, sie zunächst beiseite zu lassen und aus den sich dann für σ ergebenden Resultaten nachträglich, wenn nöthig, auf ihren Beitrag zu schliessen. Setzt eine seismische Störung plötzlich ein, während der Apparat bis dahin in Ruhe war, so fallen sie ganz fort.

www.libtool.com.cn

Von den drei wesentlichen, letzten Gliedern rechts in (370) bereitet hier gerade umgekehrt wie bei der Bestimmung der Beschleunigung das erste, welches wieder das Hauptglied ist, die geringsten, das zweite die meisten Schwierigkeiten.

Wir haben es jetzt mit Längen zu thun und werden passend nach Millimetern oder Bruchtheilen davon rechnen.

Der Werth des ersten Gliedes ergiebt sich durch direkte Ablesung.

Die Auswerthung des dritten Gliedes verlangt einfache, die des zweiten Gliedes doppelte Integration. Es ist wohl denkbar, dass die Anwendung besonderer Integrationsmaschinen Vortheile bieten kann, im Allgemeinen und vorläufig wird man aber wohl auf die Rechnung angewiesen sein. Ich möchte folgendes Verfahren empfehlen, welches die einfache Trapezformel benutzt und sogleich erlaubt, den Verlauf von σ in einem gegebenen Zeitintervall festzustellen.

Die Trapezformel lautet für das Integral einer beliebigen Funktion p von x in den Grenzen x_0 und x:

$$\int_{x_0}^{x} dx\, p = \frac{\Delta x}{2}((p_0+p_1)+(p_1+p_2)+(p_2+p_3)+\cdots+(p_{n-1}+p_n)). \tag{371}$$

Dabei ist eine Theilung der Strecke von x_0 bis x in n gleiche Theile der Länge $\Delta x (= (x-x_0)/n)$ vorausgesetzt. $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}, p_n$ sind die Werthe von p am Anfang, in den Theilpunkten und am Ende der Strecke. Zur Anwendung von (371) in unserem Falle werden wir im Diagramm nach einem gewissen möglichst engen Zeitintervall (1 Sekunde, $\frac{1}{2}$ Sekunde, ...) fortschreiten. Sind dann $t_0, t_1, t_2, \ldots$ die zugehörigen Zeiten, $a_0, a_1, a_2, \ldots$ die zugehörigen Ausschläge, so erhalten wir

$$\left\{\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} dt\, a &= \frac{\Delta t}{2}(a_0+a_1), \\ \int_{t_0}^{t_2} dt\, a &= \frac{\Delta t}{2}((a_0+a_1)+(a_1+a_2)), \\ \int_{t_0}^{t_3} dt\, a &= \frac{\Delta t}{2}((a_0+a_1)+(a_1+a_2)+(a_2+a_3)), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right. \tag{372}$$

Die praktische Ausführung der Rechnung kann man etwa gemäss folgendem Schema gestalten:

(373)

I	II	III	IV	V
a_0	a_0	0	0	0
	0		0	
a_1	a_1	Σa_1	Σa_1	$\Sigma\Sigma a_1$
	Σa_1		$\Sigma\Sigma a_1$	
a_2	a_2	Σa_2	Σa_2	$\Sigma\Sigma a_2$
	Σa_2		$\Sigma\Sigma a_2$	
a_3	a_3	Σa_3	Σa_3	$\Sigma\Sigma a_3$
	Σa_3		$\Sigma\Sigma a_3$	
a_4	a_4	Σa_4	Σa_4	$\Sigma\Sigma a_4$

www.libtool.com.cn

Man schreibt die abgelesenen Werthe $a_0, a_1, a_2, \ldots$ der Reihe nach, jedoch mit Lücken von je einer Zeile untereinander, wie unter I angedeutet, und füllt dann die Lücken aus, nacheinander a_0+a_1, $a_0+a_1+a_1+a_2$, ... berechnend. Setzt man zur Abkürzung

$$(374)\quad \Sigma a_1 = a_0+a_1, \quad \Sigma a_2 = a_0+2a_1+a_2, \quad \Sigma a_3 = a_0+2a_1+2a_2+a_3, \quad \ldots,$$

zu lesen: „Summe bis a_1" $= a_0+a_1$, „Summe bis a_2" $= a_0+2a_1+a_2$, und so fort, so ist

$$(375)\quad \Sigma a_1 = a_0+a_1, \quad \Sigma a_2 = a_1+\Sigma a_1+a_2, \quad \Sigma a_3 = a_2+\Sigma a_2+a_3, \quad \ldots,$$

man hat also bei Ausführung der Rechnung stets drei übereinanderstehende Zahlen zu addiren, um den nächsten Summenwerth zu finden. Das Resultat ist die Aufstellung II. Eine Kontrolle der Rechnung lässt sich jederzeit erreichen, indem man den schrittweise berechneten Werth Σa_ν mit dem direkt mittels der Formel

$$(374')\qquad \Sigma a_\nu = a_0+2(a_1+a_2+\cdots+a_{\nu+1})+a_\nu$$

sich ergebenden Werth vergleicht. — Zweckmässiger, als Hineinschreiben der Zahlen Σa_ν auf der Schreibfläche der a_ν selbst, ist die Verwendung eines darübergelegten durchsichtigen oder kammartig ausgeschnittenen Papieres. Man kann die Reihe II dann jederzeit in die Reihen I und III zertheilen.

Für die Formel (370) zur Berechnung der Verrückung σ ist schliesslich

$$(376)\qquad \int_{t_0}^{t_\nu} dt\, a = \frac{\Delta t}{2}\Sigma a_\nu$$

zu setzen. —

$\iint dt\, a$ folgt aus $\int dt\, a$ gerade so wie $\int dt\, a$ aus a, wir werden also in (370)

$$(377)\qquad \int_{t_0}^{t_\nu} dt \int_{t_0}^{t_\nu} dt\, a = \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \Sigma\Sigma a_\nu$$

setzen, und die Doppelsummen gemäss dem Schema IV in (273) in derselben Weise aus den einfachen Summen berechnen, wie vorhin diese aus den Ausschlägen a_ν. —

Die *Reibung* entspricht nach der vollständigen Indikatorgleichung (353) in ihrer Wirkung einem Ausschlag

$$(378)\qquad a^{(\varkappa)} = \pm r + r' \cos(\chi-\psi),$$

hat also bei der Bestimmung der Verrückung σ mittels der Integralformel (370) das Auftreten eines Gliedes

$$(379)\qquad -\frac{1}{V^{(a)}}\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt\, a^{(\varkappa)}$$

www.libtool.com.cn

zur Folge. Die Berechnung kann gemäss dem Schema (373) gerade so geschehen wie die des entsprechenden Gliedes in (370).

Die Multiplikationen der zunächst berechneten Funktionen rechts in (370) mit den Faktoren $1/V^{(\omega)}$, $(2\pi/T_0)^2/V^{(\omega)}$, $2/\tau V^{(\omega)}$ lassen sich bei Anwendung von Rechenmaschinen oder Rechenschieber ziemlich leicht ausführen. Sie können ganz vermieden werden, wenn man darauf ausgeht, für σ eine Kurve zu zeichnen, und wenn man dabei die Ordinaten σ_y aus den einzelnen Theilen rechts in (370) unter Anwendung verschiedener Maassstäbe zusammensetzt. Die Schwierigkeit, welche hierbei durch die im Allgemeinen etwas veränderliche Grösse von T_0 und τ bereitet wird, kann durch Anwendung von Maassstäben mit konvergirenden Theilstrichen, von Proportionalzirkeln und ähnlichen Hülfsmitteln umgangen werden. —

71. *Besondere Fälle.* Auch ohne die soeben beschriebenen umständlichen Rechnungen ist es oftmals möglich, in Bezug auf die unperiodischen Störungen bedeutungsvolle Schlüsse zu ziehen. Besonders wichtig scheinen folgende Sätze: *Wenn der vorher ruhige oder nur unbedeutend bewegte Indikator in Bewegung geräth und bis zur ersten Umkehr den grössten Ausschlag a erreicht, so ist die entsprechende Verrückung der Erdoberfläche mindestens gleich $-a/V^{(\omega)}$. Zur Zeit des grössten Ausschlages hat die Erdoberfläche die ursprüngliche Lage noch nicht wieder erreicht.* — Ist die Reibung nicht merklich, so kann weitergehend noch hinzugefügt werden, *dass die ursprüngliche Lage von der Erdoberfläche auch dann noch nicht erreicht ist, wenn der Indikator die Ruhelage wieder passirt.* — Die Richtigkeit der Sätze lässt sich leicht erkennen, sobald man beachtet, dass in den betrachteten Zeiträumen die Glieder rechts in (370) sämmtlich Werthe gleichen Vorzeichens haben. —

Liefert ein reibungsloser Horizontalseismograph Diagramme mit gleichen Konstanten für 2 verschiedene Arbeitsrichtungen, oder sind 2 solche einfache Seismographen mit gleichen Konstanten für die beiden Arbeitsrichtungen aufgestellt, und findet man in den Diagrammen nach vorheriger Ruhe die gleichen Bewegungen nur mit anderer Intensität aufgezeichnet, *so folgt, dass der Erdboden die entsprechende Bewegung in gerader Linie ausgeführt hat und in einer Richtung, die durch den Satz vom Parallelogramm angegeben wird.* Stehen insbesondere die beiden Arbeitsrichtungen aufeinander senkrecht und bezeichnen wir sie mit x, y, die zugehörigen Ausschläge mit a_x, a_y, so ist

$$\operatorname{tg}(s, x) = \frac{a_y}{a_x}, \tag{380}$$

wenn (s, x) den Winkel zwischen der Erdbewegung und der x-Richtung bedeutet.

Eine etwaige Reibung verkleinert den kleineren Ausschlag relativ stärker als den grösseren, lässt also die Schwingungsrichtung des Erdbodens der stärkeren Komponente näher liegend erscheinen, als zutreffend ist. —

72. *Vervollständigungen.* Bei *Vertikalseismographen, welche auch gegen Horizontalverrückungen noch merklich empfindlich sind*, erhält man mittels der Rechnungen

www.libtool.com.cn

der beiden letzten Paragraphen nicht direkt $d^2\xi/dt^2$ bezüglich ξ, sondern

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{V^{(\omega)}}{V^{(\omega)}}\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{V^{(\psi)}}{V^{(\omega)}}\frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad \text{bezüglich} \quad \xi+\frac{V^{(\omega)}}{V^{(\omega)}}\xi+\frac{V^{(\psi)}}{V^{(\omega)}}\eta. \tag{381}$$

Die Vertikalkomponente der Erdbodenbewegung ergiebt sich daher erst, wenn mittels Horizontalseismographen die Horizontalkomponente festgestellt ist.

In besonderen Fällen, vor Allem in der Nähe der Erdbebenherde, ***kommen bei den seismischen Störungen neben den Verrückungen auch die Neigungen in Betracht.*** In solchen Fällen werden die Integralrechnungen des Artikels 70 zunächst bedeutungslos, die Differentialrechnungen des Artikels 69 aber ergeben

$$-\frac{1}{g}\frac{d^2\sigma}{dt^2}+i_s = [i_s]+i_s \tag{382}$$

anstelle von $-d^2\sigma/g\,dt^2$, also die *Summe der scheinbaren und der wirklichen Neigungen* anstelle der scheinbaren Neigungen. Zur Trennung muss ein Seismograph II. Klasse herangezogen werden. Nehmen wir an, dass er auch eine Empfindlichkeit I. Klasse hat, so liefert sein Diagramm mittels gleicher Rechnungen, wobei nur $W^{(i_s)}$ anstelle von $V^{(\omega)}$ tritt:

$$-\frac{1}{g}\frac{d^2 i_s}{dt^2}+\frac{V^{(\omega)}}{W^{(\omega)}}([i_s]+i_s). \tag{383}$$

So kann denn durch Verwerthung beider Diagramme $d^2 i_s/dt^2$ und weiter — etwa durch Rechnungen gemäss Schema (373) — i_s berechnet werden. Unter Rücksicht auf die Ergebnisse des Seismographen I. Klasse für $[i_s]+i_s$, folgt dann auch $[i_s]$ und durch Integration σ.

Bei periodischen Störungen wird es vortheilhaft sein, die Resultate der Artikel 50 und 51 zu benutzen. Macht sich die Reibung bemerkbar, so kann man entweder die Ueberlegungen der Paragraphen 7 und 8 in Bezug auf periodische Störungen verwerthen, oder zunächst die Einwirkung der Reibung aus den Diagrammen durch Rechnung eliminiren.

www.libtool.com.cn

Erklärung einiger Bezeichnungen.

Allgemeines.

$e = 2{,}71828\ldots$, $\pi = 3{,}14159\ldots$.

g = Schwerebeschleunigung (= ca. 981 Centimeter, Sekunden).

Periode (einer Schwingung): Zeitintervall bis zur Wiederkehr der gleichen Phase, — umfasst also zwei sogenannte „einfache“ Schwingungen.

Koordinaten und Bewegungen der Erdoberfläche.

Referenzpunkt: Punkt der Erdoberfläche, auf den die seismischen Störungen bezogen werden.

x, y, z: *rechtwinklige Koordinaten* eines Systemes, dessen Anfangspunkt im Referenzpunkt liegt, und dessen z-Axe vertikal nach oben gerichtet ist; zugleich Bezeichnungen für die *Richtungen* der Koordinaten-Axen.

s: beliebige Richtung, im Speciellen also auch x, y, z.

ξ, η, ζ, σ: *Verschiebungen* parallel x, y, z, s.

$\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z, \vartheta_s$: *Drehungen* (in Bogenmaass) um Axen parallel x, y, z, s.

i_x, i_y, i_s: *Neigungen* (in Bogenmaass) parallel Vertikalebenen, welche die Richtungen x, y, s enthalten, also Drehungen um horizontale Axen, welche auf x, y, s senkrecht stehen. Als Richtung der Neigung ist diejenige zu verstehen, welche parallel x, y, s verlaufende Linien *herab*führt.

$\Delta g_x, \Delta g_y, \Delta g_z, \Delta g_s$: *Aenderungen der Schwerkraft* parallel x, y, z, s.

$[i_x], [i_y], [i_s]$: *Scheinbare Neigungen* infolge von Verschiebungen und Aenderungen der Schwerkraft ($[i_s] = -(d^2\sigma/dt^2)/g + \Delta g_s/g$, wenn s horizontal).

Indikator und Indikator-Gleichung.

Indikator: Lichtpunkt oder Schreibspitze etc., bestimmt zur Zeichnung der registrirenden Kurve.

www.libtool.com.cn

Indikator-Gleichung: Gleichung, welche die Indikatorausschläge beherrscht. — Im allgemeinsten Falle, der hier betrachtet wird, lautet sie:

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau}\frac{da}{dt} - \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 (\pm r + r'\cos(\chi - \psi))$$
$$- V^{(\alpha)}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - g i_\alpha - \Delta g_\alpha\right) - V^{(\beta)}\left(\frac{d^2\eta}{dt^2} - g i_\beta - \Delta g_\beta\right) - V^{(\sigma)}\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \Delta g_\sigma\right)$$
$$- W^{(i_\alpha)}\frac{d^2 i_\alpha}{dt^2} - W^{(i_\beta)}\frac{d^2 i_\beta}{dt^2} - W^{(\vartheta_\sigma)}\frac{d^2\vartheta_\sigma}{dt^2},$$

wobei auch

$$\left(\frac{\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{g}{L}, \quad V^{(\alpha)} = \frac{J^{(\alpha)}}{L}, \quad V^{(\beta)} = \frac{J^{(\beta)}}{L}, \quad V^{(\sigma)} = \frac{J^{(\sigma)}}{L}$$

gesetzt werden kann.

a: Indikatorausschlag.

t: Zeit.

Innere Konstanten.

T_0: *Reducirte Eigenperiode*, Periode, welche sich ohne Dämpfung ($\tau = \infty$) und ohne Reibung am Schreibstift ($r' = 0$) einstellen würde.

L: *Aequivalente Pendellänge*, Länge eines einfachen Pendels der Schwingungsperiode T_0.

T: *Eigenperiode* ohne Mitwirkung der Reibung am Schreibstift ($r' = 0$).

τ: *Relaxationszeit* infolge der Dämpfung.

$s:1$: *Dämpfungsverhältniss*, Verhältniss zweier auf einander folgender grösster Ausweichungen nach verschiedenen Seiten, welches sich ohne Reibung ergeben würde ($r = 0$, $r' = 0$).

r: *Maximaler Reibungsausschlag infolge der Reibung im Gehänge.*

$(r)_1 = r/T_0^2$: Desgleichen *zur Periode 1 gehörig.*

r': *Maximaler Reibungsausschlag infolge der Reibung am Schreibstift.*

$(r')_1 = r'/T_0^2$: Desgleichen *zur Periode 1 gehörig.*

Aeussere Konstanten.

$V^{(\alpha)}, V^{(\beta)}, V^{(\sigma)}, V^{(\vartheta)}$: *Indikatorvergrösserungen.* Geben die *Vergrösserung sehr schneller Verrückungen* parallel x, y, z, s an, indem dabei $V^{(\vartheta)} = -a/\sigma$ ist.

$J^{(\alpha)}, J^{(\beta)}, J^{(\sigma)}, J^{(\vartheta)}$: *Aequivalente Indikatorlängen.* Sind die *Relativ-Empfindlichkeiten für dauernde Schwerkraftänderungen* ($J^{(\vartheta)} = ag/\Delta g_\sigma$) und für horizontale Richtungen (x, y, s) die *Empfindlichkeiten für dauernde Neigungen* ($J^{(\alpha)} = a/i_\alpha$, oder $= 206000\, a/i_\alpha$, wenn i_α in Winkelsekunden gemessen wird).

$W^{(i_\alpha)}, W^{(i_\beta)}, W^{(\vartheta_\sigma)}$: *Empfindlichkeiten für sehr schnelle Neigungen und Drehungen in II. Klasse* ($W^{(i_\alpha)} = a/i_\alpha$, etc.).

www.libtool.com.cn

Störungsglieder I. Klasse: Glieder mit $V^{(\omega)}$ bezüglich $J^{(\omega)}$.
Störungsglieder II. Klasse: Glieder mit $W^{(i_n)}$, $W^{(\vartheta_n)}$.

Arten der Seismographen.

Seismographen I. und II. Klasse: Unterscheidung gemäss dem Einfluss der entsprechenden Störungsglieder.

Horizontal- und Vertikalseismographen: Seismographen I. Klasse, bei denen die Glieder mit $V^{(\omega)}$, $V^{(\omega)}$, bezüglich mit $V^{(\omega)}$ vorherrschend sind.

Mechanismus der Seismographen.

Gestell und Gehänge: Fester und beweglicher Theil.

Aequivalent einer (auf das Gehänge wirkenden) *Kraft im Indikator*: Ideelle Kraft, welche, am Indikator angreifend, die gegebene Kraft ersetzen könnte. Der Indikator wird dabei (abgesehen von den Gelenken) in starrer Verbindung mit dem Gehänge gedacht.

Indikator-Resultante eines Kraftsystemes: Aequivalent des Kraftsystemes.

Resultirende Masse des Gehänges oder eines seiner Theile *im Indikator*: Ideelle Masse am Indikator, welche in Bezug auf die Trägheit gleichwerthig wäre.

m: *Resultirende Masse des Gehänges.*

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

Inhaltsübersicht.

Einleitung, p. 3.

1. Vorwort, p. 3; *2.* Auswahl des Stoffes, p. 4; *3.* Einige Probleme, p. 4; *4.* Inhaltsübersicht, p. 6; *5.* Praktische Grundlagen, p. 7; *6.* Dieselben für mechanische Registrirung, p. 8; *7.* Dieselben für das Studium der vertikalen Komponente, p. 9.

I. Theil. Allgemeine Theorie.

§ 1. **Die zu beobachtenden Bewegungen**, p. 10.

8. Verrückungen, p. 10; *9.* Aenderungen der Schwerkraft, p. 10; *10.* Schwereänderungen bei Sinusschwingungen der Erdoberfläche, p. 12; *11.* Einführung der äquivalenten Pendellänge, p. 13; *12.* Neigungen der Erdoberfläche, p. 14; *13.* Fortschreitende Sinuswellen mit vertikalen und longitudinalen horizontalen Bewegungen, p. 14; *14.* Drehungen um die Vertikale, p. 16; *15.* Drehungen bei fortschreitenden Sinuswellen, p. 17; *16.* Bewegungen des Gestelles, p. 18; *17.* Eintheilung der Seismographen, p. 20.

§ 2. **Das reibungslose einfache Pendel als Seismograph**, p. 21.

18. Der Apparat, p. 21; *19.* Charakteristische Konstanten, p. 21; *20.* Einwirkung von Parallelverschiebungen, p. 24; *21.* Einwirkungen von Drehungen und Aenderungen der Schwerkraft, p. 24; *22.* Indikatorgleichung für beliebige Störungen, p. 25; *23.* Beliebige Aufstellung, p. 26; *24.* Trennung verschiedenartiger Störungen, p. 27.

§ 3. **Reibungslose Seismographen mit punktförmiger Masse**, p. 28.

25. Horizontalseismographen, p. 28; *26.* Vertikalseismographen, p. 29; *27.* Seismographen eines Freiheitsgrades mit beliebiger Schwingungsrichtung, p. 30; *28.* Seismographen für mehrere Komponenten, p. 33.

§ 4. **Reibungslose Seismographen mit räumlich vertheilter Masse**, p. 36.

29. Das physikalische Pendel als Seismograph, p. 36; *30.* Physikalisches Pendel unter Mitwirkung elastischer Kräfte; Klinograph von Schlüter, p. 39; *31.* Seismograph beliebiger Konstruktion für eine Komponente, p. 41; *32.* Seismische Ruhe, p. 42; *33.* Ableitung der Indikatorgleichung, p. 43; *34.* Umgestaltung und Diskussion der Indikatorgleichung, p. 45; *35.* Unterschied des Verhaltens gegenüber einem Seismographen mit punktförmiger Masse, p. 48; *36.* Einfluss der Aufstellung, p. 48; *37.* Seismographen mehrerer Freiheitsgrade, p. 49; *38.* Eigenschwingungen des Apparates, p. 51; *39.* Verhalten bei Störungen, p. 53; *40.* Schlussübersicht, p. 54.

www.libtool.com.cn

§ 5. **Indikatorbewegungen reibungsloser Seismographen,** p. 57.

41. Einleitung; Satz der Superposition, p. 57; *42.* Allgemeine Lösungen der Indikatorgleichung, p. 60; *43.* Periodische Parallelverschiebungen, p. 62; *44.* Begleitende Eigenschwingungen, p. 63; *45.* Periodische Neigungen, p. 65.

§ 6. **Einwirkung der Dämpfung,** p. 66.

46. Indikatorgleichung, p. 66; *47.* Eigenbewegungen, p. 68; *48.* Gesetze der Superposition; allgemeine Lösungen der Indikatorgleichung, p. 71; *49.* Nachwirkungen von Anfangszuständen und Störungen, p. 74; *50.* Periodische Störungen, p. 75; *51.* Indikatorvergrösserungen periodischer Störungen, p. 78; *52.* Begleitende Eigenschwingungen, p. 79.

§ 7. **Einwirkung der Reibung im Gehänge,** p. 83.

53. Reibung im Gehänge und am Schreibstift, p. 83; *54.* Indikatorgleichung bei Reibung im Gehänge, p. 84; *55.* Allgemeine Sätze, p. 85; *56.* Eigenschwingungen bei Reibung im Gehänge, p. 86; *57.* Periodische Störungen bei Reibung im Gehänge, p. 90; *58.* Periodische Störungen bei Reibung im Gehänge und Dämpfung, p. 94.

§ 8. **Einwirkung der Reibung am Schreibstift,** p. 98.

59. Reibung am Schreibstift, p. 98; *60.* Indikatorgleichung bei Reibung am Schreibstift, p. 102.

§ 9. **Bestimmung der Konstanten,** p. 105.

61. Direkte Bestimmung der Konstanten eines Horizontalseismographen ohne Reibung, p. 105; *62.* Indirekte Bestimmung der äusseren Konstanten eines Horizontalseismographen; Einleitung, p. 106; *63.* Bestimmung der resultirenden Masse, p. 107; *64.* Indirekte Bestimmung der äusseren Konstanten eines Horizontalseismographen; Einzelnes, p. 109; *65.* Bestimmung der Konstanten eines Vertikalseismographen, p. 110; *66.* Bestimmung der Konstanten bei Seismographen II. Klasse, p. 111; *67.* Bestimmung der Reibungskonstanten, p. 113.

§ 10. **Auswerthung der Diagramme,** p. 115.

68. Einleitung, p. 115; *69.* Bestimmung der Beschleunigungen, Kräfte und scheinbaren Neigungen, p. 117; *70.* Bestimmung der Verrückungen, p. 118; *71.* Besondere Fälle, p. 121; *72.* Vervollständigungen, p. 121.

Erklärung einiger Bezeichnungen, p. 123.

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn **Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.**

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.

PHILOLOG.-HIST. KL. NEUE FOLGE.

I. Band, No. 1. **Kehr, P.**, *Ueber eine römische Papyrusurkunde im Staatsarchiv zu Marburg.* Mit drei Facsimile auf zwei Tafeln. 4. (28 S.) 1896. 3 M.

I. Band, No. 2. **Meyer, Wilhelm** (aus Speyer), *Ueber Lauterbachs und Aurifabers Sammlungen der Tischreden Luthers.* 4. (43 S.) 1896. 3 M.

I. Band, No. 3. **Bonwetsch, N.**, *Das slavische Henochbuch.* 4. (57 S.) 1896. 4 M.

I. Band, No. 4. **Wellhausen, J.**, *Der arabische Josipus.* 4. (50 S.) 1897. 3 M. 50 Pf.

I. Band, No. 5. **Hultsch, Fr.**, *Poseidonios über die Größe und Entfernung der Sonne.* 4. (48 S.) 1897. 3 M.

I. Band, No. 6. **Meyer, Wilhelm**, (aus Speyer), *Die Buchstabenverbindungen der sogenannten gothischen Schrift.* Mit 5 Tafeln. 4. (124 S.) 1897. 9 M. 50 Pf.

I. Band, No. 7. **Leo, Fr.**, *Die plautinischen Cantica und die hellenistische Lyrik.* 4. (114 S.) 1897. 7 M. 50 Pf.

I. Band, No. 8. *Asadi's neupersisches Wörterbuch Lughat-i Furs* nach der einzigen vatikanischen Handschrift herausgegeben von Paul Horn. 4. (37 u. 133 S.) 1897. 18 M.

II. Band, No. 1. **Wellmann, M.**, *Krateuas.* Mit 2 Tafeln. 4. (32 S.) 1897. 3 M.

II. Band, No. 2. *Das hebräische Fragment der Weisheit des Jesus Sirach* herausgegeben von **Rudolf Smend.** 4. (34 S.) 1897. 3 M. 50 Pf.

II. Band, No. 3. **Schulten, Adolf**, *Die Lex Manciana*, eine afrikanische Domänenordnung. 4. (51 S.) 1897. 3 M. 50 Pf.

II. Band, No. 4. **Kaibel, Georg**, *Die Prolegomena ΠΕΡΙ ΚΩΜΩΙΔΙΑΣ.* 4. (70 S.) 1898. 4 M. 50 Pf.

II. Band, No. 5. **Bechtel, Fr.**, *Die einstämmigen männlichen Personennamen des Griechischen*, die aus Spitznamen hervorgegangen sind. 4. (85 S.) 1898. 5 M. 50 Pf.

II. Band, No. 6. **Meyer, Wilhelm**, *Die Spaltung des Patriarchats Aquileja.* 4. (37 S.) 1898. 2 M. 50 Pf.

II. Band, No. 7. **Schulten, Adolf**, *Die römische Flurteilung und ihre Reste.* Mit 5 Figuren im Text und sieben Karten. 4. (38 S.) 1898. 5 M.

II. Band, Nr. 8. **Roethe, Gustav**, *Die Reimvorreden des Sachsenspiegels.* 4. (110 S.) 1899. 8 M.

III. Band, Nr. 1. *Die charakteristischen Unterschiede der Brüder van Eyck* von **Otto Seek.** 4. (77. S.) 1899. 5. M.

III. Band, Nr. 2. **Marquardt, J.**, *Ērānšahr nach der Geographie des Ps. Moses Xorenaci.* Mit historisch kritischem Kommentar und topographischen Excursen. 4. (358 S.) 1901. 30 M.

III. Band, No. 3. **Achelis, H.**, *Die Martyrologien, ihre Geschichte und ihr Wert.* 4. (VIII u. 247 S.) 1900. 16 M.

IV. Band, No. 1. **Tüselmann, Otto**, *Die Paraphrase des Euteknios zu Oppians Kynegetika.* 4. (43 S.) 1900. 4 M.

IV. Band, No. 2. **Schulten, Adolf**, *Die Mosaikkarte von Madaba* und ihr Verhältnis zu den ältesten Karten und Beschreibungen des heiligen Landes. Mit 3 Kartenbildern u. 1. Figurentafel. 4. (121 S.) 1900. 10 M.

IV. Band, No. 3. **Wilamowitz-Moellendorff, U. v.**, *Die Textgeschichte der griechischen Lyriker.* 4. (121 S.) 1900. 8 M.

IV. Band, No. 4. **Rahlfs, Alfred**, *Die Berliner Handschrift des sahidischen Psalters.* Mit drei Lichtdrucktafeln. 1901. 11 M.

IV. Band, No. 5. **Meyer, Wilhelm**, *Der Gelegenheitsdichter Venantius Fortunatus.* 4. (140 S.) 1901. 9 M.

IV. Band, No. 6. **Lüders, Heinrich**, *Über die Grantharecension des Mahābhārata.* (Epische Studien I). 6 M.

V. Band, No. 1. **Roethe, Gustav.** *Brentanos ‚Ponce de Leon'*, eine Saecularstudie. 4. (100 S.) 1901. 6 M. 50 Pf.

V. Band, No. 2. **Wellhausen, J.**, *Die religiös-politischen Oppositionsparteien im alten Islam.* 6 M. 50 Pf.

V. Bd. No. 3. *Neuarabische Volkspoesie* gesammelt und übersetzt von **Enno Littmann.** Im Druck.

V. Bd. No. 4. **Pischel, R.**, *Materialien zur Kenntnis des Apabhraṁśa.* Ein Nachtrag zur Grammatik der Prākrit-Sprachen. (86 S.) 6 M.

V. Bd. No. 5. **Schulze, Wilhelm**, *Zur Geschichte lateinischer Eigennamen.* Im Druck.

VI. Bd. No. 1. **Kraus, Carl.** *Metrische Untersuchungen über Reinbots Georg.* Mit Excursen.

VI. Bd. No. 2. **Meyer, Wilhelm**, *Henricus de Hinus über die Regii Typi Graeci.*

VI. Bd. No. 3. **Möller, Hermann**, *Ein hochdeutsches und zwei niederdeutsche Lieder 1563—1565 aus dem siebenjährigen [illegible]schen Kriege.* Mit einem Anhang: *[illegible]sche Lieder aus der Grafenfehde.*

MATH.-PHYSIKAL. KL. NEUE FO[illegible]

I. Band, No. 1. **Koenen, A. v.**, *Ueber [illegible] der Unteren Kreide am Ufer des [illegible] in Kamerun.* Mit 4 Tafeln. 4. 1897.

Nachtrag dazu. 4. (S. 49—65 mit [illegible] V—VII.) 1898.

I. Band, No. 2. **Brendel, Martin**, *Theor[illegible] kleinen Planeten.* Erster Teil. 4. [illegible] 1898.

I. Band, No. 3. **Schur, W.**, *Ableitung [illegible] Oerter des Mondes gegen die Sonne heliometrischen Messungen von Schur ausgeführt auf der Sternwarte zu G[illegible] während der partiellen Sonnenfinsternisse von 1890 Juni 16/17 (Beobachter: Ambronn und Hayn) und von 1891 (Beobachter: Schur).* Mit 3 Plan. Sternwarte nebst Verzeichniss der gr[illegible] Instrumente. 4. (26 S.) 1898.

I. Band, No. 4. **Schur, W.**, *Vermessung beiden Sternhaufen h und x Persei [illegible] sechszölligen Heliometer der Sternwarte Göttingen verbunden mit einer Untersuchung aller bis zum Jahre 1900 ausgeführten Instrumentaluntersuchungen.* Mit Sternkarte. 4. (88 S.) 1900.

II. Bd. No. 1. **Wiechert, E.**, *Theorie der [illegible]tischen Seismographen.* Im [illegible]

II. Bd. No. 2. **Kramer, Julius**, *Theorie [illegible]nen Planeten. Die Planeten vom [illegible] Typus.* (153 S.)

II. Bd. No. 3. **Furtwängler, Ph.**, *Ueber [illegible]ciprocitätsgesetz der [illegible]ten Potenzreste [illegible]braischen Zahlkörpern, wenn l eine [illegible]rade Primzahl bedeutet.* (82 S.)

Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner), Göttingen.

G. Goe 1721.16

www.libtool.com.cn

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND II. Nro. 2.

Theorie der kleinen Planeten.

Die Planeten vom Hecuba-Typus.

Von

Julius Kramer.

Berlin,
Weidmannsche Buchhandlung.
1902.

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND II. Nro 2.

Theorie der kleinen Planeten.

Die Planeten vom Hecuba-Typus.

Von

Julius Kramer.

Berlin.
Weidmannsche Buchhandlung.
1901.

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

Theorie der kleinen Planeten.

Die Planeten vom Hecuba-Typus.

Von

Julius Kramer.

Vorgelegt von W. Schur in der Sitzung vom 23. Februar 1901.

Vorwort.

Unter den in letzter Zeit entwickelten Theorieen einer gruppenweisen Ermittelung der Hauptungleichheiten der kleinen Planeten dürfte die von Herrn Brendel gegebene Methode, was Durchsichtigkeit und Vollständigkeit der analytischen Entwicklungen betrifft, für die rechnende Astronomie sehr wertvoll sein. Die Entwicklungen für die gewöhnlichen Planeten sind in Herrn Brendels „Theorie der kleinen Planeten“ [1]) vollständig durchgeführt.

Der Specialfall des Hestia-Typus ist in seiner Abhandlung [2]) „Om användningen af den absoluta störingsteorien etc.“ sowie in seiner Dissertationsschrift [3]) mit einer obigen Zielen entsprechenden Genauigkeit behandelt. Für die zweite Hauptgruppe, für die Planeten vom Hecuba-Typus, hat Herr Ludendorff in seiner Inauguraldissertation [4]) die Formeln der Bewegung in der instantanen Bahnebene abgeleitet, während die zu der mittleren Bewegung des Mars in einem kommensurablen Verhältnis stehenden Planeten in Herrn Lemkes Inauguraldissertation [5]) behandelt sind.

1) Abhdlgn. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. N. F. Bd. I, 2.

2) Jakttagelser och Undersökningar anställda på Stockholms Observatorium IV, 3. 1889.

3) Ueber die Anwendung der Gyldén'schen absoluten Störungstheorie auf die Breitenstörungen einer gewissen Klasse kleiner Planeten. Berlin-Göttingen 1890.

4) Die Jupiterstörungen der kleinen Planeten vom Hecuba-Typus. Berlin 1897.

5) Ueber die Mars- und Jupiterstörungen der kleinen Planeten vom Hebe-Typus. Berlin 1897.

www.libtool.com.cn

Daraus, dass unter den charakteristischen Planeten die vom Hecuba-Typus an Zahl wie an Schwierigkeit der theoretischen Behandlung von Bedeutung sind, dass ferner Herr Ludendorff die Störungen der Bahnebene nicht berücksichtigt hat, glaubte ich auf Berechtigung zu einer Weiterführung dieser Arbeit schliessen zu dürfen. Es schien mir erwünscht, nicht nur den Einfluss der Breitenstörungen zu berücksichtigen, sondern auch die Veränderlichkeit gewisser langperiodischer Funktionen, wenigstens in den Gliedern der Form C und D. Ebenso hielt ich eine Mitnahme der wichtigsten Glieder dritten Grades für zweckmässig, insofern sie durch die Form der Differentialgleichung oder durch die angewandte Integrationsmethode aus solchen niederen Grades entstanden sind. Vor allem aber suchte ich die Untersuchung auf den Fall der kritischen Planeten auszudehnen, welche allerdings im „1/2"-Typus bisher noch nicht entdeckt worden sind. Die Durchsichtigkeit und Einfachheit der von Herrn Brendel überall angewandten Gyldén'schen partiellen Integrationsmethode veranlassten mich hierzu umsomehr, da Herr Brendel ihre Anwendbarkeit auch für eine sogenannte strenge Kommensurabilität nachgewiesen hat. Dass diese Methode ohne verhältnismässig grosse Schwierigkeiten bei derartigen Planeten zum Ziele führt, sollen die im folgenden gegebenen Untersuchungen darthun.

Hinsichtlich des Grades der Annäherung, den eine mit der im folgenden eingehaltenen Genauigkeit gerechnete Bahn gewährt, kann das entscheidende Wort nur der numerischen Rechnung zustehen. Immerhin glaube ich aus der theoretischen Entwickelung schliessen zu dürfen, dass bei charakteristischen Planeten sich eine Darstellung innerhalb der Beobachtungsgrenzen erreichen lässt.

Das Hauptgewicht ist in den folgenden Ausführungen auf die charakteristischen Glieder gelegt worden, da diese für die hier verfolgten Zwecke von grösserer Bedeutung zu sein scheinen, als die elementaren Glieder, deren erst nach einem längeren Zeitraum merklich werdender Einfluss durch eine seculare Variation der Elemente berücksichtigt werden kann, wie Herr Brendel gezeigt hat. Die A-Glieder, die in S von der Ordnung m' resp. $\frac{m'}{\delta_1}$ sind, habe ich in der Differentialgleichung für W noch vor der Integration in secularer Form dargestellt, so dass sie nicht vergrössert erscheinen können. Eine derartige Darstellung ist möglich, da es sich hier um keine absolute Bahn im Sinne Gyldéns handelt.

Es möge mir noch gestattet sein, Herrn Brendel für die mannigfache Anregung und wertvollen Ratschläge, die ich während dieser Untersuchungen von ihm empfangen habe, und Herrn Schur, welcher diese Arbeit der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt hat, für das dabei bekundete Interesse meinen wärmsten Dank auszusprechen.

---

www.libtool.com.cn

Erstes Kapitel.

Die Differentialgleichungen der Gyldén'schen Störungstheorie. — Ergänzungen zur Entwicklung der Störungsfunktion und ihrer Derivierten in der von Herrn Brendel gegebenen Form. — Transformation dieser Ausdrücke.

1) Obwohl Herr Brendel (a. a. O.) eine erschöpfende Herleitung der Differentialgleichungen des Problems gegeben hat, und obwohl in den verschiedenen Abhandlungen, die einen weiteren Ausbau dieser Methode anstreben, ebenfalls kürzere Uebersichten über die Grundlagen der Theorie angeführt sind, sollen hier dennoch die wichtigeren Formeln mitgeteilt werden, um ein allzuhäufiges Hinweisen auf diese Schriften zu vermeiden.

Dem Vorgehen Hansens folgend hatte Gyldén ebenfalls „ideale Koordinaten" eingeführt, welche eine vollständige Trennung der Bewegung in der Bahnebene von den Störungen dieser Ebene selbst gestatten. Für den ersten Teil des Problems lauten die Differentialgleichungen in der von Herrn Brendel angewandten Gestalt:

$$\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv} = -(1+S)^2 Q - \tfrac{1}{2}\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}, \tag{1}$$

$$\frac{d^2[(\varrho)+R]}{dv^2} + [(\varrho)+R] = -\left[\frac{2}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv} + (1+S)^2 Q\right]\frac{d[(\varrho)+R]}{dv} \tag{2}$$

$$-\left[\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d^2\eta^2}{dv^2} + \frac{2}{(1-\eta^2)^2}\left(\frac{d\eta^2}{dv}\right)^2 + \frac{(1+S)^2}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}Q\right](1+(\varrho)+R) + 2S + S^2 - (1+S)^2 P,$$

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dv} &= S - 2R - 2RS + 3R^2 \pm \cdots\cdots \\ &+ [6R - 2S - 12R^2 + 6RS \pm \cdots\cdots]\,\eta\cos v \\ &- 3\eta^2 R + [\tfrac{5}{2}S - 6R \pm \cdots\cdots]\,\eta^2\cos 2v \pm \cdots\cdots - \frac{d\Xi}{dv}.\end{aligned} \tag{3}$$

Hier bezeichnet S die eine Gyldén'sche Koordinate, welche den Zusammenhang zwischen der wahren Länge in der Bahn v und der Zeit t für die gestörte Bewegung vermittelt und durch folgende Gleichung definiert ist:

$$r^2\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{Ma(1-\eta^2)}}{1+S}. \tag{4}$$

Es ist gesetzt $M = k^2(1+m)$, und unter a, dem Protometer Gyldéns, wird hier kein absolutes Element verstanden. η ist eine langperiodische elementare Funktion und so gewählt, dass S derartige Glieder nicht mehr enthalten kann. Die andere Gyldén'sche Koordinate ($= \varrho$) ist definiert durch

www.libtool.com.cn

$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\varrho}, \tag{5}$$

und ist in zwei Teile zerspalten worden, einen elementaren Teil (ϱ), und einen Teil R, der, von besonderen Fällen abgesehen, von der Ordnung der störenden Masse ist.

Unter $\frac{1}{n} W$ ist die „Zeitreduktion" verstanden, eine Grösse, die durch die Einführung der wahren Länge als Integrationsvariable bedingt wird. Sie stellt die Verbindung dar zwischen der wahren Zeit t, welche von vornherein bekannt ist, und der reducierten Zeit (t), welche sich von der wahren nur um den Betrag der periodischen Störungen, eben dieses W, unterscheidet. Also

$$nt = n(t) + W; \tag{6}$$

(t) ist demnach die ungestörte Zeit, analog den ungestörten Anomalieen in den älteren Theorieen.

P und Q sind gewisse partielle Ableitungen der Störungsfunktion, deren Bedeutung weiter unten mitgeteilt wird.

Versteht man unter $\mathfrak{z}$ den Sinus der heliocentrischen Breite des gestörten Planeten, so lässt sich sein von den Störungen afficierter Wert aus folgender Gleichung ermitteln:

$$\frac{d^2[(\mathfrak{z})+\mathfrak{Z}]}{dv^2} + [(\mathfrak{z})+\mathfrak{Z}] = -(1+S)^3 Q \frac{d[(\mathfrak{z})+\mathfrak{Z}]}{dv} + (1+S)^3 Z, \tag{7}$$

wo Z wieder eine Derivierte der Störungsfunktion bezeichnet, und $\mathfrak{z}$ analog früherem in einen elementaren Teil ($\mathfrak{z}$) und einen Teil $\mathfrak{Z}$ von der Ordnung der störenden Masse zerlegt ist.

Die beiden langperiodischen Funktionen (ϱ) und ($\mathfrak{z}$) sollen so definiert werden:

$$(\varrho) = \eta \cos \mathfrak{v}, \quad \mathfrak{v} = v - \Pi, \tag{8}$$

$$(\mathfrak{z}) = \sin j \sin \mathfrak{v}, \quad \mathfrak{v} = v - \sigma, \tag{9}$$

wo $\sin j, \eta, \sigma$ und Π vier weitere langperiodische Funktionen sind, und zwar sind η und Π der elliptischen Excentricität und Perihellänge, $\sin j$ und σ der elliptischen Bahnneigung und Knotenlänge ähnlich; nur dass sie nicht konstant sind, sondern sich sehr langsam im Laufe der Zeit ändern. Die Einführung dieser Funktionen verhindert das Auftreten von secularen Gliedern in der Gyldén'schen Theorie. Definiert sind sie durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \Pi &= \varkappa \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \omega + \sum \varkappa_n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \omega_n, \\
\sin j \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \sigma &= \sin \iota \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \vartheta + \sum \sin \iota_n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \vartheta_n, \\
\omega &= \Gamma + \varsigma v, \quad \vartheta = \Theta - \tau v, \\
\omega_n &= \Gamma_n + \varsigma_n v, \quad \vartheta_n = \Theta_n - \tau_n v.
\end{aligned} \tag{10}$$

www.libtool.com.cn

Für den störenden Körper ist:

$$(10a)\qquad \begin{cases} \eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \Pi_1 = \sum \varkappa'_n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \varpi_n, \\ \sin j' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \sigma_1 = \sum \sin \iota'_n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \vartheta_n. \end{cases}$$

Hier sind ς_n und τ_n — die Bewegung des Perihels und des Knotens — kleine Grössen von der Ordnung der störenden Masse, und sind aus der Gyldén'schen Theorie der Hauptplaneten bekannt oder müssen später berechnet werden. $\varkappa_n$ und $\sin \iota_n$ sind von der Ordnung der Excentricität und Neigung der Hauptplaneten und ebenfalls bekannt. Weiterhin ist

$\varkappa$ = Excentricitätsmodul, $\sin \iota$ = Neigungsmodul,

Γ = Perihellänge, Θ = Knotenlänge.

Dies sind die Integrationskonstanten des Problems. Die beiden anderen Elemente sind: a = Halbaxe der Bahn oder n = Bewegungskonstante (analog der mittleren elliptischen Bewegung), sowie Λ = mittlere Länge zur Epoche.

Alle diese Elemente sind jedoch „keine absoluten Konstanten im Sinne Gyldéns". Sie sind immer nur für gewisse längere Zeiträume (50 bis 100 Jahre) als konstant anzusehen und bedürfen dann einer allerdings nur kleinen Verbesserung. Der Grund hierfür ist in dem Umstande zu suchen, dass einmal zu ihrer Bestimmung nur eine geringe Zahl elementarer Glieder verwandt ist — dem Zwecke abgekürzter Tafeln mehr entsprechend —, und dass ferner das hier stets gebrauchte partielle Integrationsverfahren im Falle einer Kommensurabilität der Perihelbewegungen oder Knotenbewegungen von störenden und gestörten Planeten zu hyperelementaren Gliedern in W Anlass geben kann und demnach eine Convergenz für unendliche Zeit in Frage stellt. Beschränkt man sich hingegen auf endliche, nicht allzu grosse Zeiträume, so fallen diese Bedenken fort. Zum Schluss möge noch die Formel der Reduktion auf die Ekliptik mitgeteilt werden, wie sie für mittlere Neigungen ausreichen dürfte:

$$(11)\qquad \begin{cases} l - v = -\tfrac{1}{4} \sin^2 j \sin 2\mathfrak{v} + \mathrm{H} \\ \mathrm{H} = c\,v - \tfrac{1}{2} \dfrac{\tau+\tau_1}{\tau-\tau_1} \sin\iota \sin\iota_1 \sin(\vartheta_1 - \vartheta) - \tfrac{1}{2} \dfrac{\tau+\tau_2}{\tau-\tau_2} \sin\iota \sin\iota_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta) - \cdots \\ \qquad\qquad - \tfrac{1}{2} \dfrac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1-\tau_2} \sin\iota_1 \sin\iota_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) - \cdots \\ c = -\tfrac{1}{2}[\tau \sin^2\iota + \sum \tau_n \sin^2\iota_n] \qquad - \cdots \\ \Omega - \Sigma = \mathrm{H}. \end{cases}$$

---

2) Die Störungsfunktion, deren allgemeine Form bekanntlich

$$(12)\qquad a\Omega = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{a}{\Delta} - \frac{ar}{r'^2}\cos H\right),\quad \Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos H},$$

$$\cos H = \cos b \cos b' \cos(l - l') + \sin b \sin b'$$

www.libtool.com.cn

ist, wird nach dem Vorgange Gyldéns nach Vielfachen des $\cos H$ und nach Potenzen einer Grösse λ entwickelt, die ihrerseits wieder Funktion des Verhältnisses $\alpha = \frac{a}{a'}$ der Halbaxen vom störenden und gestörten Körper ist. Eine solche Entwicklung nach Potenzen von α wird, insofern diese Halbaxen wesentlich von einander verschieden sind, gut konvergieren. Die Koefficienten dieser Entwicklung werden $\gamma_{s,i}$ bezeichnet und sind Funktionen von α sowie gewisser Grössen $\beta_n^{(s)}$, die von Masal tabuliert worden sind[1]) und durch das elliptische Integral I. und II. Gattung dargestellt werden können. Für die $\gamma_{s,i}$ hat Gyldén Tafeln entworfen[2]). Da in λ noch das Verhältnis der Radiivektoren auftritt, so wird in Hinsicht auf Formel (5) die Entwicklung der Störungsfunktion nach Potenzen von η und ϱ fortschreiten. Das Auftreten des $\cos H$ dagegen bringt, wie aus Formel (12) hervorgeht, den $\sin b$, d. h. z herein.

Gyldén hat der Störungsfunktion (cf. Brendel: Theorie d. kl. Planeten, pag. 46—56) folgende Gestalt gegeben, unter Vernachlässigung von Gliedern vierten Grades:

$$a\Omega = a(\Omega) + \frac{a\,d(\Omega)}{d\cos H_1} h, \tag{13}$$

und $a(\Omega)$ durch folgende trigonometrische Reihe dargestellt:

$$a(\Omega) = 2\sum{}' \Omega_{(n\cdot s\cdot s')\nu\cdot\nu'} \varrho^{s}\varrho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'} \cos n H_1. \tag{14}$$

Die Werte der Ω-Koefficienten sind pag. 52 gegeben. $\cos H$ ist unter Vernachlässigung von Grössen vierten Grades in 2 Teile zerlegt worden, in den Hauptteil $\cos H_1$ und einen Teil zweiten Grades $= h$. Der zweite Teil der Störungsfunktion wird gegeben durch

$$\frac{a\,d(\Omega)}{d\cos H_1} = 2\sum{}' \overline{\Omega}_{(n\cdot s\cdot s')\nu\cdot\nu'} \varrho^{s}\varrho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'} \cos n H_1 \quad \text{(a. a. O. pag. 55)}. \tag{15}$$

Nach diesen Vorbemerkungen sollen jetzt die Formeln für die partiellen Derivierten Q, P, Z aufgeführt werden. Gyldén hat definiert: $Q = \frac{r^2}{a(1-\eta^2)} \frac{\partial \Omega}{\partial v}$, und es folgt unter Vernachlässigung von Gliedern dritten Grades folgende trigonometrische Reihe für Q:

$$\begin{aligned} Q = &-2\Sigma n\, Q_{(n\cdot s\cdot s')\nu\cdot\nu'} \varrho^{s}\varrho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'} \sin n H_1 \\ &- 2\Sigma n\, \overline{Q}_{n\cdot 0\cdot 0} h \sin n H_1 + 2\Sigma{}' \overline{Q}_{n\cdot 0\cdot 0} \frac{\partial h}{\partial v} \cos n H_1. \end{aligned} \tag{16}$$

---

1) **Masal**: Table de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{(1-\alpha^2\sin^2\varphi)^{\frac{s}{2}}}$ servant à la détermination des perturbations des petites planètes par Jupiter et Saturne. Astronomiska Jakttagelser och Undersökningar etc. IV. 5. Stockholm 1891.

2) **Gyldén**: Hülfstafeln zur Berechnung der Hauptungleichheiten in den absoluten Bewegungstheorien der kleinen Planeten. Publ. XXI d. Astron. Gesellschaft. Leipzig 1896.

www.libtool.com.cn

Der Strich am Summenzeichen zeigt an, dass für $n = 0$ der Faktor 2 zu unterdrücken ist. Die Werte der Q-Koefficienten stehen Br.[1]) pag. 56, die Reihen für h und $\frac{\partial h}{\partial v}$ sind pag. 75 zu finden.

Fernerhin ist $P = r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r}$, sowie $Z = \frac{m'}{1+m} \frac{r^2 r'}{a(1-\eta^2)} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) (\zeta' - \zeta \cos H)$, und es gelten folgende Reihen für P und Z unter Vernachlässigung des dritten Grades:

(17) $$P = 2 \sum{}' P_{(n \cdot s \cdot s')_{\nu \cdot \nu'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \cos n H_1 + 2 \sum{}' \overline{P}_{n \cdot 0 \cdot 0} h \cos n H_1$$

(18) $$Z = 2 \sum{}' Y_{(n \cdot s \cdot s')_{\nu \cdot \nu'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \zeta \cos n H_1 + 2 \sum{}' X_{(n \cdot s \cdot s')_{\nu \cdot \nu'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \zeta' \cos n H_1.$$

Die Werte der P, Y, X-Koefficienten sind in Br. pag. 57 und 59 zu finden. Bei den folgenden Untersuchungen hat es sich herausgestellt, dass für unseren Fall noch einige dieser Koefficienten benötigt werden, welche dort nicht gegeben worden sind, und die hier ohne Ableitung angeführt werden sollen:

(19) $$\overline{Q}_{n \cdot 1 \cdot 0} = \overline{\Omega}_{n \cdot 1 \cdot 0} - 2 \overline{\Omega}_{n \cdot 0 \cdot 0}$$

(20)
$$\begin{cases} P_{n \cdot 2 \cdot 0} = -4 \Omega_{n \cdot 4 \cdot 0} & P_{(n \cdot 1 \cdot 0)_{1 \cdot 0}} = -2 \Omega_{(n \cdot 2 \cdot 0)_{1 \cdot 0}} + 2 \Omega_{n \cdot 2 \cdot 0} \\ P_{n \cdot 2 \cdot 1} = -3 \Omega_{n \cdot 3 \cdot 1} & P_{(n \cdot 1 \cdot 0)_{0 \cdot 1}} = -2 \Omega_{(n \cdot 2 \cdot 0)_{0 \cdot 1}} \\ P_{n \cdot 1 \cdot 2} = -2 \Omega_{n \cdot 2 \cdot 2} & \overline{P}_{n \cdot 1 \cdot 0} = -2 \overline{\Omega}_{n \cdot 2 \cdot 0} \end{cases}$$

(21)
$$\begin{cases} X_{n \cdot 2 \cdot 0} = \overline{Q}_{n \cdot 2 \cdot 0} = \overline{\Omega}_{n \cdot 2 \cdot 0} - 2 \overline{\Omega}_{n \cdot 1 \cdot 0} + 3 \overline{\Omega}_{n \cdot 0 \cdot 0} \\ X_{n \cdot 1 \cdot 1} = \overline{Q}_{n \cdot 1 \cdot 1} = \overline{\Omega}_{n \cdot 1 \cdot 1} - 2 \overline{\Omega}_{n \cdot 0 \cdot 1} \\ Y_{n \cdot 2 \cdot 0} = -\frac{X_{n-1 \cdot 2 \cdot 0} + X_{n+1 \cdot 2 \cdot 0}}{2}, \qquad Y_{0 \cdot 2 \cdot 0} = -X_{1 \cdot 2 \cdot 0} \\ Y_{n \cdot 1 \cdot 1} = -\frac{X_{n-1 \cdot 1 \cdot 1} + X_{n+1 \cdot 1 \cdot 1}}{2}, \qquad Y_{0 \cdot 1 \cdot 1} = -X_{1 \cdot 1 \cdot 1} \end{cases}$$

Ihre Berechnung erfordert noch die Kenntnis folgender Ω-Koefficienten:

(22)
$$\begin{cases} \overline{\Omega}_{n \cdot 2 \cdot 0} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \overline{g}_{n \cdot 0} + (2n+5) g_{n \cdot 1} + 4 g_{n \cdot 2} \\ \overline{\Omega}_{n \cdot 1 \cdot 1} = -(n+1)(n+2) \overline{g}_{n \cdot 0} - 2(2n+5) g_{n \cdot 1} - 8 g_{n \cdot 2}, \end{cases}$$

ferner der Glieder $\Omega_{n \cdot 4 \cdot 0}$, $\Omega_{n \cdot 3 \cdot 1}$, $\Omega_{n \cdot 2 \cdot 2}$, $\Omega_{(n \cdot 2 \cdot 0)_{1 \cdot 0}}$, $\Omega_{(n \cdot 2 \cdot 0)_{0 \cdot 1}}$, für welche die Entwicklung der Störungsfunktion bis zum vierten Grade inclusive zu leisten wäre.

---

1) Mit Br. sei hier und im folgenden abkürzend Brendel, Theorie der kl. Planeten, bezeichnet.

www.libtool.com.cn

3) Zur weiteren Verwendung dieser Reihen bedarf es noch einer Transformation, dadurch bedingt, dass H_1 die Längen v und v' des störenden und gestörten Körpers enthält, und dass die Beibehaltung dieser beiden Variablen die Integration sehr erschweren würde. Nach einem von Gyldén gegebenen eleganten Verfahren wird die Länge des störenden Körpers durch die des gestörten ersetzt. Das Nähere hierüber findet sich in Br. Kap. 5, und soll hier nur erwähnt werden, dass ebenfalls für den störenden Körper eine Zerlegung in (ϱ') und R' sowie $(\mathfrak{z}')$ und $\mathfrak{Z}'$ vorgenommen wird, dass ferner R' und $\mathfrak{Z}'$ für unsere Zwecke vernachlässigt werden, dass nach R und $\mathfrak{Z}$ dagegen entwickelt wird. Weiterhin besteht H_1 der Hauptsache nach aus $v-v'$, und die Ersetzung von v' durch v führt W und W' ein. Es wird W' vernachlässigt und W in 2 Teile zerlegt, in V, das sämtliche langperiodisch elementaren und charakteristischen Glieder enthalten soll, sowie die secularen, die durch die partielle Integration und ein anderes noch später eingehend zu behandelndes Verfahren bei uns wieder eingeführt werden, und in K, welches kurzperiodisch, also von der Ordnung der Masse ist. Weiter treten noch die in der Reduktion auf die Ekliptik (Formel 11) eine Rolle spielenden Grössen H und H′ auf, von denen nur ihre secularen Teile c und c' mitgenommen werden. Dann wird nach Potenzen von K entwickelt, V dagegen unter dem trigonometrischen Zeichen belassen, da diese Grösse sich bei den charakteristischen Planeten schon der Einheit nähert, und eine Reihe nach ihren Potenzen nur sehr langsam fallen würde. Des weiteren wird dann noch in (ϱ') sowie $(\mathfrak{z}')$ und h das v' durch v ersetzt.

Hierdurch erscheinen die Derivierten der Störungsfunktion P, Q, Z unter Vernachlässigung von Grössen rein zweiter Ordnung und dritten Grades als trigonometrische Reihen von folgender Gestalt:

$$
\begin{aligned}
(23)\quad Q = {} & \sum A_n \eta^{\nu} \eta'^{\nu_1} \sin(nw \pm \nu' \mathfrak{v} \pm \nu_1' \mathfrak{v}_1) + \sum A_n^{1,0} R \eta^{\nu} \eta'^{\nu_1} \sin(nw \pm \nu' \mathfrak{v} \pm \nu_1' \mathfrak{v}_1) \\
& + \sum k_n A_n K \eta^{\nu} \eta'^{\nu_1} \cos(nw \pm \nu' \mathfrak{v} \pm \nu_1' \mathfrak{v}_1) \\
& + \sum \overline{A}_n \sin^{\nu} j \sin^{\nu_1} j' \sin(nw \pm \nu' \mathfrak{v} \pm \nu_1' \mathfrak{v}_1) + \sum k_n \overline{A}_n K \sin^{\nu} j \sin^{\nu_1} j' \cos(nw \pm \nu' \mathfrak{v} \pm \nu_1' \mathfrak{v}_1) \\
& + \sum \overline{A}_n^{1,0} \mathfrak{Z} \sin^{\nu} j \sin^{\nu_1} j' \cos(nw \pm \nu \mathfrak{v} \pm \nu_1 \mathfrak{v}_1) \\
& + \sum \overline{A}_n^{0,1} \frac{d\mathfrak{Z}}{dv} \sin^{\nu} j \sin^{\nu_1} j' \sin(nw \pm \nu \mathfrak{v} \pm \nu_1 \mathfrak{v}_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(24)\quad P = {} & \sum B_n \eta^{\nu} \eta'^{\nu_1} \cos(nw \pm \nu' \mathfrak{v} \pm \nu_1' \mathfrak{v}_1) + \sum B_n^{1,0} R \eta^{\nu} \eta'^{\nu_1} \cos(nw \pm \nu' \mathfrak{v} \pm \nu_1' \mathfrak{v}_1) \\
& + \sum k_n B_n K \eta^{\nu} \eta'^{\nu_1} \sin(nw \pm \nu' \mathfrak{v} \pm \nu_1' \mathfrak{v}_1) + \sum \overline{B}_n \sin^{\nu} j \sin^{\nu_1} j' \cos(nw \pm \nu' \mathfrak{v} \pm \nu_1' \mathfrak{v}_1) \\
& + \sum \overline{B}_n^{1,0} \mathfrak{Z} \sin^{\nu} j \sin^{\nu_1} j' \sin(nw \pm \nu \mathfrak{v} \pm \nu_1 \mathfrak{v}_1) + \sum \overline{B}_n^{0,1} \frac{d\mathfrak{Z}}{dv} \sin^{\nu} j \sin^{\nu_1} j' \cos(nw \pm \nu \mathfrak{v} \pm \nu_1 \mathfrak{v}_1)
\end{aligned}
$$

www.libtool.com.cn

(25) $$Z = \sum C_n \eta'^{\nu} \sin j'^{\nu} \sin(nw \pm \nu v \pm \nu \mathfrak{v}) + \sum C_n^{1,0} R \eta'^{\nu} \sin j'^{\nu} \sin(nw \pm \nu v \pm \nu \mathfrak{v})$$
$$+ \sum k_n C_n K \eta'^{\nu} \sin j'^{\nu} \cos(nw \pm \nu v \pm \nu \mathfrak{v}) + \sum C_n^{0,1} \mathfrak{Z} \cos nw \quad + \cdots\cdots$$

(analog für η' und j'),

wo die mit R, K, $\mathfrak{Z}$ und $\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}$ multiplizierten Glieder schon Störungen zweiter Ordnung geben, deren Mitnahme später gerechtfertigt werden soll; k_n bezeichnet gewisse Zahlenfaktoren. Hinsichtlich der Einzelheiten in Gestalt der Formeln, sowie der Wahl der Indices muss auf Br. pag. 70 bis 72 und pag. 76 bis 83 verwiesen werden.

---

4) Es hat sich gezeigt, dass in unserem Falle noch Glieder berücksichtigt werden müssen, die Herr Brendel nicht gegeben hat, und hier sollen diese Ergänzungen mitgeteilt werden, so dass einschliesslich dieser Glieder die Formeln für die Q, P, Z in allen Fällen des Planetensystems ausreichen werden:

(23a) $$\text{pars } Q = \sum \overline{A}_{n\cdot 2\cdot 0}^{1\cdot 0} R \sin^2 j \sin nw + \sum \overline{A}_{n\cdot 2\cdot 0}^{+2\cdot 1\cdot 0} R \sin^2 j \sin(nw + 2\mathfrak{v})$$
$$+ \sum \overline{A}_{n\cdot 2\cdot 0}^{-2\cdot 1\cdot 0} R \sin^2 j \sin(nw - 2\mathfrak{v})$$
$$+ \sum \overline{A}_{n\cdot 1\cdot 1}^{+2\cdot 1\cdot 0} R \sin j \sin j' \sin(nw + \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1) + \sum \overline{A}_{n\cdot 1\cdot 1}^{+1\cdot 1\cdot 0} R \sin j \sin j' \sin(nw + \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1)$$
$$+ \sum \overline{A}_{n\cdot 1\cdot 1}^{-1\cdot 1\cdot 0} R \sin j \sin j' \sin(nw - \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1) + \sum \overline{A}_{n\cdot 1\cdot 1}^{-2\cdot 1\cdot 0} R \sin j \sin j' \sin(nw - \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1)$$
$$+ \sum \overline{A}_{n\cdot 0\cdot 2}^{1\cdot 0} R \sin^2 j' \sin nw + \sum \overline{A}_{n\cdot 0\cdot 2}^{+2\cdot 1\cdot 0} R \sin^2 j' \sin(nw + 2\mathfrak{v}_1)$$
$$+ \sum \overline{A}_{n\cdot 0\cdot 2}^{-2\cdot 1\cdot 0} R \sin^2 j' \sin(nw - 2\mathfrak{v}_1)$$

Die Koefficienten sind:

(23a)
$$\overline{A}_{n\cdot 2\cdot 0}^{1\cdot 0} = \frac{n}{4}(\overline{Q}_{n-1\cdot 1\cdot 0} + \overline{Q}_{n+1\cdot 1\cdot 0}) \qquad \overline{A}_{n\cdot 1\cdot 1}^{+2\cdot 1\cdot 0} = \frac{n+2}{2}\overline{Q}_{n+1\cdot 1\cdot 0} \qquad \overline{A}_{n\cdot 0\cdot 2}^{1\cdot 0} = \frac{n}{4}(\overline{Q}_{n-1\cdot 1\cdot 0} + \overline{Q}_{n+1\cdot 1\cdot 0})$$
$$\overline{A}_{n\cdot 2\cdot 0}^{+2\cdot 1\cdot 0} = -\frac{n+2}{4}\overline{Q}_{n+1\cdot 1\cdot 0} \qquad \overline{A}_{n\cdot 1\cdot 1}^{+1\cdot 1\cdot 0} = -\frac{n}{2}\overline{Q}_{n-1\cdot 1\cdot 0} \qquad \overline{A}_{n\cdot 0\cdot 2}^{+2\cdot 1\cdot 0} = -\frac{n+2}{4}\overline{Q}_{n+1\cdot 1\cdot 0}$$
$$\overline{A}_{n\cdot 2\cdot 0}^{-2\cdot 1\cdot 0} = -\frac{n-2}{4}\overline{Q}_{n-1\cdot 1\cdot 0} \qquad \overline{A}_{n\cdot 1\cdot 1}^{-1\cdot 1\cdot 0} = -\frac{n}{2}\overline{Q}_{n+1\cdot 1\cdot 0} \qquad \overline{A}_{n\cdot 0\cdot 2}^{-2\cdot 1\cdot 0} = -\frac{n-2}{4}\overline{Q}_{n-1\cdot 1\cdot 0}$$
$$\overline{A}_{n\cdot 1\cdot 1}^{-2\cdot 1\cdot 0} = \frac{n-2}{2}\overline{Q}_{n-1\cdot 1\cdot 0}$$

$$\overline{A}_{0\cdot 2\cdot 0}^{1\cdot 0} = 0 \qquad \overline{A}_{0\cdot 1\cdot 1}^{+2\cdot 1\cdot 0} = \overline{Q}_{1\cdot 1\cdot 0} \qquad \overline{A}_{0\cdot 0\cdot 2}^{1\cdot 0} = 0$$
$$\overline{A}_{0\cdot 2\cdot 0}^{+2\cdot 1\cdot 0} = -\tfrac{1}{2}\overline{Q}_{1\cdot 1\cdot 0} \qquad \overline{A}_{0\cdot 1\cdot 1}^{+1\cdot 1\cdot 0} = 0 \qquad \overline{A}_{0\cdot 0\cdot 2}^{+2\cdot 1\cdot 0} = -\tfrac{1}{2}\overline{Q}_{1\cdot 1\cdot 0}$$
$$\overline{A}_{0\cdot 2\cdot 0}^{-2\cdot 1\cdot 0} = 0 \qquad \overline{A}_{0\cdot 1\cdot 1}^{-1\cdot 1\cdot 0} = 0 \qquad \overline{A}_{0\cdot 0\cdot 2}^{-2\cdot 1\cdot 0} = 0$$
$$\overline{A}_{0\cdot 1\cdot 1}^{-2\cdot 1\cdot 0} = 0$$

www.libtool.com.cn

In P kämen noch folgende von Herrn Brendel nicht gegebene Glieder hinzu:

$$
\begin{aligned}
\text{(24a)}\quad \text{pars}\,P = {} & \sum B^{1\cdot 0}_{n\cdot 2\cdot 0} R\eta^2 \cos nw && + \sum B^{+2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} R\eta\eta' \cos(nw+\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) && + \sum B^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 2} R\eta'^2 \cos nw \\
& + \sum B^{+2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 2\cdot 0} R\eta^2 \cos(nw+2\mathfrak{v}) && + \sum B^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} R\eta\eta' \cos(nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && + \sum B^{+2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 2} R\eta'^2 \cos(nw+2\mathfrak{v}_1) \\
& + \sum B^{-2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 2\cdot 0} R\eta^2 \cos(nw-2\mathfrak{v}) && + \sum B^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} R\eta\eta' \cos(nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) && + \sum B^{-2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 2} R\eta'^2 \cos(nw-2\mathfrak{v}_1) \\
& && + \sum B^{-2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} R\eta\eta' \cos(nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && \\
& + \sum n\mu B_{n\cdot 2\cdot 0} K\eta^2 \sin nw && + \sum n\mu B^{+2}_{n\cdot 1\cdot 1} K\eta\eta' \sin(nw+\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) && + \sum n\mu B_{n\cdot 0\cdot 2} K\eta'^2 \sin nw \\
& + \sum n\mu B^{+2}_{n\cdot 2\cdot 0} K\eta^2 \sin(nw+2\mathfrak{v}) && + \sum n\mu B^{+1}_{n\cdot 1\cdot 1} K\eta\eta' \sin(nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && + \sum n\mu B^{+2}_{n\cdot 0\cdot 2} K\eta'^2 \sin(nw+2\mathfrak{v}_1) \\
& + \sum n\mu B^{-2}_{n\cdot 2\cdot 0} K\eta^2 \sin(nw-2\mathfrak{v}) && + \sum n\mu B^{-1}_{n\cdot 1\cdot 1} K\eta\eta' \sin(nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) && + \sum n\mu B^{-2}_{n\cdot 0\cdot 2} K\eta'^2 \sin(nw-2\mathfrak{v}_1) \\
& && + \sum n\mu B^{-2}_{n\cdot 1\cdot 1} K\eta\eta' \sin(nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && \\
& + \sum \overline{B}^{1\cdot 0}_{n\cdot 2\cdot 0} R\sin^2 j \cos nw && + \sum \overline{B}^{+2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} R\sin j \sin j' \cos(nw+\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) && + \sum \overline{B}^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 2} R\sin^2 j' \cos nw \\
& + \sum \overline{B}^{+2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 2\cdot 0} R\sin^2 j \cos(nw+2\mathfrak{v}) && + \sum \overline{B}^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} R\sin j \sin j' \cos(nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && + \sum \overline{B}^{+2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 2} R\sin^2 j' \cos(nw+2\mathfrak{v}_1) \\
& + \sum \overline{B}^{-2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 2\cdot 0} R\sin^2 j \cos(nw-2\mathfrak{v}) && + \sum \overline{B}^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} R\sin j \sin j' \cos(nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) && + \sum \overline{B}^{-2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 2} R\sin^2 j' \cos(nw-2\mathfrak{v}_1) \\
& && + \sum \overline{B}^{-2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} R\sin j \sin j' \cos(nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && \\
& + \sum n\mu \overline{B}_{n\cdot 2\cdot 0} K\sin^2 j \sin nw && + \sum n\mu \overline{B}^{+2}_{n\cdot 1\cdot 1} K\sin j \sin j' \sin(nw+\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) && + \sum n\mu \overline{B}_{n\cdot 0\cdot 2} K\sin^2 j' \sin nw \\
& + \sum n\mu \overline{B}^{+2}_{n\cdot 2\cdot 0} K\sin^2 j \sin(nw+2\mathfrak{v}) && + \sum n\mu \overline{B}^{+1}_{n\cdot 1\cdot 1} K\sin j \sin j' \sin(nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && + \sum n\mu \overline{B}^{+2}_{n\cdot 0\cdot 2} K\sin^2 j' \sin(nw+2 \\
& + \sum n\mu \overline{B}^{-2}_{n\cdot 2\cdot 0} K\sin^2 j \sin(nw-2\mathfrak{v}) && + \sum n\mu \overline{B}^{-1}_{n\cdot 1\cdot 1} K\sin j \sin j' \sin(nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) && + \sum n\mu \overline{B}^{-2}_{n\cdot 0\cdot 2} K\sin^2 j' \sin(nw-2 \\
& && + \sum n\mu \overline{B}^{-2}_{n\cdot 1\cdot 1} K\sin j \sin j' \sin(nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) &&
\end{aligned}
$$

Die Werte der B-Koefficienten sind:

$$
\begin{aligned}
\text{(24a)}\quad B^{1\cdot 0}_{n\cdot 2\cdot 0} &= 3P_{n\cdot 3\cdot 0} - 2n^2\mu^2 P_{n\cdot 1\cdot 0} + 2P_{(n\cdot 1\cdot 0)1\cdot 0} & \overline{B}^{1\cdot 0}_{n\cdot 2\cdot 0} &= -\tfrac{1}{4}(\overline{P}_{n-1\cdot 1\cdot 0} + \overline{P}_{n+1\cdot 1\cdot 0}) \\
B^{+2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 2\cdot 0} &= \tfrac{3}{2} P_{n\cdot 3\cdot 0} + 2n\mu P_{n\cdot 2\cdot 0} + (n^2\mu^2 - \tfrac{3}{4} n\mu) P_{n\cdot 1\cdot 0} & \overline{B}^{+2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 2\cdot 0} &= \tfrac{1}{4} \overline{P}_{n+1\cdot 1\cdot 0} \\
B^{-2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 2\cdot 0} &= \tfrac{3}{2} P_{n\cdot 3\cdot 0} - 2n\mu P_{n\cdot 2\cdot 0} + (n^2\mu^2 + \tfrac{3}{4} n\mu) P_{n\cdot 1\cdot 0} & \overline{B}^{-2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 2\cdot 0} &= \tfrac{1}{4} \overline{P}_{n-1\cdot 1\cdot 0} \\
\\
B^{+2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} &= P_{n+1\cdot 2\cdot 1} - 2(n+1) P_{n+1\cdot 2\cdot 0} + n\mu P_{n+1\cdot 1\cdot 1} - 2n(n+1)\mu P_{n+1\cdot 1\cdot 0} & \overline{B}^{+2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} &= -\tfrac{1}{2} \overline{P}_{n+1\cdot 1\cdot 0} \\
B^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} &= P_{n-1\cdot 2\cdot 1} + 2(n-1) P_{n-1\cdot 2\cdot 0} + n\mu P_{n-1\cdot 1\cdot 1} + 2n(n-1)\mu P_{n-1\cdot 1\cdot 0} & \overline{B}^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} &= \tfrac{1}{2} \overline{P}_{n-1\cdot 1\cdot 0} \\
B^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} &= P_{n+1\cdot 2\cdot 1} - 2(n+1) P_{n+1\cdot 2\cdot 0} - n\mu P_{n+1\cdot 1\cdot 1} + 2n(n+1)\mu P_{n+1\cdot 1\cdot 0} & \overline{B}^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} &= \tfrac{1}{2} \overline{P}_{n+1\cdot 1\cdot 0} \\
B^{-2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} &= P_{n-1\cdot 2\cdot 1} + 2(n-1) P_{n-1\cdot 2\cdot 0} - n\mu P_{n-1\cdot 1\cdot 1} - 2n(n-1)\mu P_{n-1\cdot 1\cdot 0} & \overline{B}^{-2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} &= -\tfrac{1}{2} \overline{P}_{n-1\cdot 1\cdot 0} \\
\\
B^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 2} &= P_{n\cdot 1\cdot 2} - 2P_{n\cdot 1\cdot 1} - 2n^2 P_{n\cdot 1\cdot 0} + 2P_{(n\cdot 1\cdot 0)0\cdot 1} & \overline{B}^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 2} &= -\tfrac{1}{4}(\overline{P}_{n-1\cdot 1\cdot 0} + \overline{P}_{n+1\cdot 1\cdot 0}) \\
B^{+2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 2} &= \tfrac{1}{2} P_{n+2\cdot 1\cdot 2} - (n+1) P_{n+2\cdot 1\cdot 1} + (n^2 + \tfrac{11}{4} n + \tfrac{3}{2}) P_{n+2\cdot 1\cdot 0} & \overline{B}^{+2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 2} &= \tfrac{1}{4} \overline{P}_{n+1\cdot 1\cdot 0} \\
B^{-2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 2} &= \tfrac{1}{2} P_{n-2\cdot 1\cdot 2} + (n-1) P_{n-2\cdot 1\cdot 1} + (n^2 - \tfrac{11}{4} n + \tfrac{3}{2}) P_{n-2\cdot 1\cdot 0} & \overline{B}^{-2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 2} &= \tfrac{1}{4} \overline{P}_{n-1\cdot 1\cdot 0}
\end{aligned}
$$

www.libtool.com.cn

Die Abteilung $n = 0$ lautet hier:

(24a)
$$B^{1\cdot0}_{0\cdot2\cdot0} = \tfrac{3}{2}P_{0\cdot3\cdot0} + P_{(0\cdot1\cdot0)1\cdot0} \qquad B^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot1} = P_{1\cdot2\cdot1} - 2P_{1\cdot2\cdot0} \qquad B^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot2} = \tfrac{1}{2}P_{0\cdot1\cdot2} - P_{0\cdot1\cdot1} + P_{(0\cdot1\cdot0)0\cdot1}$$
$$B^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot2\cdot0} = \tfrac{3}{2}P_{0\cdot3\cdot0} \qquad B^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot1} = P_{1\cdot2\cdot1} - 2P_{1\cdot2\cdot0} \qquad B^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot2} = \tfrac{1}{2}P_{2\cdot1\cdot2} - P_{2\cdot1\cdot1} + \tfrac{3}{2}P_{2\cdot1\cdot0}$$
$$B^{-2\cdot1\cdot0}_{0\cdot2\cdot0} = 0 \qquad B^{-1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot1} = 0 \qquad B^{-2\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot2} = 0, \quad B^{-2\cdot1\cdot0}_{1\cdot0\cdot2} = \tfrac{1}{2}P_{1\cdot1\cdot2} - \tfrac{1}{4}P_{1\cdot1\cdot0}$$
$$B^{-2\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot1} = 0$$

$$\overline{B}^{1\cdot0}_{0\cdot2\cdot0} = -\tfrac{1}{4}\overline{P}_{1\cdot1\cdot0} \qquad \overline{B}^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot1} = -\tfrac{1}{2}\overline{P}_{1\cdot1\cdot0} \qquad \overline{B}^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot2} = -\tfrac{1}{4}\overline{P}_{1\cdot1\cdot0}$$
$$\overline{B}^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot2\cdot0} = \tfrac{1}{4}\overline{P}_{1\cdot1\cdot0} \qquad \overline{B}^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot1} = \tfrac{1}{2}\overline{P}_{1\cdot1\cdot0} \qquad \overline{B}^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot2} = \tfrac{1}{4}\overline{P}_{1\cdot1\cdot0}$$
$$\overline{B}^{-2\cdot1\cdot0}_{0\cdot2\cdot0} = 0 \qquad \overline{B}^{-1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot1} = 0 \qquad \overline{B}^{-2\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot2} = 0$$
$$\overline{B}^{-2\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot1} = 0$$

Schliesslich sollen noch einige Ergänzungen zu Z gegeben werden:

(25a)
$$\begin{aligned}
\text{pars } Z = {} & \sum C^{+1\cdot0\cdot1}_{n\cdot0\cdot0\cdot1\cdot0}\, \mathfrak{Z}\eta\cos(nw+\mathrm{v}) && +\sum C^{+1\cdot0\cdot1}_{n\cdot0\cdot0\cdot0\cdot1}\, \mathfrak{Z}\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1)\\
& +\sum C^{-1\cdot0\cdot1}_{n\cdot0\cdot0\cdot1\cdot0}\, \mathfrak{Z}\eta\cos(nw-\mathrm{v}) && +\sum C^{-1\cdot0\cdot1}_{n\cdot0\cdot0\cdot0\cdot1}\, \mathfrak{Z}\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1)\\
& +\sum C^{+2\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\, R\eta\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}+\mathrm{v}) && +\sum C^{+2\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}\, R\eta'\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1)\\
& +\sum C^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\, R\eta\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}-\mathrm{v}) && +\sum C^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}\, R\eta'\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)\\
& +\sum C^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\, R\eta\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}+\mathrm{v}) && +\sum C^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}\, R\eta'\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1)\\
& +\sum C^{-2\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\, R\eta\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}-\mathrm{v}) && +\sum C^{-2\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}\, R\eta'\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)\\
& +\sum C^{+2\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}\, R\eta\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) && +\sum C^{+2\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}\, R\eta'\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1)\\
& +\sum C^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}\, R\eta\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) && +\sum C^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}\, R\eta'\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)\\
& +\sum C^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}\, R\eta\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) && +\sum C^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}\, R\eta'\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1)\\
& +\sum C^{-2\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}\, R\eta\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) && +\sum C^{-2\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}\, R\eta'\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)\\
& -\sum n\mu\, C^{+2}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\, K\eta\sin j\cos(nw+\mathfrak{v}+\mathrm{v}) && -\sum n\mu\, C^{+2}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}\, K\eta'\sin j\cos(nw+\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1)\\
& -\sum n\mu\, C^{+1}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\, K\eta\sin j\cos(nw+\mathfrak{v}-\mathrm{v}) && -\sum n\mu\, C^{+1}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}\, K\eta'\sin j\cos(nw+\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)\\
& -\sum n\mu\, C^{-1}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\, K\eta\sin j\cos(nw-\mathfrak{v}+\mathrm{v}) && -\sum n\mu\, C^{-1}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}\, K\eta'\sin j\cos(nw-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1)\\
& -\sum n\mu\, C^{-2}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\, K\eta\sin j\cos(nw-\mathfrak{v}-\mathrm{v}) && -\sum n\mu\, C^{-2}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}\, K\eta'\sin j\cos(nw-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)\\
& -\sum n\mu\, C^{+2}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}\, K\eta\sin j'\cos(nw+\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) && -\sum n\mu\, C^{+2}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}\, K\eta'\sin j'\cos(nw+\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1)\\
& -\sum n\mu\, C^{+1}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}\, K\eta\sin j'\cos(nw+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) && -\sum n\mu\, C^{+1}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}\, K\eta'\sin j'\cos(nw+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)\\
& -\sum n\mu\, C^{-1}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}\, K\eta\sin j'\cos(nw-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) && -\sum n\mu\, C^{-1}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}\, K\eta'\sin j'\cos(nw-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1)\\
& -\sum n\mu\, C^{-2}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}\, K\eta\sin j'\cos(nw-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) && -\sum n\mu\, C^{-2}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}\, K\eta'\sin j'\cos(nw-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)
\end{aligned}$$

Hier ist

(25a)
$$C^{+1\cdot0\cdot1}_{n\cdot0\cdot0\cdot1\cdot0} = 2n\mu\, Y_{n\cdot0\cdot0} + Y_{n\cdot1\cdot0} \qquad C^{+1\cdot0\cdot1}_{n\cdot0\cdot0\cdot0\cdot1} = -2(n+1)\, Y_{n+1\cdot0\cdot0} + Y_{n+1\cdot0\cdot1}$$
$$C^{-1\cdot0\cdot1}_{n\cdot0\cdot0\cdot1\cdot0} = -2n\mu\, Y_{n\cdot0\cdot0} + Y_{n\cdot1\cdot0} \qquad C^{-1\cdot0\cdot1}_{n\cdot0\cdot0\cdot0\cdot1} = 2(n-1)\, Y_{n-1\cdot0\cdot0} + Y_{n-1\cdot0\cdot1}$$

www.libtool.com.cn

$$
\begin{aligned}
C^{+2\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} &= Y_{n\cdot2\cdot0} & C^{+2\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} &= \tfrac{1}{2} Y_{n+1\cdot1\cdot1}\\
C^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} &= Y_{n\cdot2\cdot0} & C^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} &= \tfrac{1}{2} Y_{n-1\cdot1\cdot1}\\
C^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} &= -Y_{n\cdot2\cdot0} & C^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} &= -\tfrac{1}{2} Y_{n+1\cdot1\cdot1}\\
C^{-2\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} &= -Y_{n\cdot2\cdot0} & C^{-2\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} &= -\tfrac{1}{2} Y_{n-1\cdot1\cdot1}\\
C^{+2\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} &= X_{n+1\cdot2\cdot0} & C^{+2\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1} &= \tfrac{1}{2} X_{n+2\cdot1\cdot1}\\
C^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} &= X_{n+1\cdot2\cdot0} & C^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1} &= \tfrac{1}{2} X_{n\cdot1\cdot1}\\
C^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} &= -X_{n-1\cdot2\cdot0} & C^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1} &= -\tfrac{1}{2} X_{n\cdot1\cdot1}\\
C^{-2\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} &= -X_{n-1\cdot2\cdot0} & C^{-2\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1} &= -\tfrac{1}{2} X_{n-2\cdot1\cdot1}
\end{aligned}
$$

Des weiteren ist:

(25a)

$$
\begin{aligned}
C^{+1\cdot0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0\cdot1\cdot0} &= Y_{0\cdot1\cdot0} & C^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} &= Y_{0\cdot2\cdot0} & C^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} &= \tfrac{1}{2} Y_{1\cdot1\cdot1}\\
C^{-1\cdot0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0\cdot1\cdot0} &= 0 & C^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} &= Y_{0\cdot2\cdot0} & C^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} &= \tfrac{1}{2} Y_{1\cdot1\cdot1}\\
C^{+1\cdot0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0\cdot0\cdot1} &= -2Y_{1\cdot0\cdot0}+Y_{1\cdot0\cdot1} & C^{-1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} &= 0 & C^{-1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} &= 0\\
C^{-1\cdot0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0\cdot0\cdot1} &= 0 & C^{-2\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} &= 0 & C^{-2\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} &= X_{1\cdot2\cdot0} & C^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1} &= \tfrac{1}{2} X_{2\cdot1\cdot1}\\
C^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} &= X_{1\cdot2\cdot0} & C^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1} &= \tfrac{1}{2} X_{1\cdot1\cdot1}\\
C^{-1\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} &= 0 & C^{-1\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1} &= 0\\
C^{-2\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} &= 0 & C^{-2\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1} &= 0, \quad C^{-2\cdot1\cdot0}_{1\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1} = -\tfrac{1}{2} X_{1\cdot1\cdot1}
\end{aligned}
$$

Wie aus den Formeln 23, 24, 25 hervorgeht, schreiten die Entwicklungen direkt nach Potenzen von Excentricitäts- und Neigungsmodul fort, was ein Grundprincip der Methode Herrn Brendels ist. Ausserdem treten noch die Potenzen der störenden Masse auf, ein Umstand, der nur für die charakteristischen Planeten von Bedeutung ist, da nur für sie eine Mitnahme von Störungen zweiter Ordnung in Bezug auf die Masse nötig ist. Demnach kommen die hier gegebenen Ergänzungen zu Q, P, Z auch nur für diese Planeten in Betracht, und da bei der Entwicklung der Derivierten schon Glieder dritten Grades vernachlässigt sind, also wir auch in diesen Reihen den dritten Grad fortlassen können, so werden sie auch nur für charakteristische Planeten der ersten Klasse gebraucht werden, also für den Hecuba-, Hilda- und Thule-Typus.

www.libtool.com.cn

Zweites Kapitel.

Definition der charakteristischen und kritischen Planeten. — Aufstellung der Differentialgleichungen für die Planeten des Hecuba-Typus unter Mitnahme der zweiten Potenz der störenden Masse in den charakteristischen Gliedern in Q, P, Z.

1) Es sollen jetzt die charakteristischen und kritischen Planeten, mit denen sich unsere Untersuchungen hauptsächlich zu beschäftigen haben, genau definiert werden. Zu dem Zwecke wollen wir die Form der Argumente betrachten. Nach Herrn Brendel ist:

$$w = (1-\mu_1)v - B - \mu\overline{V}, \tag{26}$$

welche Grösse ja in allen charakteristischen Argumenten auftritt. Hier ist v die wahre Länge in der momentanen Bahnebene, B eine Konstante, und zwar ist

$$B = \Lambda' - \mu\Lambda. \tag{27}$$

$\overline{V}$ ist bis auf ein secular Glied gleich V, dem langperiodischen und secularen Teile der Funktion W, wie wir ihn durch Integration der Differentialgleichung erhalten. Ferner ist

$$\mu = \frac{n'}{n} \tag{28}$$

gleich dem Verhältnis der Bewegungskonstanten des störenden und gestörten Körpers. Es ist demnach hier n das Bahn-Element, wie es den Principien der Gyldén'schen Theorie entsprechend unter Berücksichtigung der charakteristischen und elementaren Glieder bestimmt wird. Dagegen sei gesetzt

$$\mu_1 = \frac{n'}{n_1}, \tag{29}$$

und hier ist, wo es sich um kritische Planeten handelt, n_1 nicht identisch mit n. Den Grund sieht man leicht ein. Nach den Bemerkungen, die wir zur Ersetzung von v' durch v im vorigen Kapitel machten, wurde ja das Argument so umgestaltet, dass in ihm nur secular und langperiodische Teile blieben. Also

$$w = (1-\mu)v - B - \mu V + \text{p. sec. H} - \text{p. sec. H}'. \tag{26a}$$

V erhalten wir aus der Differentialgleichung von W und es soll alle langperiodischen und secularen Glieder enthalten. Lassen wir einstweilen noch die sogenannten exargumentalen und A-Glieder fort, so ist die Form $V = (c_0 + \gamma)v$ + period. Glieder.

www.libtool.com.cn

Hier bezeichnet c_0 eine Grösse von der Ordnung m', während γ für „gewöhnliche Planeten", deren mittlere Bewegung zu der des störenden Körpers in keinem niedrigzahligen Verhältnis steht, rein zweiter Ordnung ist. Unter „charakteristischen Planeten" sollen dagegen solche verstanden werden, bei denen das Verhältnis der beiden mittleren Bewegungen sich einem echten Bruche nähert, für diese ist γ noch als von der Ordnung der störenden Masse anzusehen. Als „kritisch" wollen wir nach Herrn Brendel solche Planeten betrachten, bei denen das Verhältnis diesen Bruch fast erreicht und die Grösse γ sich wesentlich der Einheit nähert, also mit der störenden Masse nicht mehr verglichen werden kann.

Wie nun aus Formel (3) hervorgeht, setzt sich $W = V + K$ der Hauptsache nach aus S und R zusammen, der konstante Teil muss es demnach auch thun. Bei der Integration der Gleichung für S entsteht durch das Auftreten eines Gliedes $\frac{0}{0}$ eine willkürliche Konstante $= a_0$; und der konstante Teil in R_0 wird sich gemäss der Differentialgleichung (2) aus dieser, sowie aus P zusammensetzen, soweit es Glieder nullten Grades betrifft. Nennen wir diese Konstante b_0, so wird nach (3) unter Vernachlässigung von Gliedern rein zweiter und höherer Ordnung sein:

$$c_0 + \gamma = a_0 - 2b_0.$$

Da ferner die 6 Integrationskonstanten des Problems bestimmt sind, so ist a_0 überzählig. Herr Brendel verfügt für die gewöhnlichen und charakteristischen Planeten so über sie, dass

$$a_0 - 2b_0 = c_0 + \gamma = 0 \tag{30}$$

wird. Für den Fall kritischer Planeten, wo γ bedeutend gross ist, müssten wir auch a_0 einen entsprechend grossen Wert geben, um die rechte Seite annullieren zu können, und da in den Differentialgleichungen für R und W nach Potenzen von S entwickelt wird, so würden wir bei kritischen Planeten eine brauchbare Entwicklung infolge dieses a_0 nicht erhalten. Deswegen gilt für kritische Planeten die Bedingung

$$a_0 - 2b_0 = c_0 = 0, \qquad \gamma \neq 0. \tag{30a}$$

Aus diesem Grunde wird V ein seculares Glied erhalten.

Nun tritt V in den Argumenten auf, und da es bei charakteristischen Planeten nicht mehr mit der störenden Masse vergleichbar ist, wird man nicht nach Potenzen von V entwickeln dürfen. Wir müssen demnach seinem Vorhandensein innerhalb des Argumentes Rechnung tragen, und dies geschieht durch die Gyldén'sche partielle Integration. Hierdurch entstehen die von Gyldén als „exargumentale Glieder" bezeichneten Grössen, und zwar tritt $\frac{dV}{dv}$ als Faktor zu dem betreffenden Gliede aus dem Argument heraus. Um diesen Nachteil einigermassen auszugleichen, sucht man zu bewirken, dass $\frac{dV}{dv}$ von möglichst

www.libtool.com.cn

hohem Grade, also erst in höheren Gliedern der Entwicklung merkbar wird; da $\frac{dV}{dv}$ mindestens ersten Grades ist, so käme hier nur ein konstantes Glied als gefährlich in Betracht. Dieses lässt sich beseitigen. Herr Brendel erreicht es dadurch, dass er noch eine zweite mittlere Bewegung einführt, das bereits erwähnte n_1.

Um recht klar zu sein, soll schon an dieser Stelle über die auftretenden secularen Glieder gehandelt werden. Wir hatten $W = K + V$ gesetzt, wo V alle langperiodischen und secularen Glieder enthalten soll. Wie später dargethan wird, sind die secularen Teile

$$\text{p. sec. } V = \gamma v + \gamma_0 v + [\bar{\gamma}_0 + \bar{g} v + \bar{\bar{g}} v^2 + \cdots] v,$$

γ ist nullten resp. geraden Grades, γ_0 und $\bar{\gamma}_0$ etc. mindestens zweiten Grades.

γ_0 entsteht bei Ausführung der Integration von $\frac{dV}{dv}$ infolge der von uns angewandten partiellen Integrationsmethode. Die Klammer stellt die A-Glieder dar und tritt ebenfalls erst während des Integrationsprocesses auf; denn wie später gezeigt wird, sind diese Glieder selbst im Falle kritischer Planeten in $\frac{dV}{dv}$ von der Ordnung m' resp. $\frac{m'^2}{\delta_1}$. Durch die Integration erhalten sie einen Divisor von beiläufig der Ordnung m' und erscheinen in V stark vergrössert. Um dies zu vermeiden, verwandeln wir sie kurz vor der Integration in eine Potenzreihe, was in unserem Falle der Bewegung für beschränkte Zeiträume statthaft ist.

Die Differentialgleichung $\frac{dV}{dv}$ soll dagegen die A-Glieder noch in periodischer Form enthalten, d. h. $[\bar{\gamma}_0 + \bar{g} v + \cdots]$ nicht, natürlich auch γ_0 nicht, da es ebenfalls erst während des Integrationsprocesses auftritt, sondern nur γ.

Das Integral V wird alle secularen Glieder haben.

Während p. sec. V obigen Wert hat, ist p. const. $\frac{dV}{dv} = \gamma$.

Wir wollen nun schreiben:

$$(31)\quad \begin{cases} V = \overline{V} + \gamma v, \quad \text{also} \quad \overline{V} = \gamma_0 v + [\bar{\gamma}_0 + \bar{g} v + \cdots] v + \text{period. Glied.}, \\ \qquad\qquad \dfrac{dV}{dv} = \dfrac{d\overline{V}}{dv} + \gamma, \end{cases}$$

dagegen ist $\frac{d\overline{V}}{dv}$ rein periodisch, da nach obigem $\frac{dV}{dv}$ nur das konstante Glied γ, also $\frac{dV}{dv} - \gamma = \frac{d\overline{V}}{dv}$ keins mehr enthalten kann.

Setzt man:

$$(32)\qquad \text{p. sec. H} = cv, \qquad \text{p. sec. H}' = \mu_2 c' v,$$

wo über die Bedeutung des μ_2 später gesprochen wird, so geht (26a) über in:

$$w = v + [-\mu + c - \mu_2 c' - \mu\gamma] v - B - \mu\overline{V}.$$

www.libtool.com.cn

Wir bezeichnen nun:

$$\mu_1 = \mu(1+\gamma) - c + \mu_2 c', \tag{33}$$

und nach Formel (29):

$$\mu_1 = \frac{n'}{n_1},$$

so dass wird:

$$w = (1-\mu_1)v - B - \mu\overline{V}. \tag{34}$$

Durch Aussonderung des γv aus V und Einführung des μ_1 steht nur noch $\overline{V}$ im Argumente, und da bei der partiellen Integration der Differentialquotient heraustritt, so kann dies nur $\frac{d\overline{V}}{dv}$ sein. Dies enthält aber, wie eben gezeigt wurde, kein konstantes Glied mehr und unser Zweck wäre damit erfüllt.

Durch Einführung von n_1 resp. μ_1 in die Argumente ist ein weiterer Vorteil von grundlegender Bedeutung für unsere Theorie erreicht. Man bezeichnet für den Specialfall des Hecuba-Typus

$$\mu = \frac{1-\delta}{2} \quad \text{resp.} \quad \mu_1 = \frac{1-\delta_1}{2} \tag{35}$$

wo δ im Falle einer Kommensurabilität numerisch der Masse vergleichbar, sogar null werden kann. Integrieren wir z. B. $\int m' \cos(2w-v)\,dv$, so tritt als Integrationsdivisor $2(1-\mu_1)-1 = \delta_1$ auf. Würde nun im Falle einer strengen Kommensurabilität $\delta_1 = 0$, so erhalten wir ein unendlich grosses Glied, die Methode wäre vollständig hinfällig. Herr Brendel hat bewiesen, dass eine strenge Kommensurabilität nur zwischen den Bewegungskonstanten n und n' eintreten kann, also dass nur $\delta = 0$ werden kann. Hingegen wird δ_1 stets von null verschieden sein, und mit diesem Divisor allein haben wir es infolge unserer Definition des μ_1 und $\overline{V}$ zu thun. Während δ durch die Nullstelle geht, macht δ_1 einen endlichen Sprung und kann sich der Null höchstens bis auf Grössen von der Ordnung $\sqrt[3]{m'^3}$ nähern, und dies auch nur für $\varkappa = \varkappa' = 0$. Den Beweis hat Herr Brendel für den Hecuba- und Hilda-Typus specialisiert [1]). Für uns kommt nur der erstere in Betracht.

Wir haben durch diese Bestimmung des μ_1 und des Argument-$\overline{V}$ nicht nur das Auftreten von exargumentalen Gliedern nullten Grades verhindert, sondern auch das Erscheinen fast verschwindender Divisoren, zwei Vorteile, welche für die Konvergenz der Methode von einschneidender Bedeutung sind und uns für den Zweck abgekürzter Tafeln gestatten, die kurze und mathematisch sehr einfache Gyldén'sche partielle Integration anzuwenden. Was die in Formel (32) er-

1) Astronomische Nachrichten Bd. 140, No. 3346, sowie Theorie der kleinen Planeten, Kap. 7, pag. 124—132 und pag. 150—154.

www.libtool.com.cn

wähnte Grösse μ_2 betrifft, so definiert sie Herr Brendel durch

$$\mu_2 = \frac{n'}{n_2} = \frac{1-\delta_2}{2}, \qquad \text{p. sec. } w = (1-\mu_2)v, \tag{36}$$

wo n_2 als „mittlere Bewegung in Länge" bezeichnet wird. Man erhält μ_2 durch Hinzufügung des durch die partielle Integration hervorgerufenen secularen Teiles $[\gamma_0+\bar{\gamma}_0]v$, so dass ist

$$(1-c')\mu_2 = \mu(1+\gamma+\gamma_0+\bar{\gamma}_0)-c, \tag{36a}$$

und man unter Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung und vierten Grades, d. h. von cc', c'^2 und $c'[\gamma_0+\bar{\gamma}_0]$ das μ_1 schreiben kann:

$$\mu_1 = \mu(1+\gamma)(1+c')-c. \tag{33a}$$

Diese Definition von μ_1 will ich im Einverständnis mit Herrn Brendel an Stelle der Gleichung Br. pag. 95 setzen. Es möge hier gleichzeitig auf einen Fehler aufmerksam gemacht werden, der sich in Br. pag. 69 findet. Dort muss die vierte Formel von unten heissen p. sec. $V = \gamma_0 v - \frac{1}{\mu}(c-\mu_2 c')v$ und weiter p. const. $\mu \frac{dV}{dv} = -c+\mu_2 c'$. Dieses Versehen ist jedoch für das Weitere von keinem Einfluss.

---

2) Wir wollen nun nachsehen, welche Glieder beim Hecuba-Typus durch das Auftreten eines kleinen Divisors stark vergrössert werden. Nach Gyldén unterscheidet man hier zwischen elementaren und charakteristischen Gliedern, in dem ersteren Falle wird der Divisor ς_n oder τ_n sein, also von der Ordnung m', in dem anderen Falle ist er δ_1 und im allgemeinen grösser als von der Ordnung m'. Nach Herrn Harzers Vorschlage bezeichnet man die Argumente der

langperiodisch elementaren	Glieder mit	A)	$\sigma_n v - A_n$
kurzperiodisch „	„ „	B)	$(1-\sigma_n)v - \Gamma_n$
langperiodisch charakteristischen	„ „	C)	$\delta_n v - C_n$
kurzperiodisch „	„ „	D)	$(1-\delta)_n v - D_n$.

Was die elementaren Glieder betrifft, so können sie nur dann auftreten, wenn die Argumente 0 sind oder w nicht enthalten. Wir werden sie vorläufig ausser acht lassen und uns nur mit den charakteristischen beschäftigen.

Die Differentialgleichungen für S und W sind linear[1]) und von der ersten Ordnung, es wird hier bei der Integration der Faktor von v direkt als Divisor auftreten, die für R und β sind von der zweiten Ordnung, es tritt hier, entsprechend ihrer Gestalt (1 + Faktor)$\times$(1 − Faktor) als Divisor auf. Mithin werden in S und

1) In der auf pag. 5 gegebenen Gestalt sind die Differentialgleichungen noch nicht auf die lineare Form gebracht. Dieselbe lässt sich jedoch ohne weiteres herstellen.

www.libtool.com.cn

W die C-Glieder zu kleinen Divisoren Anlass geben, in R und $\mathfrak{Z}$ dagegen die D-Glieder. Ausserdem werden jedoch in R die C-Glieder als gross erscheinen, da ja in der Differentialgleichung $2S$ auftritt; ebenso werden in W die D-Glieder beträchtlich sein, da $-2R$ in der Differentialgleichung auftritt, und da ebenfalls S auftritt, werden die C-Glieder das Quadrat des Divisors erhalten, also ausserordentlich gross werden. In $\mathfrak{Z}$ werden wegen der Gestalt der Differentialgleichung nur die D-Glieder stark vergrössert erscheinen.

Die Gestalt der für S und W in Betracht kommenden Argumente ist:

$$nw-v, \qquad nw-2v, \qquad nw-3v,$$

oder besser geschrieben in Hinsicht auf (34) und auf $1-\mu_1 = \frac{1+\delta_1}{2}$

$$\text{I)}\ \left[\frac{n}{2}(1+\delta_1)-1\right]v+C_n; \qquad \text{II)}\ \left[\frac{n}{2}(1+\delta_1)-2\right]+C_n; \qquad \text{III)}\ \left[\frac{n}{2}(1+\delta_1)-3\right]+C_n.$$

Divisoren von der Ordnung δ_1 können demnach nur in folgenden Fällen auftreten:

I) bei allen Gliedern ungeraden Grades, wenn $n = 2$ ist, mit dem ersten Grade beginnend;

II) bei allen Gliedern geraden Grades, wenn $n = 4$ ist, mit dem zweiten Grade beginnend;

III) bei allen Gliedern ungeraden Grades, wenn $n = 6$ ist, mit dem dritten Grade beginnend.

Für R und $\mathfrak{Z}$ treten kleine Divisoren auf bei folgenden Argumenten:

Für den 0ten Grad:	$2w$	;	der Divisor wird dann:	$2\left(\frac{1+\delta_1}{2}\right)-1$
„ „ 1 „	$4w-v$	;	„ „ „ „	$4\left(\frac{1+\delta_1}{2}\right)-2$
„ „ 2 „	$\begin{cases}2w\\6w-2v\end{cases}$	;	„ „ „ „	$\begin{cases}2\left(\frac{1+\delta_1}{2}\right)-1\\6\left(\frac{1+\delta_1}{2}\right)-3\end{cases}$
„ „ 3 „	$\begin{cases}4w-v\\8w-3v\end{cases}$	;	„ „ „ „	$\begin{cases}4\left(\frac{1+\delta_1}{2}\right)-2\\8\left(\frac{1+\delta_1}{2}\right)-4\end{cases}$

Eine genaue Uebersicht der Argumente der C- und der D-Glieder vom 0ten, 1ten und 2ten Grade ist in Tafel I gegeben sowohl für die wichtigsten Typen der

www.libtool.com.cn

ersten Klasse[1]), als auch die der zweiten Klasse. Aus dieser Tafel geht zweierlei hervor:

I) Erhöht sich die Klasse um eins, so treten auch erst bei einem um eins höheren Grade charakteristische Divisoren auf.

II) Innerhalb jeder Klasse ist eine deutliche Abstufung bemerkbar: Erhöht sich Zähler und Nenner des Bruches μ um die Klassenzahl, so vergrössert sich auch das Vielfache des Arguments um diese. Man könnte in jeder Klasse wieder von charakteristischen Planeten verschiedener Gattung sprechen. Je niedriger die Gattung, desto niedriger das Vielfache des Arguments, und um so früher treten in der Entwicklung charakteristische Glieder auf[2]). Auch in dieser Hinsicht steht der Hecuba-Typus an erster Stelle.

---

3) Wie schon erwähnt, erhalten die C-Glieder in S einen Divisor δ_1 und in V sogar δ_1^2. Für kritische Planeten, für welche $\delta_1 < \sqrt{m'}$ ist, werden derartige Glieder, soweit sie erster Ordnung, d. h. von der ersten Potenz der Masse sind, in V nullter Ordnung und noch grösser werden. Für diese Fälle dürfte eine erste Annäherung, d. h. eine Mitnahme Glieder erster Ordnung nicht genügen; denn die Glieder zweiter Ordnung werden dann schon von der Ordnung m' und grösser, also sehr merklich. Für die Konvergenz kommt dies weniger in Betracht, da es für unsere Zwecke ausreicht, in V nur eine endliche Anzahl Glieder mitzunehmen, und bei einer endlichen Reihe die Konvergenz nicht in Frage tritt; die rechnerische Arbeit dagegen wird hierdurch beträchtlich vermehrt.

In den älteren Theorieen pflegte man, wenn die erste Näherung in Bezug auf die Masse nicht ausreichte, die Störungen von der zweiten Potenz der Masse erst nachher mitzunehmen. In der Hansen'schen Theorie muss sogar so verfahren werden, da dort schon bei der Entwicklung der Störungsfunktion numerische Werte eingeführt werden, man sich also des Mittels begiebt, von vornherein zu untersuchen, ob Störungen zweiter Ordnung mitgenommen werden müssen und in welchen Gliedern. Nachdem jedoch Gyldén und Tisserand Methoden zu einer vollständig analytischen Entwicklung der Störungsfunktion gegeben haben, welche sich ganz besonders für kleine Planeten eignen, dürfte es geraten sein, diesen Vorteil in obiger Hinsicht zu verwerten.

Herr Brendel hat ein sehr schönes Näherungsverfahren entwickelt, um gleich von vornherein in der ersten Näherung die zweite Potenz der Masse wenigstens in den charakteristischen Gliedern zu berücksichtigen, so dass in den meisten Fällen, jedenfalls stets für den Zweck abgekürzter Tafeln, diese erste Näherung ausreichen dürfte.

---

1) Unter Klasse wird die Differenz Nenner — Zähler im Bruche μ verstanden. Beim Hecuba-Typus ist $\mu = \frac{1}{2}$, die Klassenzahl = 1. Beim Hestia-Typus ist $\mu = \frac{1}{4}$, die Klassenzahl = 2.

2) Unter „charakteristischen Gliedern" will ich im folgenden kurz immer diejenigen verstehen, welche bei der Integration kleine Divisoren der Ordnung δ_1 bedingen.

www.libtool.com.cn

Ich will hier dasselbe in seinen Grundzügen auseinandersetzen.

Wie aus den Gleichungen (23), (24), (25) hervorgeht, treten infolge von R, K, $\mathfrak{Z}$ die zweiten Potenzen der Masse auf. Wir wollen nun in Q, P, Z diese zweiten Potenzen der Masse in allen den Gliedern mitnehmen, welche durch kleine Divisoren vergrössert werden. Nach Tabelle I sind die C- und D-Glieder in R und K, sowie die D-Glieder in $\mathfrak{Z}$ von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$, d. h. nicht rein erster Ordnung — so nennen wir die Glieder, welche durch einen Divisor vergrössert werden. Wir machen jetzt für R, K, $\mathfrak{Z}$ Ansätze, welche nur diese Glieder enthalten, und deren Koefficienten wir als Unbekannte einführen. Multiplizieren wir diese mit P, Q, Z aus, so erhalten wir nominell Glieder zweiter Ordnung, in Wirklichkeit Glieder von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$, also erster bis zweiter Ordnung je nach Kleinheit des Divisors. Sind diese Glieder in P, Q, Z wieder charakteristische, so werden sie bei der Integration δ_1 als Divisor erhalten, also in S, R, W, $\mathfrak{Z}$, obwohl nominell zweiter Ordnung, rein nur erster Ordnung werden, oder noch grösser im Falle kritischer Planeten. Wir werden nun die Ansätze für R und K, sowie $\mathfrak{Z}$ derartig mit P, Q, Z komponieren, dass das Produkt nur aus charakteristischen Gliedern besteht. Wir bekommen dann den charakteristischen Teil dieser Derivierten genau einschliesslich Glieder zweiter Ordnung $\left(\text{in Wirklichkeit } \frac{m'^2}{\delta_1}\right)$, aber ausschliesslich rein zweiter Ordnung.

Wir machen also den folgenden Ansatz für R:

$$
\begin{aligned}
(37)\quad \text{pars } R \;=\; & \beta_1 \cos 2w + \beta_2 \eta \cos(2w - \mathfrak{v}) + \beta_4 \eta \cos(4w - \mathfrak{v}) \\
& + \beta_3 \eta' \cos(2w - \mathfrak{v}_1) + \beta_5 \eta' \cos(4w - \mathfrak{v}) \\
& + \beta_7 \eta^2 \cos 2w + \beta_{11} \eta^2 \cos(2w - 2\mathfrak{v}) + \beta_{14} \eta^2 \cos(4w - 2\mathfrak{v}) + \beta_{17} \eta^2 \cos(6w - 2\mathfrak{v}) \\
& + \beta_8 \eta\eta' \cos(2w + \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) + \beta_{12} \eta\eta' \cos(2w - \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) + \beta_{15} \eta\eta' \cos(4w - \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) + \beta_{18} \eta\eta' \cos(6w - \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) \\
& + \beta_9 \eta\eta' \cos(2w - \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1) + \beta_{13} \eta'^2 \cos(2w - 2\mathfrak{v}_1) + \beta_{16} \eta'^2 \cos(4w - 2\mathfrak{v}_1) + \beta_{19} \eta'^2 \cos(6w - 2\mathfrak{v}_1) \\
& + \beta_{10} \eta'^2 \cos 2w \\
& + \beta_{22} \sin^2 j \cos 2w + \beta_{24} \sin j \sin j' \cos(2w + \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) + \beta_{25} \sin j \sin j' \cos(2w - \mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1) + \beta_{26} \sin^2 j' \cos 2w \\
& + \beta_{27} \sin^2 j \cos(2w - 2\mathfrak{v}) + \beta_{30} \sin^2 j \cos(4w - 2\mathfrak{v}) + \beta_{33} \sin^2 j \cos(6w - 2\mathfrak{v}) \\
& + \beta_{28} \sin j \sin j' \cos(2w - \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) + \beta_{31} \sin j \sin j' \cos(4w - \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) + \beta_{34} \sin j \sin j' \cos(6w - \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) \\
& + \beta_{29} \sin^2 j' \cos(2w - 2\mathfrak{v}_1) + \beta_{32} \sin^2 j' \cos(4w - 2\mathfrak{v}_1) + \beta_{35} \sin^2 j' \cos(6w - 2\mathfrak{v}_1)
\end{aligned}
$$

Ich bezeichne hier nach Herrn Brendels Vorgange alle Koefficienten, welche mindestens von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$ oder noch grösser sind, mit griechischen Buchstaben. Die Koefficienten elementarer Glieder mögen dagegen mit deutschen Buchstaben bezeichnet werden. Die Wahl der Indices ist hier und überhaupt im folgenden anders angeordnet, als es Herr Ludendorff in seiner früher citierten

www.libtool.com.cn

Arbeit gethan hat, und zum Teil durch die Mitnahme der Breitenstörungen veranlasst. Ausserdem will ich gleich hier bemerken, dass ich sämtliche von Herrn Ludendorff gegebenen Formeln zur Kontrolle noch einmal unabhängig hiervon gerechnet habe. Es hat sich gezeigt, dass die Formeln im Druck, vor allem aber in der Entwicklung vollständig ohne Fehler sind, welcher Umstand es mir nahe legte, die Weiterführung der Theorie in gleicher mustergültiger Weise zu versuchen. Es sind sämtliche Formeln mindestens zweimal gerechnet oder durch Vergleichung mit denen Herrn Ludendorffs kontrolliert. Ausserdem gab der ähnliche Aufbau des von der Neigung herrührenden Teiles die Mittel zu einer weiteren Kontrolle an die Hand. Kompliziertere Entwicklungen sind dreimal unabhängig von einander durchgeführt.

Für K und $\frac{d\overline{V}}{dv}$, welches für die exargumentalen Glieder von Wichtigkeit ist, mache ich folgenden Ansatz:

$$(38)\qquad K = \gamma_1 \sin 2w + \gamma_4 \eta \sin(4w-\mathfrak{v}) + \gamma_6 \eta \sin(2w+\mathfrak{v}) + \gamma_5 \eta' \sin(4w-\mathfrak{v}_1)$$

$$+\gamma_7 \eta^2 \sin 2w + \gamma_{11} \eta^2 \sin(2w-2\mathfrak{v}) + \gamma_{17} \eta^2 \sin(6w-2\mathfrak{v}) + \gamma_{20} \eta^2 \sin(2w+2\mathfrak{v})$$
$$+\gamma_8 \eta\eta' \sin(2w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) + \gamma_{12} \eta\eta' \sin(2w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) + \gamma_{18} \eta\eta' \sin(6w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) + \gamma_{21} \eta^2 \sin 4w$$
$$+\gamma_9 \eta\eta' \sin(2w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) + \gamma_{13} \eta'^2 \sin(2w-2\mathfrak{v}_1) + \gamma_{19} \eta'^2 \sin(6w-2\mathfrak{v}_1) + \gamma_{22} \eta\eta' \sin(4w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)$$
$$+\gamma_{10} \eta'^2 \sin 2w$$

$$+\gamma_{23} \sin^2 j \sin 2w + \gamma_{27} \sin^2 j \sin(2w-2\mathfrak{v}) + \gamma_{33} \sin^2 j \sin(6w-2\mathfrak{v})$$
$$+\gamma_{24} \sin j \sin j' \sin(2w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) + \gamma_{28} \sin j \sin j' \sin(2w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) + \gamma_{34} \sin j \sin j' \sin(6w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)$$
$$+\gamma_{25} \sin j \sin j' \sin(2w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) + \gamma_{29} \sin^2 j' \sin(2w-2\mathfrak{v}_1) + \gamma_{35} \sin^2 j' \sin(6w-2\mathfrak{v}_1)$$
$$+\gamma_{26} \sin^2 j' \sin 2w$$

$$(39)\qquad \frac{d\overline{V}}{dv} = \gamma_2 \eta \cos(2w-\mathfrak{v}) + \gamma_{14} \eta^2 \cos(4w-2\mathfrak{v}) + \gamma_{30} \sin^2 j \cos(4w-2\mathfrak{v})$$
$$+\gamma_3 \eta' \cos(2w-\mathfrak{v}_1) + \gamma_{15} \eta\eta' \cos(4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) + \gamma_{31} \sin j \sin j' \cos(4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)$$
$$+\gamma_{16} \eta'^2 \cos(4w-2\mathfrak{v}_1) + \gamma_{32} \sin^2 j' \cos(4w-2\mathfrak{v}_1)$$

γ_6, sowie γ_{20}, γ_{21}, γ_{22} sind keine charakteristischen Glieder, aber trotzdem von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$. Wir wollen derartige Grössen „koordinierte Glieder" nennen. Ihr Auftreten ist durch die Gestalt der Differentialgleichung für K bedingt, da dort S und R multipliziert mit $\eta \cos \mathfrak{v}$ resp. $\eta^2 \cos 2\mathfrak{v}$ auftritt. Da h, welches in P und Q, und somit in S, R, W die Neigungsglieder verursacht, zweiten Grades ist, so müssen offenbar die koordinierten Glieder in K, soweit es von der Neigung herrührt, mindestens dritten Grades sein.

Die β_k und γ_k sind sämtlich unbekannt. Da diese Ansätze zu einer zweiten Näherung dienen und sie mit P, Q, Z multipliziert nur Beiträge von der

www.libtool.com.cn

Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$ zu den Differentialgleichungen liefern, so kann man nach Herrn Brendels Vorgang die γ_k in K sehr bequem durch die β_k ersetzen. Wir vernachlässigen in den γ_k die Teile von der Ordnung m' sowie $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ und $\frac{m'^2}{\delta_1^3}$ und setzen $\mu_1 = \frac{1}{2}$, was einem Fehler von der Ordnung m'^2 bis $\frac{m'^2}{\delta_1}$ im Schlussresultate von P, Q, Z gleichkommt. Wir dürfen dies, denn unsere Aufgabe ist es, diese Derivierten bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$ einschliesslich zu berechnen. Dann ergeben sich folgende Beziehungen für die γ_k, welche wohlverstanden nur für diesen Zweck der Näherung zu verwenden sind:

$$\gamma_1 = -2\beta_1 \quad \gamma_7 = -3\beta_1+3\beta_2-2\beta_7-\frac{A^{-1}_{2\cdot1\cdot0}}{\delta_1} \quad \gamma_{11} = 3\beta_1-3\beta_2+2\beta_{11}+\frac{A^{-1}_{2\cdot1\cdot0}}{\delta_1}$$

$$\gamma_4 = -2\beta_4 \quad \gamma_8 = 3\beta_8-2\beta_8-\frac{A^{-1}_{2\cdot0\cdot1}}{\delta_1} \quad \gamma_{12} = -3\beta_8+2\beta_{12}+\frac{A^{-1}_{2\cdot0\cdot1}}{\delta}$$

$$\gamma_5 = -2\beta_5 \quad \gamma_9 = -2\beta_9 \quad \gamma_{13} = 2\beta_{13}$$

$$\gamma_6 = \tfrac{1}{2}\beta_1 \quad \gamma_{10} = -2\beta_{10}$$

$$\gamma_{17} = -2\beta_{17} \quad \gamma_{20} = -\beta_1 \quad \gamma_{23} = -2\beta_{23} \quad \gamma_{27} = 2\beta_{27} \quad \gamma_{33} = -2\beta_{33}$$

$$\gamma_{18} = -2\beta_{18} \quad \gamma_{21} = \tfrac{1}{2}\beta_4 \quad \gamma_{24} = -2\beta_{24} \quad \gamma_{28} = 2\beta_{28} \quad \gamma_{34} = -2\beta_{34}$$

$$\gamma_{19} = -2\beta_{19} \quad \gamma_{22} = \tfrac{1}{2}\beta_5 \quad \gamma_{25} = -2\beta_{25} \quad \gamma_{29} = 2\beta_{29} \quad \gamma_{35} = -2\beta_{35}$$

$$\gamma_{26} = -2\beta_{26}$$

Die γ_k in $\frac{d\overline{V}}{dv}$ lassen wir einstweilen als Unbekannte bestehen und es folgt ihre strenge Berechnung später, ebenso die β_k, welche durch Vergleichung der Koefficienten des Integrals bestimmt werden. Weiterhin setzen wir:

$$(41)\quad \left.\begin{matrix} \mathfrak{Z} \\ \frac{d\mathfrak{Z}}{dv} \end{matrix}\right\} = \xi_1 \sin j \begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(4w-\mathfrak{v}) + \xi_3\eta \sin j \begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(2w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}) + \xi_5\eta' \sin j \begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(2w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)$$
$$+\xi_2 \sin j' \begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(4w-\mathfrak{v}_1) + \xi_4\eta \sin j \begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(2w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}) + \xi_6\eta' \sin j \begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(2w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1)$$

$$+\xi_7\eta \sin j' \begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(2w+\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}) \pm \xi_{11}\eta \sin j \begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(2w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}) + \zeta_{15}\eta \sin j \begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(6w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v})$$

$$+\xi_8\eta \sin j' \begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(2w-\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}) \pm \xi_{12}\eta' \sin j \begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(2w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) + \xi_{16}\eta' \sin j \begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(6w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)$$

$$+\xi_9\eta' \sin j' \begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(2w+\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_1) \pm \xi_{13}\eta \sin j' \begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(2w-\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}) + \xi_{17}\eta \sin j' \begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(6w-\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v})$$

$$+\xi_{10}\eta' \sin j' \begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(2w-\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_1) \pm \xi_{14}\eta' \sin j' \begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(2w-\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_1) + \xi_{18}\eta' \sin j' \begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(6w-\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_1)$$

www.libtool.com.cn

$\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}$ ist richtig bis auf Grössen v. d. Ord. m'. Der Fehler in R und P wird demnach v. d. Ord. m'^2 sein. Die ζ_k werden ebenfalls als Unbekannte in das Problem eingeführt und später durch Koefficientenvergleichung bestimmt.

---

4) Unter Berücksichtigung dieser Ansätze müssen wir nun die Derivierten der Störungsfunktion nach Massgabe der Formeln (23), (24), (25) berechnen. Wir erhalten sie in den gewöhnlichen Gliedern erster und zwar rein erster Ordnung. In den charakteristischen und auch in den elementaren dagegen wollen wir die zweiten Potenzen der Masse insofern berücksichtigen, als dieselben von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$ werden. Es ist uns dann gelungen, in den P, Q, Z die grössten Glieder zweiter Ordnung gleich in der ersten Näherung mitzunehmen, unter einem Fehler, der selbst für den Grenzwert von δ_1 kleiner als $\frac{m'^2}{\delta_1}$ ist. Der Fehler, den wir begehen, dass wir die dritte Potenz der Masse in den charakteristischen Gliedern hier vernachlässigen, wird dagegen im Maximum für den nullten Grad $\frac{m'^3}{\delta_1^2}$, den ersten Grad $\frac{m'^3}{\delta_1^3}$ resp. $\frac{m'^5}{\delta_1^5}$, den zweiten Grad $\frac{m'^3}{\delta_1^2}$ resp. $\frac{m'^5}{\delta_1^4}$ resp. $\frac{m'^5}{\delta_1^6}$ resp. $\frac{m'^7}{\delta_1^{10}}$, also für den Grenzwert von $\delta_1 \leqq \sqrt[3]{m'^2}$ kleiner als $\frac{m'^2}{\delta_1}$, und nur durch die exargumentalen Glieder m'. Aus diesem Grunde werden wir bei der zweiten Ordnung verbleiben.

Die Ausmultiplizierung dieser Ansätze und das Heraussuchen der charakteristischen Glieder ist eine äusserst mühsame Arbeit und ohne Interesse, so dass wir hier nur die Resultate geben wollen. Den Entstehungsprozess kann man sich leicht vergegenwärtigen.

Die P-Koefficienten habe ich in den C-Gliedern etwas genauer berechnet als Herr Ludendorff, was die Behandlung der kritischen Planeten erforderte. Um die hier gegebenen Resultate mit denen Herrn Ludendorffs vergleichen zu können, ist in Tafel II eine Umwandlungstabelle für die Bezeichnungen gegeben. Wir bekommen folgende Ausdrücke für die zu berücksichtigenden Teile der Derivierten der Störungsfunktion:

(42) **pars** Q $=$ $q_1\eta\sin\mathrm{v} + q_2\eta'\sin\mathrm{v}_1 + q_4\eta\eta'\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + q_7\sin j\sin j'\sin(\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)$

$$+ q_1\sin 2w + q_3\eta\sin(2w-\mathrm{v}) + q_4\eta\sin(4w-\mathrm{v})$$
$$+ q_8\eta'\sin(2w-\mathrm{v}_1) + q_5\eta'\sin(4w-\mathrm{v}_1)$$

$$+ q_7\eta^2\sin 2w + q_{11}\eta^2\sin(2w-2\mathrm{v}) + q_{14}\eta^2\sin(4w-2\mathrm{v}) + q_{17}\eta^2\sin(6w-2\mathrm{v})$$
$$+ q_6\eta\eta'\sin(2w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + q_{12}\eta\eta'\sin(2w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + q_{15}\eta\eta'\sin(4w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + q_{18}\eta\eta'\sin(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$$
$$+ q_9\eta\eta'\sin(2w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) + q_{13}\eta'^2\sin(2w-2\mathrm{v}_1) + q_{16}\eta'^2\sin(4w-2\mathrm{v}_1) + q_{19}\eta'^2\sin(6w-2\mathrm{v}_1)$$
$$+ q_{10}\eta'^2\sin 2w$$

www.libtool.com.cn

$$+q_{23}\sin^2 j\sin 2w+q_{24}\sin j\sin j'\sin(2w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)+q_{25}\sin j\sin j'\sin(2w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1)+q_{26}\sin^2 j'\sin 2w$$

$$\begin{array}{lll}+q_{27}\sin^2 j\ \sin(2w-2\mathfrak{v}) & +q_{30}\sin^2 j\ \sin(4w-2\mathfrak{v}) & +q_{33}\sin^2 j\ \sin(6w-2\mathfrak{v})\\ +q_{28}\sin j\ \sin j'\sin(2w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) & +q_{31}\sin j\ \sin j'\sin(4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) & +q_{34}\sin j\ \sin j'\sin(6w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)\\ +q_{29}\sin^2 j'\sin(2w-2\mathfrak{v}_1) & +q_{32}\sin^2 j'\sin(4w-2\mathfrak{v}_1) & +q_{35}\sin^2 j'\sin(6w-2\mathfrak{v}_1)\end{array}$$

(43) **pars coord.** $Q = r_1\sin 4w+r_2\eta\sin(2w+\mathrm{v})+r_3\eta'\sin(2w+\mathrm{v}_1)+r_4\eta\sin(6w-\mathrm{v})+r_5\eta'\sin(6w-\mathrm{v}_1)$

Die Verbindung dieser letzteren (43) mit charakteristischen Gliedern v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ giebt in der Differentialgleichung für R zu kritischen Argumenten Anlass. Nur Q hat einen koordinierten Teil.

(44) **pars** $P = p_0+p_1\eta\cos\mathrm{v}+p_2\eta^2+p_4\eta\eta'\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)+p_5\eta'^2$
$+p_3\eta'\cos\mathrm{v}_1+p_6\sin^2 j+p_7\sin j\sin j'\cos(\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)+p_8\sin^2 j'$

$$p_1\cos 2w+p_2\eta\cos(2w-\mathrm{v})+p_4\eta\cos(4w-\mathrm{v})$$
$$+p_3\eta'\cos(2w-\mathrm{v}_1)+p_5\eta'\cos(4w-\mathrm{v}_1)$$

$$\begin{array}{llll}+p_7\eta^2\cos 2w & +p_{11}\eta^2\cos(2w-2\mathrm{v}) & +p_{14}\eta^2\cos(4w-2\mathrm{v}) & +p_{17}\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v})\\ +p_8\eta\eta'\cos(2w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) & +p_{12}\eta\eta'\cos(2w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) & +p_{15}\eta\eta'\cos(4w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) & +p_{18}\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\ +p_9\eta\eta'\cos(2w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) & +p_{13}\eta'^2\cos(2w-2\mathrm{v}_1) & +p_{16}\eta'^2\cos(4w-2\mathrm{v}_1) & +p_{19}\eta'^2\cos(6w-2\mathrm{v}_1)\\ +p_{10}\eta'^2\cos 2w & & & \end{array}$$

$$+p_{23}\sin^2 j\cos 2w+p_{24}\sin j\sin j'\cos(2w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)+p_{25}\sin j\sin j'\cos(2w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1)+p_{26}\sin^2 j'\cos 2w$$

$$\begin{array}{lll}+p_{27}\sin^2 j\ \cos(2w-2\mathfrak{v}) & +p_{30}\sin^2 j\ \cos(4w-2\mathfrak{v}) & +p_{33}\sin^2 j\ \cos(6w-2\mathfrak{v})\\ +p_{28}\sin j\ \sin j'\cos(2w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) & +p_{31}\sin j\ \sin j'\cos(4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) & +p_{34}\sin j\ \sin j'\cos(6w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)\\ +p_{29}\sin^2 j'\cos(2w-2\mathfrak{v}_1) & +p_{32}\sin^2 j'\cos(4w-2\mathfrak{v}_1) & +p_{35}\sin^2 j'\cos(6w-2\mathfrak{v}_1)\end{array}$$

(45) **pars** $Z = \frac{1}{2}\delta_1\sin j\ \sin\mathfrak{v}+\frac{1}{2}\delta_2\eta\ \sin j\sin(\mathfrak{v}-\mathrm{v})+\frac{1}{2}\delta_5\eta\ \sin j'\sin(\mathfrak{v}_1-\mathrm{v})$
$+\frac{1}{2}\delta_3\sin j'\sin\mathfrak{v}_1+\frac{1}{2}\delta_4\eta'\sin j\sin(\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)+\frac{1}{2}\delta_6\eta'\sin j'\sin(\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)$

$$\varepsilon_1\sin j\sin(4w-\mathfrak{v})+\varepsilon_2\sin j'\sin(4w-\mathfrak{v}_1)$$

$$\begin{array}{llll}+\varepsilon_3\eta\ \sin j\sin(2w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}) & +\varepsilon_7\eta\ \sin j'\sin(2w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) & +\varepsilon_{11}\eta\ \sin j\ \sin(2w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}) & +\varepsilon_{15}\eta\ \sin j\ \sin(6w-\mathfrak{v}-\mathrm{v})\\ +\varepsilon_4\eta\ \sin j\sin(2w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}) & +\varepsilon_8\eta\ \sin j'\sin(2w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) & +\varepsilon_{12}\eta'\sin j\ \sin(2w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) & +\varepsilon_{16}\eta'\sin j\ \sin(6w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)\\ +\varepsilon_5\eta'\sin j\sin(2w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) & +\varepsilon_9\eta'\sin j'\sin(2w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1) & +\varepsilon_{13}\eta\ \sin j'\sin(2w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) & +\varepsilon_{17}\eta\ \sin j'\sin(6w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v})\\ +\varepsilon_6\eta'\sin j\sin(2w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1) & +\varepsilon_{10}\eta'\sin j'\sin(2w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1) & +\varepsilon_{14}\eta'\sin j'\sin(2w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1) & +\varepsilon_{18}\eta'\sin j'\sin(6w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)\end{array}$$

Die Anordnung ist so vorgenommen, dass zuerst die Excentricität des gestörten Körpers kommt, dann die des störenden. Darauf folgt die Neigung des gestörten und dann die des störenden Planeten. Auch ist die Folge der Indices

www.libtool.com.cn

in den p, q, ε, sowie α, β, γ dieselbe. Diese Gründe hatten mich veranlasst, die von Herrn Ludendorff eingeschlagene Anordnung der Glieder aufzugeben. Die q_h, p_h, ε_h selbst stellen sich als Funktionen der β_h und ξ_h folgendermassen dar:

(46)
$$\begin{aligned} q_1 &= q_1^{(0)} + q_1^{(1)}\beta_1 \\ q_2 &= q_2^{(0)} + q_2^{(1)}\beta_1 + q_2^{(4)}\beta_4 \\ q_3 &= q_3^{(0)} + q_3^{(1)}\beta_1 + q_3^{(5)}\beta_5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} q_4 &= q_4^{(0)} + q_4^{(1)}\beta_1 + q_4^{(2)}\beta_2 \\ q_5 &= q_5^{(0)} + q_5^{(1)}\beta_1 + q_5^{(3)}\beta_3 \\ q_1 &= q_1^{(1)}\beta_1 + q_1^{(2)}\beta_2 + q_1^{(4)}\beta_4 \\ q_2 &= q_2^{(0)} + q_2^{(1)}\beta_1 + q_2^{(2)}\beta_2 + q_2^{(5)}\beta_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_6 &= q_{6\cdot1} + q_6^{(8)}\beta_8 + q_6^{(9)}\beta_9 \\ q_7 &= q_{7\cdot1} + q_7^{(7)}\beta_7 \\ q_8 &= q_{8\cdot1} + q_8^{(9)}\beta_9 \\ q_9 &= q_{9\cdot1} + q_9^{(8)}\beta_8 \\ q_{10} &= q_{10\cdot1} + q_{10}^{(10)}\beta_{10} \\ q_{11} &= q_{11\cdot1} + q_{11}^{(14)}\beta_{14} + q_{11}^{(17)}\beta_{17} \\ q_{12} &= q_{12\cdot1} + q_{12}^{(15)}\beta_{15} + q_{12}^{(18)}\beta_{18} \\ q_{13} &= q_{13\cdot1} + q_{13}^{(16)}\beta_{16} + q_{13}^{(19)}\beta_{19} \\ q_{14} &= q_{14\cdot1} + q_{14}^{(11)}\beta_{11} + q_{14}^{(17)}\beta_{17} \\ q_{15} &= q_{15\cdot1} + q_{15}^{(12)}\beta_{12} + q_{15}^{(18)}\beta_{18} \\ q_{16} &= q_{16\cdot1} + q_{16}^{(13)}\beta_{13} + q_{16}^{(19)}\beta_{19} \\ q_{17} &= q_{17\cdot1} + q_{17}^{(11)}\beta_{11} + q_{17}^{(14)}\beta_{14} \\ q_{18} &= q_{18\cdot1} + q_{18}^{(12)}\beta_{12} + q_{18}^{(15)}\beta_{15} \\ q_{19} &= q_{19\cdot1} + q_{19}^{(13)}\beta_{13} + q_{19}^{(16)}\beta_{16} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} q_{6\cdot1} &= q_6^{(0)} + q_6^{(1)}\beta_1 + q_6^{(2)}\beta_2 + q_6^{(3)}\beta_3 + q_6^{(4)}\beta_4 + q_6^{(5)}\beta_5 \\ q_{7\cdot1} &= q_7^{(0)} + q_7^{(1)}\beta_1 + q_7^{(2)}\beta_2 + q_7^{(4)}\beta_4 \\ q_{8\cdot1} &= q_8^{(0)} + q_8^{(1)}\beta_1 + q_8^{(2)}\beta_2 + q_8^{(4)}\beta_4 + q_8^{(5)}\beta_5 \\ q_{9\cdot1} &= q_9^{(0)} + q_9^{(1)}\beta_1 + q_9^{(2)}\beta_2 + q_9^{(3)}\beta_3 + q_9^{(4)}\beta_4 + q_9^{(5)}\beta_5 \\ q_{10\cdot1} &= q_{10}^{(0)} + q_{10}^{(1)}\beta_1 + q_{10}^{(3)}\beta_3 + q_{10}^{(5)}\beta_5 \\ q_{11\cdot1} &= q_{11}^{(0)} + q_{11}^{(1)}\beta_1 + q_{11}^{(4)}\beta_4 \\ q_{12\cdot1} &= q_{12}^{(0)} + q_{12}^{(1)}\beta_1 + q_{12}^{(2)}\beta_2 + q_{12}^{(4)}\beta_4 + q_{12}^{(5)}\beta_5 \\ q_{13\cdot1} &= q_{13}^{(0)} + q_{13}^{(1)}\beta_1 + q_{13}^{(3)}\beta_3 + q_{13}^{(5)}\beta_5 \\ q_{14\cdot1} &= q_{14}^{(0)} + q_{14}^{(1)}\beta_1 + q_{14}^{(2)}\beta_2 \\ q_{15\cdot1} &= q_{15}^{(0)} + q_{15}^{(1)}\beta_1 + q_{15}^{(2)}\beta_2 + q_{15}^{(3)}\beta_3 + q_{15}^{(4)}\beta_4 \\ q_{16\cdot1} &= q_{16}^{(0)} + q_{16}^{(1)}\beta_1 + q_{16}^{(3)}\beta_3 + q_{16}^{(5)}\beta_5 \\ q_{17\cdot1} &= q_{17}^{(0)} + q_{17}^{(1)}\beta_1 + q_{17}^{(2)}\beta_2 + q_{17}^{(4)}\beta_4 \\ q_{18\cdot1} &= q_{18}^{(0)} + q_{18}^{(1)}\beta_1 + q_{18}^{(2)}\beta_2 + q_{18}^{(3)}\beta_3 + q_{18}^{(4)}\beta_4 + q_{18}^{(5)}\beta_5 \\ q_{19\cdot1} &= q_{19}^{(0)} + q_{19}^{(1)}\beta_1 + q_{19}^{(3)}\beta_3 + q_{19}^{(5)}\beta_5 \end{aligned}$$

Von der Neigung kommen:

$$\begin{aligned} q_7 &= q_{7\cdot1} + q_7^{(24)}\beta_{24} + q_7^{(25)}\beta_{25} \\ q_{23} &= q_{23\cdot1} + q_{23}^{(23)}\beta_{23} \\ q_{24} &= q_{24\cdot1} + q_{24}^{(25)}\beta_{25} \\ q_{25} &= q_{25\cdot1} + q_{25}^{(24)}\beta_{24} \\ q_{26} &= q_{26\cdot1} + q_{26}^{(26)}\beta_{26} \\ q_{27} &= q_{27\cdot1} + q_{27}^{(30)}\beta_{30} + q_{27}^{(33)}\beta_{33} \\ q_{28} &= q_{28\cdot1} + q_{28}^{(31)}\beta_{31} + q_{28}^{(34)}\beta_{34} \\ q_{29} &= q_{29\cdot1} + q_{29}^{(32)}\beta_{32} + q_{29}^{(35)}\beta_{35} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} q_{7\cdot1} &= q_7^{(1)}\beta_1 + q_7^{\mathrm{I}}\xi_1 + q_7^{\mathrm{II}}\xi_2 \\ q_{23\cdot1} &= q_{23}^{(0)} + q_{23}^{(1)}\beta_1 + q_{23}^{\mathrm{I}}\xi_1 \\ q_{24\cdot1} &= q_{24}^{(0)} + q_{24}^{(1)}\beta_1 + q_{24}^{\mathrm{I}}\xi_1 + q_{24}^{\mathrm{II}}\xi_2 \\ q_{25\cdot1} &= q_{25}^{(0)} + q_{25}^{(1)}\beta_1 + q_{25}^{\mathrm{I}}\xi_1 + q_{25}^{\mathrm{II}}\xi_2 \\ q_{26\cdot1} &= q_{26}^{(0)} + q_{26}^{(1)}\beta_1 + q_{26}^{\mathrm{II}}\xi_2 \\ q_{27\cdot1} &= q_{27}^{(0)} + q_{27}^{(1)}\beta_1 + q_{27}^{\mathrm{I}}\xi_1 \\ q_{28\cdot1} &= q_{28}^{(0)} + q_{28}^{(1)}\beta_1 + q_{28}^{\mathrm{I}}\xi_1 + q_{28}^{\mathrm{II}}\xi_2 \\ q_{29\cdot1} &= q_{29}^{(0)} + q_{29}^{(1)}\beta_1 + q_{29}^{\mathrm{II}}\xi_2 \end{aligned}$$

www.libtool.com.cn

$$
\begin{array}{l|l}
q_{30} = q_{30\cdot1} + q_{30}^{(27)}\beta_{27} + q_{30}^{(28)}\beta_{28} & q_{30\cdot1} = q_{30}^{(0)} + q_{30}^{(1)}\beta_1 + q_{30}^{\mathrm{I}}\xi_1 \\
q_{31} = q_{31\cdot1} + q_{31}^{(28)}\beta_{28} + q_{31}^{(34)}\beta_{34} & q_{31\cdot1} = q_{31}^{(0)} + q_{31}^{(1)}\beta_1 + q_{31}^{\mathrm{I}}\xi_1 + q_{31}^{\mathrm{II}}\xi_2 \\
q_{32} = q_{32\cdot1} + q_{32}^{(29)}\beta_{29} + q_{32}^{(35)}\beta_{35} & q_{32\cdot1} = q_{32}^{(0)} + q_{32}^{(1)}\beta_1 + q_{32}^{\mathrm{II}}\xi_2 \\
q_{33} = q_{33\cdot1} + q_{33}^{(27)}\beta_{27} + q_{33}^{(30)}\beta_{30} & q_{33\cdot1} = q_{33}^{(0)} + q_{33}^{(1)}\beta_1 + q_{33}^{\mathrm{I}}\xi_1 \\
q_{34} = q_{34\cdot1} + q_{34}^{(28)}\beta_{28} + q_{34}^{(31)}\beta_{31} & q_{34\cdot1} = q_{34}^{(0)} + q_{34}^{(1)}\beta_1 + q_{34}^{\mathrm{I}}\xi_1 + q_{34}^{\mathrm{II}}\xi_2 \\
q_{35} = q_{35\cdot1} + q_{35}^{(29)}\beta_{29} + q_{35}^{(32)}\beta_{32} & q_{35\cdot1} = q_{35}^{(0)} + q_{35}^{(1)}\beta_1 + q_{35}^{\mathrm{II}}\xi_2
\end{array}
$$

Koordinierte Glieder sind:

(47)
$$
\begin{aligned}
r_1 &= r_1^{(0)} + r_1^{(1)}\beta_1 \\
r_2 &= r_2^{(0)} + r_2^{(1)}\beta_1 + r_2^{(2)}\beta_2 + r_2^{(4)}\beta_4 \\
r_3 &= r_3^{(0)} + r_3^{(1)}\beta_1 + r_3^{(2)}\beta_2 + r_3^{(5)}\beta_5 \\
r_4 &= r_4^{(0)} + r_4^{(1)}\beta_1 + r_4^{(2)}\beta_2 + r_4^{(4)}\beta_4 \\
r_5 &= r_5^{(0)} + r_5^{(1)}\beta_1 + r_5^{(2)}\beta_2 + r_5^{(5)}\beta_5
\end{aligned}
$$

Die p-Koefficienten werden:

(48)
$$
\begin{array}{l|l|l}
p_0 = p_0^{(0)} + p_0^{(1)}\beta_1 & & \\
p_1 = p_1^{(0)} + p_1^{(1)}\beta_1 & \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1^{(0)} + \mathfrak{p}_1^{(1)}\beta_1 + \mathfrak{p}_1^{(2)}\beta_2 + \mathfrak{p}_1^{(4)}\beta_4 & \\
p_2 = p_2^{(0)} + p_2^{(1)}\beta_1 + p_2^{(2)}\beta_2 + p_2^{(4)}\beta_4 & \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_2^{(0)} + \mathfrak{p}_2^{(1)}\beta_1 + \mathfrak{p}_2^{(2)}\beta_2 + \mathfrak{p}_2^{(5)}\beta_5 & \mathfrak{p}_{2\cdot1} = \mathfrak{p}_2^{(0)} + \mathfrak{p}_2^{(1)}\beta_1 + \mathfrak{p}_2^{(2)}\beta_2 + \mathfrak{p}_2^{(4)}\beta_4 \\
p_3 = p_3^{(0)} + p_3^{(1)}\beta_1 + p_3^{(2)}\beta_2 + p_3^{(5)}\beta_5 & \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{p}_{3\cdot1} + \mathfrak{p}_3^{(7)}\beta_7 & \mathfrak{p}_{4\cdot1} = \mathfrak{p}_4^{(0)} + \mathfrak{p}_4^{(1)}\beta_1 + \mathfrak{p}_4^{(2)}\beta_2 + \mathfrak{p}_4^{(3)}\beta_3 + \mathfrak{p}_4^{(4)}\beta_4 + \mathfrak{p}_4^{(5)}\beta_5 \\
p_4 = p_4^{(0)} + p_4^{(1)}\beta_1 + p_4^{(2)}\beta_2 + p_4^{(4)}\beta_4 & \mathfrak{p}_4 = \mathfrak{p}_{4\cdot1} + \mathfrak{p}_4^{(8)}\beta_8 + \mathfrak{p}_4^{(9)}\beta_9 & \\
p_5 = p_5^{(0)} + p_5^{(1)}\beta_1 + p_5^{(2)}\beta_2 + p_5^{(5)}\beta_5 & \mathfrak{p}_5 = \mathfrak{p}_{5\cdot1} + \mathfrak{p}_5^{(10)}\beta_{10} & \mathfrak{p}_{5\cdot1} = \mathfrak{p}_5^{(0)} + \mathfrak{p}_5^{(1)}\beta_1 + \mathfrak{p}_5^{(2)}\beta_2 + \mathfrak{p}_5^{(5)}\beta_5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
p_7 = p_{7\cdot1} + p_7^{(7)}\beta_7 & p_{7\cdot1} = p_7^{(0)} + p_7^{(1)}\beta_1 + p_7^{(2)}\beta_2 + p_7^{(4)}\beta_4 \\
p_8 = p_{8\cdot1} + p_8^{(8)}\beta_8 + p_8^{(9)}\beta_9 & p_{8\cdot1} = p_8^{(0)} + p_8^{(1)}\beta_1 + p_8^{(2)}\beta_2 + p_8^{(3)}\beta_3 + p_8^{(4)}\beta_4 + p_8^{(5)}\beta_5 \\
p_9 = p_{9\cdot1} + p_9^{(8)}\beta_8 + p_9^{(9)}\beta_9 & p_{9\cdot1} = p_9^{(0)} + p_9^{(1)}\beta_1 + p_9^{(2)}\beta_2 + p_9^{(3)}\beta_3 + p_9^{(4)}\beta_4 + p_9^{(5)}\beta_5 \\
p_{10} = p_{10\cdot1} + p_{10}^{(10)}\beta_{10} & p_{10\cdot1} = p_{10}^{(0)} + p_{10}^{(1)}\beta_1 + p_{10}^{(2)}\beta_2 + p_{10}^{(5)}\beta_5 \\
p_{11} = p_{11\cdot1} + p_{11}^{(11)}\beta_{11} + p_{11}^{(14)}\beta_{14} + p_{11}^{(17)}\beta_{17} & p_{11\cdot1} = p_{11}^{(0)} + p_{11}^{(1)}\beta_1 + p_{11}^{(2)}\beta_2 + p_{11}^{(4)}\beta_4 \\
p_{12} = p_{12\cdot1} + p_{12}^{(12)}\beta_{12} + p_{12}^{(15)}\beta_{15} + p_{12}^{(18)}\beta_{18} & p_{12\cdot1} = p_{12}^{(0)} + p_{12}^{(1)}\beta_1 + p_{12}^{(2)}\beta_2 + p_{12}^{(3)}\beta_3 + p_{12}^{(4)}\beta_4 + p_{12}^{(5)}\beta_5 \\
p_{13} = p_{13\cdot1} + p_{13}^{(13)}\beta_{13} + p_{13}^{(16)}\beta_{16} + p_{13}^{(19)}\beta_{19} & p_{13\cdot1} = p_{13}^{(0)} + p_{13}^{(1)}\beta_1 + p_{13}^{(3)}\beta_3 + p_{13}^{(5)}\beta_5 \\
p_{14} = p_{14\cdot1} + p_{14}^{(11)}\beta_{11} + p_{14}^{(14)}\beta_{14} + p_{14}^{(17)}\beta_{17} & p_{14\cdot1} = p_{14}^{(0)} + p_{14}^{(1)}\beta_1 + p_{14}^{(2)}\beta_2 + p_{14}^{(4)}\beta_4 \\
p_{15} = p_{15\cdot1} + p_{15}^{(12)}\beta_{12} + p_{15}^{(15)}\beta_{15} + p_{15}^{(18)}\beta_{18} & p_{15\cdot1} = p_{15}^{(0)} + p_{15}^{(1)}\beta_1 + p_{15}^{(2)}\beta_2 + p_{15}^{(3)}\beta_3 + p_{15}^{(4)}\beta_4 + p_{15}^{(5)}\beta_5 \\
p_{16} = p_{16\cdot1} + p_{16}^{(13)}\beta_{13} + p_{16}^{(16)}\beta_{16} + p_{16}^{(19)}\beta_{19} & p_{16\cdot1} = p_{16}^{(0)} + p_{16}^{(1)}\beta_1 + p_{16}^{(3)}\beta_3 + p_{16}^{(5)}\beta_5 \\
p_{17} = p_{17\cdot1} + p_{17}^{(11)}\beta_{11} + p_{17}^{(14)}\beta_{14} + p_{17}^{(17)}\beta_{17} & p_{17\cdot1} = p_{17}^{(0)} + p_{17}^{(1)}\beta_1 + p_{17}^{(2)}\beta_2 + p_{17}^{(4)}\beta_4 \\
p_{18} = p_{18\cdot1} + p_{18}^{(12)}\beta_{12} + p_{18}^{(15)}\beta_{15} + p_{18}^{(18)}\beta_{18} & p_{18\cdot1} = p_{18}^{(0)} + p_{18}^{(1)}\beta_1 + p_{18}^{(2)}\beta_2 + p_{18}^{(3)}\beta_3 + p_{18}^{(4)}\beta_4 + p_{18}^{(5)}\beta_5 \\
p_{19} = p_{19\cdot1} + p_{19}^{(13)}\beta_{13} + p_{19}^{(16)}\beta_{16} + p_{19}^{(19)}\beta_{19} & p_{19\cdot1} = p_{19}^{(0)} + p_{19}^{(1)}\beta_1 + p_{19}^{(3)}\beta_3 + p_{19}^{(5)}\beta_5
\end{array}
$$

www.libtool.com.cn

Von der Neigung kommen:

$$
\begin{aligned}
p_{23} &= p_{23\cdot1} + p_{23}^{(23)}\beta_{23} \\
p_{24} &= p_{24\cdot1} + p_{24}^{(24)}\beta_{24} + p_{24}^{(25)}\beta_{25} \\
p_{25} &= p_{25\cdot1} + p_{25}^{(24)}\beta_{24} + p_{25}^{(25)}\beta_{25} \\
p_{26} &= p_{26\cdot1} + p_{26}^{(26)}\beta_{26}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
p_{23\cdot1} &= p_{23}^{(0)} + p_{23}^{(1)}\beta_1 + p_{23}^{\mathrm{I}}\zeta_1 \\
p_{24\cdot1} &= p_{24}^{(0)} + p_{24}^{(1)}\beta_1 + p_{24}^{\mathrm{I}}\zeta_1 + p_{24}^{\mathrm{II}}\zeta_2 \\
p_{25\cdot1} &= p_{25}^{(0)} + p_{25}^{(1)}\beta_1 + p_{25}^{\mathrm{I}}\zeta_1 + p_{25}^{\mathrm{II}}\zeta_2 \\
p_{26\cdot1} &= p_{26}^{(0)} + p_{26}^{(1)}\beta_1 + p_{26}^{\mathrm{II}}\zeta_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{27} &= p_{27\cdot1} + p_{27}^{(27)}\beta_{27} + \beta_{27}^{(30)}\beta_{30} + p_{27}^{(33)}\beta_{33} \\
p_{28} &= p_{28\cdot1} + p_{28}^{(28)}\beta_{28} + p_{28}^{(31)}\beta_{31} + p_{28}^{(34)}\beta_{34} \\
p_{29} &= p_{29\cdot1} + p_{29}^{(29)}\beta_{29} + p_{29}^{(32)}\beta_{32} + p_{29}^{(35)}\beta_{35}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
p_{27\cdot1} &= p_{27}^{(0)} + p_{27}^{(1)}\beta_1 + p_{27}^{\mathrm{I}}\zeta_1 \\
p_{28\cdot1} &= p_{28}^{(0)} + p_{28}^{(1)}\beta_1 + p_{28}^{\mathrm{I}}\zeta_1 + p_{28}^{\mathrm{II}}\zeta_2 \\
p_{29\cdot1} &= p_{29}^{(0)} + p_{29}^{(1)}\beta_1 + p_{29}^{\mathrm{II}}\zeta_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{30} &= p_{30\cdot1} + p_{30}^{(27)}\beta_{27} + p_{30}^{(30)}\beta_{30} + p_{30}^{(33)}\beta_{33} \\
p_{31} &= p_{31\cdot1} + p_{31}^{(28)}\beta_{28} + p_{31}^{(31)}\beta_{31} + p_{31}^{(34)}\beta_{34} \\
p_{32} &= p_{32\cdot1} + p_{32}^{(29)}\beta_{29} + p_{32}^{(32)}\beta_{32} + p_{32}^{(35)}\beta_{35}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
p_{30\cdot1} &= p_{30}^{(0)} + p_{30}^{(1)}\beta_1 + p_{30}^{\mathrm{I}}\zeta_1 \\
p_{31\cdot1} &= p_{31}^{(0)} + p_{31}^{(1)}\beta_1 + p_{31}^{\mathrm{I}}\zeta_1 + p_{31}^{\mathrm{II}}\zeta_2 \\
p_{32\cdot1} &= p_{32}^{(0)} + p_{32}^{(1)}\beta_1 + p_{32}^{\mathrm{II}}\zeta_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{33} &= p_{33\cdot1} + p_{33}^{(27)}\beta_{27} + p_{33}^{(30)}\beta_{30} + p_{33}^{(33)}\beta_{33} \\
p_{34} &= p_{34\cdot1} + p_{34}^{(28)}\beta_{28} + p_{34}^{(31)}\beta_{31} + p_{34}^{(34)}\beta_{34} \\
p_{35} &= p_{35\cdot1} + p_{35}^{(29)}\beta_{29} + p_{35}^{(32)}\beta_{32} + p_{35}^{(35)}\beta_{35}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
p_{33\cdot1} &= p_{33}^{(0)} + p_{33}^{(1)}\beta_1 + p_{33}^{\mathrm{I}}\zeta_1 \\
p_{34\cdot1} &= p_{34}^{(0)} + p_{34}^{(1)}\beta_1 + p_{34}^{\mathrm{I}}\zeta_1 + p_{34}^{\mathrm{II}}\zeta_2 \\
p_{35\cdot1} &= p_{35}^{(0)} + p_{35}^{(1)}\beta_1 + p_{35}^{\mathrm{II}}\zeta_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{p}_6 &= \mathfrak{p}_{6\cdot1} + \mathfrak{p}_6^{(23)}\beta_{23} \\
\mathfrak{p}_7 &= \mathfrak{p}_{7\cdot1} + \mathfrak{p}_7^{(24)}\beta_{24} + \mathfrak{p}_7^{(25)}\beta_{25} \\
\mathfrak{p}_8 &= \mathfrak{p}_{8\cdot1} + \mathfrak{p}_8^{(26)}\beta_{26}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{p}_{6\cdot1} &= \mathfrak{p}_6^{(0)} + \mathfrak{p}_6^{(1)}\beta_1 + \mathfrak{p}_6^{\mathrm{I}}\zeta_1 \\
\mathfrak{p}_{7\cdot1} &= \mathfrak{p}_7^{(0)} + \mathfrak{p}_7^{(1)}\beta_1 + \mathfrak{p}_7^{\mathrm{I}}\zeta_1 + \mathfrak{p}_7^{\mathrm{II}}\zeta_2 \\
\mathfrak{p}_{8\cdot1} &= \mathfrak{p}_8^{(0)} + \mathfrak{p}_8^{(1)}\beta_1 + \mathfrak{p}_8^{\mathrm{II}}\zeta_2
\end{aligned}
$$

Die ε-Koefficienten lauten:

(49)
$$
\begin{aligned}
\lambda_{\delta_1} &= \lambda_{\delta_1}^{(0)} + \lambda_{\delta_1}^{\mathrm{I}}\beta_1 + \lambda_{\delta_1}^{(1)}\zeta_1 \\
\lambda_{\delta_2} &= \lambda_{\delta_2}^{(0)} + \lambda_{\delta_2}^{\mathrm{I}}\beta_1 + \lambda_{\delta_2}^{(2)}\zeta_2
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \varepsilon_1^{(0)} + \varepsilon_1^{\mathrm{I}}\beta_1 + \varepsilon_1^{(1)}\zeta_1 \\
\varepsilon_2 &= \varepsilon_2^{(0)} + \varepsilon_2^{\mathrm{I}}\beta_1 + \varepsilon_2^{(2)}\zeta_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_{\delta_3} &= \lambda_{\delta_{3\cdot1}} + \lambda_{\delta_3}^{(3)}\zeta_3 + \lambda_{\delta_3}^{(4)}\zeta_4 \\
\lambda_{\delta_4} &= \lambda_{\delta_{4\cdot1}} + \lambda_{\delta_4}^{(5)}\zeta_5 + \lambda_{\delta_4}^{(6)}\zeta_6 \\
\lambda_{\delta_5} &= \lambda_{\delta_{5\cdot1}} + \lambda_{\delta_5}^{(7)}\zeta_7 + \lambda_{\delta_5}^{(8)}\zeta_8 \\
\lambda_{\delta_6} &= \lambda_{\delta_{6\cdot1}} + \lambda_{\delta_6}^{(9)}\zeta_9 + \lambda_{\delta_6}^{(10)}\zeta_{10}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\lambda_{\delta_{3\cdot1}} &= \lambda_{\delta_3}^{(0)} + \lambda_{\delta_3}^{\mathrm{I}}\beta_1 + \lambda_{\delta_3}^{\mathrm{II}}\beta_2 + \lambda_{\delta_3}^{\mathrm{IV}}\beta_4 + \lambda_{\delta_3}^{(1)}\zeta_1 \\
\lambda_{\delta_{4\cdot1}} &= \lambda_{\delta_4}^{(0)} + \lambda_{\delta_4}^{\mathrm{I}}\beta_1 + \lambda_{\delta_4}^{\mathrm{III}}\beta_3 + \lambda_{\delta_4}^{\mathrm{V}}\beta_5 + \lambda_{\delta_4}^{(1)}\zeta_1 \\
\lambda_{\delta_{5\cdot1}} &= \lambda_{\delta_5}^{(0)} + \lambda_{\delta_5}^{\mathrm{I}}\beta_1 + \lambda_{\delta_5}^{\mathrm{II}}\beta_2 + \lambda_{\delta_5}^{\mathrm{IV}}\beta_4 + \lambda_{\delta_5}^{(2)}\zeta_2 \\
\lambda_{\delta_{6\cdot1}} &= \lambda_{\delta_6}^{(0)} + \lambda_{\delta_6}^{\mathrm{I}}\beta_1 + \lambda_{\delta_6}^{\mathrm{III}}\beta_3 + \lambda_{\delta_6}^{\mathrm{V}}\beta_5 + \lambda_{\delta_6}^{(2)}\zeta_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_3 &= \varepsilon_{3\cdot1} + \varepsilon_3^{(3)}\zeta_3 + \varepsilon_3^{(4)}\zeta_4 \\
\varepsilon_4 &= \varepsilon_{4\cdot1} + \varepsilon_4^{(3)}\zeta_3 + \varepsilon_4^{(4)}\zeta_4 \\
\varepsilon_5 &= \varepsilon_{5\cdot1} + \varepsilon_5^{(5)}\zeta_5 + \varepsilon_5^{(6)}\zeta_6 \\
\varepsilon_6 &= \varepsilon_{6\cdot1} + \varepsilon_6^{(5)}\zeta_5 + \varepsilon_6^{(6)}\zeta_6
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\varepsilon_{3\cdot1} &= \varepsilon_3^{(0)} + \varepsilon_3^{\mathrm{I}}\beta_1 + \varepsilon_3^{\mathrm{II}}\beta_2 + \varepsilon_3^{\mathrm{IV}}\beta_4 + \varepsilon_3^{(1)}\zeta_1 \\
\varepsilon_{4\cdot1} &= \varepsilon_4^{(0)} + \varepsilon_4^{\mathrm{I}}\beta_1 + \varepsilon_4^{\mathrm{II}}\beta_2 + \varepsilon_4^{\mathrm{IV}}\beta_4 + \varepsilon_4^{(1)}\zeta_1 \\
\varepsilon_{5\cdot1} &= \varepsilon_5^{(0)} + \varepsilon_5^{\mathrm{I}}\beta_1 + \varepsilon_5^{\mathrm{III}}\beta_3 + \varepsilon_5^{\mathrm{V}}\beta_5 + \varepsilon_5^{(1}\zeta_1 \\
\varepsilon_{6\cdot1} &= \varepsilon_6^{(0)} + \varepsilon_6^{\mathrm{I}}\beta_1 + \varepsilon_6^{\mathrm{III}}\beta_3 + \varepsilon_6^{\mathrm{V}}\beta_5 + \varepsilon_6^{(1)}\zeta_1
\end{aligned}
$$

www.libtool.com.cn

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_7 &= \varepsilon_{7\cdot1}+\varepsilon_7^{(7)}\zeta_7+\varepsilon_7^{(8)}\zeta_8 \\
\varepsilon_8 &= \varepsilon_{8\cdot1}+\varepsilon_8^{(7)}\zeta_7+\varepsilon_8^{(8)}\zeta_8 \\
\varepsilon_9 &= \varepsilon_{9\cdot1}+\varepsilon_9^{(9)}\zeta_9+\varepsilon_9^{(10)}\zeta_{10} \\
\varepsilon_{10} &= \varepsilon_{10\cdot1}+\varepsilon_{10}^{(9)}\zeta_9+\varepsilon_{10}^{(10)}\zeta_{10}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\varepsilon_{7\cdot1} &= \varepsilon_7^{(0)}+\varepsilon_7^{\mathrm{I}}\beta_1+\varepsilon_7^{\mathrm{II}}\beta_2+\varepsilon_7^{\mathrm{IV}}\beta_4+\varepsilon_7^{(3)}\zeta_2 \\
\varepsilon_{8\cdot1} &= \varepsilon_8^{(0)}+\varepsilon_8^{\mathrm{I}}\beta_1+\varepsilon_8^{\mathrm{II}}\beta_2+\varepsilon_8^{\mathrm{IV}}\beta_4+\varepsilon_8^{(3)}\zeta_2 \\
\varepsilon_{9\cdot1} &= \varepsilon_9^{(0)}+\varepsilon_9^{\mathrm{I}}\beta_1+\varepsilon_9^{\mathrm{III}}\beta_3+\varepsilon_9^{\mathrm{V}}\beta_5+\varepsilon_9^{(3)}\zeta_2 \\
\varepsilon_{10\cdot1} &= \varepsilon_{10}^{(0)}+\varepsilon_{10}^{\mathrm{I}}\beta_1+\varepsilon_{10}^{\mathrm{III}}\beta_3+\varepsilon_{10}^{\mathrm{V}}\beta_5+\varepsilon_{10}^{(3)}\zeta_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \varepsilon_{11\cdot1}+\varepsilon_{11}^{(11)}\zeta_{11}+\varepsilon_{11}^{(15)}\zeta_{15} \\
\varepsilon_{12} &= \varepsilon_{12\cdot1}+\varepsilon_{12}^{(12)}\zeta_{12}+\varepsilon_{12}^{(16)}\zeta_{16} \\
\varepsilon_{13} &= \varepsilon_{13\cdot1}+\varepsilon_{13}^{(13)}\zeta_{13}+\varepsilon_{13}^{(17)}\zeta_{17} \\
\varepsilon_{14} &= \varepsilon_{14\cdot1}+\varepsilon_{14}^{(14)}\zeta_{14}+\varepsilon_{14}^{(18)}\zeta_{18}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\varepsilon_{11\cdot1} &= \varepsilon_{11}^{(0)}+\varepsilon_{11}^{\mathrm{I}}\beta_1+\varepsilon_{11}^{\mathrm{II}}\beta_2+\varepsilon_{11}^{\mathrm{IV}}\beta_4+\varepsilon_{11}^{(1)}\zeta_1 \\
\varepsilon_{12\cdot1} &= \varepsilon_{12}^{(0)}+\varepsilon_{12}^{\mathrm{I}}\beta_1+\varepsilon_{12}^{\mathrm{III}}\beta_3+\varepsilon_{12}^{\mathrm{V}}\beta_5+\varepsilon_{12}^{(1)}\zeta_1 \\
\varepsilon_{13\cdot1} &= \varepsilon_{13}^{(0)}+\varepsilon_{13}^{\mathrm{I}}\beta_1+\varepsilon_{13}^{\mathrm{II}}\beta_2+\varepsilon_{13}^{\mathrm{IV}}\beta_4+\varepsilon_{13}^{(2)}\zeta_2 \\
\varepsilon_{14\cdot1} &= \varepsilon_{14}^{(0)}+\varepsilon_{14}^{\mathrm{I}}\beta_1+\varepsilon_{14}^{\mathrm{III}}\beta_3+\varepsilon_{14}^{\mathrm{V}}\beta_5+\varepsilon_{14}^{(2)}\zeta_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{15} &= \varepsilon_{15\cdot1}+\varepsilon_{15}^{(11)}\zeta_{11}+\varepsilon_{15}^{(15)}\zeta_{15} \\
\varepsilon_{16} &= \varepsilon_{16\cdot1}+\varepsilon_{16}^{(12)}\zeta_{12}+\varepsilon_{16}^{(16)}\zeta_{16} \\
\varepsilon_{17} &= \varepsilon_{17\cdot1}+\varepsilon_{17}^{(13)}\zeta_{13}+\varepsilon_{17}^{(17)}\zeta_{17} \\
\varepsilon_{18} &= \varepsilon_{18\cdot1}+\varepsilon_{18}^{(14)}\zeta_{14}+\varepsilon_{18}^{(18)}\zeta_{18}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\varepsilon_{15\cdot1} &= \varepsilon_{15}^{(0)}+\varepsilon_{15}^{\mathrm{I}}\beta_1+\varepsilon_{15}^{\mathrm{II}}\beta_2+\varepsilon_{15}^{\mathrm{IV}}\beta_4+\varepsilon_{15}^{(1)}\zeta_1 \\
\varepsilon_{16\cdot1} &= \varepsilon_{16}^{(0)}+\varepsilon_{16}^{\mathrm{I}}\beta_1+\varepsilon_{16}^{\mathrm{III}}\beta_3+\varepsilon_{16}^{\mathrm{V}}\beta_5+\varepsilon_{16}^{(1)}\zeta_1 \\
\varepsilon_{17\cdot1} &= \varepsilon_{17}^{(0)}+\varepsilon_{17}^{\mathrm{I}}\beta_1+\varepsilon_{17}^{\mathrm{II}}\beta_2+\varepsilon_{17}^{\mathrm{IV}}\beta_4+\varepsilon_{17}^{(2)}\zeta_2 \\
\varepsilon_{18\cdot1} &= \varepsilon_{18}^{(0)}+\varepsilon_{18}^{\mathrm{I}}\beta_1+\varepsilon_{18}^{\mathrm{III}}\beta_3+\varepsilon_{18}^{\mathrm{V}}\beta_5+\varepsilon_{18}^{(2)}\zeta_2
\end{aligned}
$$

Die Werte der $q_k^{(i)}$, $r_{k'}^{(i)}$, $p_{k_m}^{(i)}$, $\varepsilon_k^{(i)}$ sind auf Seite 31 und folgenden zusammengestellt. Die grosse Zahl der dort gegebenen Formeln schmilzt aber in Wirklichkeit über die Hälfte zusammen, da sehr viele Koefficienten die gleichen sind. Es bestehen, wie aus der Tafel hervorgeht, die $q_k^{(i)}$ und $r_k^{(i)}$ nur aus A-Koefficienten, die $p_k^{(i)}$ dagegen aus B- und einigen A-Koefficienten, weil S in der Differentialgleichung für R auftritt. Die A- und B-Koefficienten sind nach den von Herrn Brendel gegebenen Formeln und den im I. Kapitel angeführten Zusätzen zu rechnen, oder aus Gyldéns schon erwähnten Hilfstafeln zu entnehmen. $\varepsilon_k^{(0)}$ besteht nur aus C-Koefficienten. Da P eine gerade Funktion ist, so treten hier konstante Glieder nullten Grades und zweiten Grades auf. Die letzteren aus η^2 etc., wie sich später zeigen wird.

Damit wäre die erste Aufgabe für die Behandlung der charakteristischen und kritischen Planeten erledigt, die Herstellung der P, Q, Z in der Differentialgleichung bis auf Glieder v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ incl. genau in den Hauptgliedern. Nun müssen diese Differentialgleichungen, da sie nach Vielfachen von S und R fortschreiten, weiter entwickelt werden, indem auch hier die Koefficienten der Hauptglieder bis auf Grössen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ genau gerechnet werden.

www.libtool.com.cn

Ermittlung der q-Koefficienten.

$$q_1^{(0)} = A_{2\cdot0\cdot0}$$
$$q_1^{(1)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} - 2A_{4\cdot0\cdot0} = q_1^{(6)}$$

$$q_2^{(0)} = A_{2\cdot1\cdot0}^{-1}$$
$$q_2^{(1)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} - 2A_{4\cdot1\cdot0}^{-1} + \tfrac{3}{2}A_{4\cdot0\cdot0}$$
$$q_2^{(4)} = -\tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} + A_{2\cdot0\cdot0}$$

$$q_3^{(0)} = A_{2\cdot0\cdot1}^{-1}$$
$$q_3^{(1)} = -\tfrac{1}{2}A_{0\cdot0\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} - 2A_{4\cdot0\cdot1}^{-1}$$
$$q_3^{(3)} = -\tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} + A_{2\cdot0\cdot0} = q_2^{(4)}$$

$$q_4^{(0)} = A_{6\cdot1\cdot0}^{-1}$$
$$q_4^{(1)} = \tfrac{1}{2}A_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}A_{6\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} + A_{2\cdot1\cdot0}^{-1} + \tfrac{9}{4}A_{6\cdot0\cdot0} - 3A_{6\cdot1\cdot0}^{-1}$$
$$q_4^{(2)} = \tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = q_1^{(2)}$$

$$q_5^{(0)} = A_{4\cdot0\cdot1}^{-1}$$
$$q_5^{(1)} = \tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}A_{6\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} + A_{2\cdot0\cdot1}^{-1} - 3A_{6\cdot0\cdot1}^{-1}$$
$$q_5^{(3)} = \tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = q_1^{(2)}$$

$$q_7^{(0)} = A_{2\cdot2\cdot0} - \frac{A_{4\cdot0\cdot0} \times A_{2\cdot1\cdot0}^{-1}}{\delta_1}$$
$$q_7^{(1)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot2\cdot0}^{1\cdot0} - 3A_{4\cdot0\cdot0} - 2A_{4\cdot2\cdot0} + \tfrac{3}{2}A_{4\cdot1\cdot0}^{+1}$$
$$q_7^{(2)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} + 3A_{4\cdot0\cdot0}$$
$$q_7^{(4)} = -\tfrac{1}{2}A_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}A_{6\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} - 3A_{6\cdot1\cdot0}^{-1} + \tfrac{9}{4}A_{6\cdot0\cdot0} - \tfrac{3}{4}A_{2\cdot0\cdot0} + A_{2\cdot1\cdot0}^{-1} = q_4^{(1)} - \tfrac{3}{4}q_1^{(0)} - A_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0}$$
$$q_7^{(7)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} - 2A_{4\cdot0\cdot0} = q_1^{(4)}$$

$$q_8^{(0)} = A_{2\cdot1\cdot1}^{+1}$$
$$q_8^{(1)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot1\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}A_{0\cdot1\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0} - 2A_{4\cdot1\cdot1}^{+1}$$
$$q_8^{(2)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0}$$
$$q_8^{(4)} = \tfrac{1}{2}A_{6\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} - 3A_{6\cdot0\cdot1}^{-1}$$
$$q_8^{(5)} = -\tfrac{1}{2}A_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} + A_{2\cdot1\cdot0}^{-1} - \tfrac{3}{4}A_{2\cdot0\cdot0}$$
$$q_8^{(8)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} - 2A_{4\cdot0\cdot0} = q_1^{(4)}$$

$$q_9^{(0)} = A_{2\cdot1\cdot1}^{-1} - \frac{A_{4\cdot0\cdot0} \times A_{2\cdot0\cdot1}^{-1}}{\delta_1}$$
$$q_9^{(1)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot1\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} - \tfrac{1}{2}A_{0\cdot1\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0} - 2A_{4\cdot1\cdot1}^{-1} + \tfrac{3}{2}A_{4\cdot0\cdot1}^{+1}$$
$$q_9^{(2)} = \tfrac{1}{2}A_{0\cdot0\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0}$$
$$q_9^{(3)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} + 3A_{4\cdot0\cdot0} = q_7^{(2)}$$
$$q_9^{(4)} = -\tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} + A_{2\cdot0\cdot1}^{-1}$$
$$q_9^{(5)} = \tfrac{1}{2}A_{6\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} - 3A_{6\cdot1\cdot0}^{-1} + \tfrac{9}{4}A_{6\cdot0\cdot0}$$
$$q_9^{(8)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} - 2A_{4\cdot0\cdot0} = q_1^{(4)}$$

$$q_{10}^{(0)} = A_{2\cdot0\cdot2}$$
$$q_{10}^{(1)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot2}^{1\cdot0} - 2A_{4\cdot0\cdot2}$$
$$q_{10}^{(3)} = \tfrac{1}{2}A_{0\cdot0\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0}$$
$$q_{10}^{(5)} = \tfrac{1}{2}A_{6\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} - \tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} - 3A_{6\cdot0\cdot1}^{-1} + A_{2\cdot0\cdot1}^{-1} = q_8^{(4)} + q_9^{(4)}$$
$$q_{10}^{(10)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} - 2A_{4\cdot0\cdot0} = q_1^{(4)}$$

$$q_{11}^{(0)} = A_{2\cdot2\cdot0}^{-2}$$
$$q_{11}^{(1)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot2\cdot0}^{-2\cdot1\cdot0} - \tfrac{1}{2}A_{0\cdot2\cdot0}^{+2\cdot1\cdot0} - 2A_{4\cdot2\cdot0}^{-2} + \tfrac{3}{2}A_{4\cdot1\cdot0}^{-1} - A_{4\cdot0\cdot0}$$
$$q_{11}^{(4)} = -\tfrac{1}{2}A_{2\cdot1\cdot0}^{+1\cdot1\cdot0} + A_{2\cdot1\cdot0}^{+1} = q_8^{(5)} - q_1^{(1)}$$
$$q_{11}^{(14)} = -\tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = -q_1^{(2)}$$
$$q_{11}^{(17)} = -\tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} + 2A_{4\cdot0\cdot0} = -q_1^{(4)}$$

www.libtool.com.cn

$$
\begin{aligned}
q_{12}^{(0)} &= A_{2\cdot1\cdot1}^{-2}\\
q_{12}^{(1)} &= \tfrac{1}{2}A_{4\cdot1\cdot1}^{-2\cdot1\cdot0}-\tfrac{1}{2}A_{0\cdot1\cdot1}^{+2\cdot1\cdot0}-2A_{4\cdot1\cdot1}^{-2}+\tfrac{3}{2}A_{4\cdot0\cdot1}^{-1}\\
q_{12}^{(3)} &= -\tfrac{1}{2}A_{0\cdot0\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0} = -q_9^{(2)}\\
q_{12}^{(4)} &= -\tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0}+A_{2\cdot0\cdot1}^{+1}\\
q_{12}^{(5)} &= -\tfrac{1}{2}A_{2\cdot1\cdot0}^{+1\cdot1\cdot0}+A_{2\cdot1\cdot0}^{+1} = q_{11}^{(4)}\\
q_{12}^{(15)} &= -\tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = -q_1^{(2)}\\
q_{12}^{(18)} &= -\tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}+2A_{4\cdot0\cdot0} = -q_1^{(4)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_{13}^{(0)} &= A_{2\cdot0\cdot2}^{-2}\\
q_{13}^{(1)} &= \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot2}^{-2\cdot1\cdot0}-\tfrac{1}{2}A_{0\cdot0\cdot2}^{+2\cdot1\cdot0}-2A_{4\cdot0\cdot2}^{-2}\\
q_{13}^{(3)} &= -\tfrac{1}{2}A_{0\cdot0\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0} = -q_9^{(2)}\\
q_{13}^{(5)} &= -\tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0}+A_{2\cdot0\cdot1}^{+1} = q_{12}^{(4)}\\
q_{13}^{(16)} &= -\tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = -q_1^{(2)}\\
q_{13}^{(19)} &= -\tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}+2A_{4\cdot0\cdot0} = -q_1^{(4)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_{14}^{(0)} &= A_{4\cdot2\cdot0}^{-2}-\tfrac{1}{2}\frac{A_{2\cdot0\cdot0}\times A_{2\cdot1\cdot0}^{-1}}{\delta_1}\\
q_{14}^{(1)} &= \tfrac{1}{2}A_{2\cdot2\cdot0}^{-2\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}A_{6\cdot2\cdot0}^{-2\cdot1\cdot0}+A_{2\cdot2\cdot0}^{-2}-3A_{6\cdot2\cdot0}^{-2}\\
&\quad+\tfrac{9}{4}A_{6\cdot1\cdot0}^{-1}-\tfrac{3}{2}A_{6\cdot0\cdot0}-\tfrac{3}{2}A_{2\cdot0\cdot0}\\
q_{14}^{(3)} &= \tfrac{1}{2}A_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0}+\tfrac{3}{2}A_{2\cdot0\cdot0} = -q_4^{(2)}\\
q_{14}^{(11)} &= \tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}-A_{2\cdot0\cdot0} = -q_2^{(4)}\\
q_{14}^{(17)} &= -\tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}+A_{2\cdot0\cdot0} = q_2^{(6)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_{17}^{(0)} &= A_{6\cdot2\cdot0}^{-2}-\frac{A_{4\cdot0\cdot0}\times A_{2\cdot1\cdot0}^{-1}}{\delta_1}\\
q_{17}^{(1)} &= \tfrac{1}{2}A_{4\cdot2\cdot0}^{-2\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}A_{8\cdot2\cdot0}^{-2\cdot1\cdot0}+2A_{4\cdot2\cdot0}^{-2}-4A_{8\cdot2\cdot0}^{-2}\\
&\quad+3A_{8\cdot1\cdot0}^{-1}-2A_{8\cdot0\cdot0}-3A_{4\cdot0\cdot0}\\
q_{17}^{(2)} &= \tfrac{1}{2}A_{4\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0}+3A_{4\cdot0\cdot0} = q_7^{(2)}\\
q_{17}^{(4)} &= \tfrac{1}{2}A_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0}+A_{2\cdot1\cdot0}^{-1} = -q_9^{(5)}+q_4^{(1)}\\
q_{17}^{(11)} &= \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}-2A_{4\cdot0\cdot0} = q_1^{(4)}\\
q_{17}^{(14)} &= \tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = q_1^{(2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_{15}^{(0)} &= A_{4\cdot1\cdot1}^{-2}-\tfrac{1}{2}\frac{A_{2\cdot0\cdot0}\times A_{2\cdot0\cdot1}^{-1}}{\delta_1}\\
q_{15}^{(1)} &= \tfrac{1}{2}A_{2\cdot1\cdot1}^{-2\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}A_{6\cdot1\cdot1}^{-2\cdot1\cdot0}+A_{2\cdot1\cdot1}^{-2}-3A_{6\cdot1\cdot1}^{-2}+\tfrac{9}{4}A_{6\cdot0\cdot1}^{-1}\\
q_{15}^{(3)} &= \tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} = q_4^{(2)}\\
q_{15}^{(8)} &= \tfrac{1}{2}A_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0}+\tfrac{3}{2}A_{2\cdot0\cdot0} = -q_4^{(8)}\\
q_{15}^{(4)} &= -\tfrac{1}{2}A_{0\cdot0\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0} = -q_9^{(2)}\\
q_{15}^{(12)} &= \tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}-A_{2\cdot0\cdot0} = -q_2^{(4)}\\
q_{15}^{(18)} &= -\tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}+A_{2\cdot0\cdot0} = q_2^{(6)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_{18}^{(0)} &= A_{6\cdot1\cdot1}^{-2}-\frac{A_{4\cdot0\cdot0}\times A_{2\cdot0\cdot1}^{-1}}{\delta_1}\\
q_{18}^{(1)} &= \tfrac{1}{2}A_{4\cdot1\cdot1}^{-2\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}A_{8\cdot1\cdot1}^{-2\cdot1\cdot0}+2A_{4\cdot1\cdot1}^{-2}-4A_{8\cdot1\cdot1}^{-2}+3A_{8\cdot0\cdot1}^{-1}\\
q_{18}^{(3)} &= \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} = q_8^{(2)}\\
q_{18}^{(5)} &= \tfrac{1}{2}A_{4\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0}+3A_{4\cdot0\cdot0} = q_7^{(2)}\\
q_{18}^{(4)} &= \tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0}+A_{2\cdot0\cdot1}^{-1} = q_5^{(1)}-q_8^{(4)}\\
q_{18}^{(5)} &= \tfrac{1}{2}A_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0}+A_{2\cdot1\cdot0}^{-1} = q_{17}^{(4)}\\
q_{18}^{(12)} &= \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}-2A_{4\cdot0\cdot0} = q_1^{(4)}\\
q_{18}^{(15)} &= \tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = q_1^{(2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_{16}^{(0)} &= A_{4\cdot0\cdot2}^{-2}\\
q_{16}^{(1)} &= \tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot2}^{-2\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}A_{6\cdot0\cdot2}^{-2\cdot1\cdot0}+A_{2\cdot0\cdot2}^{-2}-3A_{6\cdot0\cdot2}^{-2}\\
q_{16}^{(3)} &= \tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} = q_4^{(2)}\\
q_{16}^{(5)} &= -\tfrac{1}{2}A_{0\cdot0\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0} = -q_9^{(2)}\\
q_{16}^{(12)} &= \tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}-A_{2\cdot0\cdot0} = -q_2^{(4)}\\
q_{16}^{(19)} &= -\tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}+A_{2\cdot0\cdot0} = q_2^{(4)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_{19}^{(0)} &= A_{6\cdot0\cdot2}^{-2}\\
q_{19}^{(1)} &= \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot2}^{-2\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}A_{8\cdot0\cdot2}^{-2\cdot1\cdot0}+2A_{4\cdot0\cdot2}^{-2}-4A_{8\cdot0\cdot2}^{-2}\\
q_{19}^{(3)} &= \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} = q_8^{(2)}\\
q_{19}^{(5)} &= \tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0}+A_{2\cdot0\cdot1}^{-1} = q_{18}^{(4)}\\
q_{19}^{(13)} &= \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}-2A_{4\cdot0\cdot0} = q_1^{(4)}\\
q_{19}^{(16)} &= \tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = q_1^{(2)}
\end{aligned}
$$

Von der Neigung abhängend:

$$
\begin{aligned}
q_7^{(1)} &= \tfrac{1}{2}\overline{A}_{2\cdot1\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0}-\tfrac{1}{2}\overline{A}_{2\cdot1\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0}-\overline{A}_{2\cdot1\cdot1}^{+1}+\overline{A}_{2\cdot1\cdot1}^{-1}\\
q_7^{(24)} &= -\tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}+A_{2\cdot0\cdot0} = q_2^{(4)}\\
q_7^{(25)} &= \tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}-A_{2\cdot0\cdot0} = -q_2^{(4)}\\
q_7^{\mathrm{I}} &= -\tfrac{1}{2}\overline{A}_{4\cdot0\cdot1}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}+\tfrac{1}{2}\overline{A}_{4\cdot0\cdot1}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}}\\
q_7^{\mathrm{II}} &= \tfrac{1}{2}\overline{A}_{4\cdot1\cdot0}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}-\tfrac{1}{2}\overline{A}_{4\cdot1\cdot0}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}}
\end{aligned}
$$

www.libtool.com.cn

$$q_{23}^{(0)} = \overline{A}_{2\cdot2\cdot0}$$
$$q_{23}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{1\cdot0}_{4\cdot2\cdot0} - 2\overline{A}_{4\cdot2\cdot0}$$
$$q_{23}^{(23)} = \tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} - 2A_{4\cdot0\cdot0} = q_1^{(4)}$$
$$q_{23}^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{2\cdot1\cdot0} - \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{6\cdot1\cdot0} - \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{2\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{6\cdot1\cdot0}$$

$$q_{24}^{(0)} = \overline{A}^{+1}_{2\cdot1\cdot1}$$
$$q_{24}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{+1\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot1} - 2\overline{A}^{+1}_{4\cdot1\cdot1}$$
$$q_{24}^{(25)} = \tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} - 2A_{4\cdot0\cdot0} = q_1^{(4)}$$
$$q_{24}^{\mathrm{I}} = -\tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{6\cdot0\cdot1} + \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{6\cdot0\cdot1}$$
$$q_{24}^{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{2\cdot1\cdot0} - \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{2\cdot1\cdot0}$$

$$q_{25}^{(0)} = \overline{A}^{-1}_{2\cdot1\cdot1}$$
$$q_{25}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot1} - 2\overline{A}^{-1}_{4\cdot1\cdot1}$$
$$q_{25}^{(24)} = \tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} - 2A_{4\cdot0\cdot0} = q_1^{(4)}$$
$$q_{25}^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{2\cdot0\cdot1} - \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{2\cdot0\cdot1}$$
$$q_{25}^{\mathrm{II}} = -\tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{6\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{6\cdot1\cdot0} = q_{23}^{\mathrm{I}} - q_{24}^{\mathrm{II}}$$

$$q_{26}^{(0)} = \overline{A}_{2\cdot0\cdot2}$$
$$q_{26}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot2} - 2\overline{A}_{4\cdot0\cdot2}$$
$$q_{26}^{(26)} = \tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} - 2A_{4\cdot0\cdot0} = q_1^{(4)}$$
$$q_{26}^{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{2\cdot0\cdot1} - \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{6\cdot0\cdot1} - \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{2\cdot0\cdot1} + \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{6\cdot0\cdot1} = q_{24}^{\mathrm{I}} + q_{25}^{\mathrm{I}}$$

$$q_{27}^{(0)} = \overline{A}^{-2}_{2\cdot2\cdot0}$$
$$q_{27}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-2\cdot1\cdot0}_{4\cdot2\cdot0} - \tfrac{1}{2}\overline{A}^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot2\cdot0} - 2\overline{A}^{-2}_{4\cdot2\cdot0}$$
$$q_{27}^{(36)} = -\tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} = -q_1^{(2)}$$
$$q_{27}^{(\cdot\cdot3)} = -\tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} + 2A_{4\cdot0\cdot0} = -q_1^{(4)}$$
$$q_{27}^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{+1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{2\cdot1\cdot0} - \tfrac{1}{2}\overline{A}^{+1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{2\cdot1\cdot0}$$

$$q_{28}^{(0)} = \overline{A}^{-2}_{2\cdot1\cdot1}$$
$$q_{28}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-2\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot1} - \tfrac{1}{2}\overline{A}^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot1} - 2\overline{A}^{-2}_{4\cdot1\cdot1}$$
$$q_{28}^{(31)} = -\tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} = -q_1^{(2)}$$
$$q_{28}^{(34)} = -\tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} + 2A_{4\cdot0\cdot0} = -q_1^{(4)}$$
$$q_{28}^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{+1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{2\cdot0\cdot1} - \tfrac{1}{2}\overline{A}^{+1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{2\cdot0\cdot1}$$
$$q_{28}^{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{+1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{2\cdot1\cdot0} - \tfrac{1}{2}\overline{A}^{+1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{2\cdot1\cdot0} = q_{27}^{\mathrm{I}}$$

$$q_{29}^{(0)} = \overline{A}^{-2}_{2\cdot0\cdot2}$$
$$q_{29}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-2\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot2} - \tfrac{1}{2}\overline{A}^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot2} - 2\overline{A}^{-2}_{4\cdot0\cdot2}$$
$$q_{29}^{(32)} = -\tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} = -q_1^{(2)}$$
$$q_{29}^{(\cdot\cdot3)} = -\tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} + 2A_{4\cdot0\cdot0} = -q_1^{(4)}$$
$$q_{29}^{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{+1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{2\cdot0\cdot1} - \tfrac{1}{2}\overline{A}^{+1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{2\cdot0\cdot1} = q_{28}^{\mathrm{I}}$$

$$q_{30}^{(0)} = \overline{A}^{-2}_{4\cdot2\cdot0}$$
$$q_{30}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-2\cdot1\cdot0}_{2\cdot2\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-2\cdot1\cdot0}_{6\cdot2\cdot0} + \overline{A}^{-2}_{2\cdot2\cdot0} - 3\overline{A}^{-2}_{6\cdot2\cdot0}$$
$$q_{30}^{(27)} = \tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} - A_{2\cdot0\cdot0} = -q_2^{(4)}$$
$$q_{30}^{(33)} = -\tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} + A_{2\cdot0\cdot0} = q_2^{(4)}$$
$$q_{30}^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{+1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{0\cdot1\cdot0} - \tfrac{1}{2}\overline{A}^{+1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{0\cdot1\cdot0}$$

$$q_{31}^{(0)} = \overline{A}^{-2}_{4\cdot1\cdot1}$$
$$q_{31}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-2\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot1} + \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-2\cdot1\cdot0}_{6\cdot1\cdot1} + \overline{A}^{-2}_{2\cdot1\cdot1} - 3\overline{A}^{-2}_{6\cdot1\cdot1}$$
$$q_{31}^{(26)} = \tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} - A_{2\cdot0\cdot0} = -q_2^{(4)}$$
$$q_{31}^{(34)} = -\tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} + A_{2\cdot0\cdot0} = q_2^{(4)}$$
$$q_{31}^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{+1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{0\cdot0\cdot1} - \tfrac{1}{2}\overline{A}^{+1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{0\cdot0\cdot1}$$
$$q_{31}^{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{+1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{0\cdot1\cdot0} - \tfrac{1}{2}\overline{A}^{+1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{0\cdot1\cdot0} = q_{30}^{\mathrm{I}}$$

$$q_{32}^{(0)} = \overline{A}^{-2}_{4\cdot0\cdot2}$$
$$q_{32}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-2\cdot1\cdot0}_{6\cdot0\cdot2} + \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-2\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot2} + \overline{A}^{-2}_{2\cdot0\cdot2} - 3\overline{A}^{-2}_{6\cdot0\cdot2}$$
$$q_{32}^{(29)} = \tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} - A_{2\cdot0\cdot0} = -q_2^{(4)}$$
$$q_{32}^{(35)} = -\tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} + A_{2\cdot0\cdot0} = q_2^{(4)}$$
$$q_{32}^{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{+1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{0\cdot0\cdot1} - \tfrac{1}{2}\overline{A}^{+1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{0\cdot0\cdot1} = q_{31}^{\mathrm{I}}$$

$$q_{33}^{(0)} = \overline{A}^{-2}_{6\cdot2\cdot0}$$
$$q_{33}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-2\cdot1\cdot0}_{4\cdot2\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-2\cdot1\cdot0}_{8\cdot2\cdot0} + 2\overline{A}^{-2}_{4\cdot2\cdot0} - 4\overline{A}^{-2}_{8\cdot2\cdot0}$$
$$q_{33}^{(27)} = \tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} - 2A_{4\cdot0\cdot0} = q_1^{(4)}$$
$$q_{33}^{(30)} = \tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} = q_1^{(2)}$$
$$q_{33}^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{2\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{2\cdot1\cdot0}$$

$$q_{34}^{(0)} = \overline{A}^{-2}_{6\cdot1\cdot1}$$
$$q_{34}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-2\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot1} + \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-2\cdot1\cdot0}_{8\cdot1\cdot1} + 2\overline{A}^{-2}_{4\cdot1\cdot1} - 4\overline{A}^{-2}_{8\cdot1\cdot1}$$
$$q_{34}^{(28)} = \tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} - 2A_{4\cdot0\cdot0} = q_1^{(4)}$$
$$q_{34}^{(31)} = \tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} = q_1^{(2)}$$
$$q_{34}^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{2\cdot0\cdot1} + \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{2\cdot0\cdot1}$$
$$q_{34}^{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{2\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{A}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{2\cdot1\cdot0} = q_{33}^{\mathrm{I}}$$

www.libtool.com.cn

$$q_{35}^{(0)} = \overline{A}_{6\cdot0\cdot2}^{-2}$$
$$q_{35}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{A}_{4\cdot0\cdot2}^{-2\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{A}_{8\cdot0\cdot2}^{-2\cdot1\cdot0} + 2\overline{A}_{4\cdot0\cdot2}^{-2} - 4\overline{A}_{8\cdot0\cdot2}^{-2}$$
$$q_{35}^{(29)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} - 2A_{4\cdot0\cdot0} = \mathfrak{q}_1^{(4)}$$
$$q_{35}^{(32)} = \tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = \mathfrak{q}_1^{(2)}$$
$$q_{35}^{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\overline{A}_{2\cdot0\cdot1}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{A}_{2\cdot0\cdot1}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}} = q_{34}^{\mathrm{I}}$$

Ermittlung der Koefficienten koordiniert in Q.

$$r_1^{(0)} = A_{4\cdot0\cdot0}$$
$$r_1^{(1)} = \tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} + \tfrac{1}{2}A_{6\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} + A_{2\cdot0\cdot0} - 3A_{6\cdot0\cdot0}$$

$$r_2^{(0)} = A_{2\cdot1\cdot0}^{+1}$$
$$r_2^{(1)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot1\cdot0}^{+1\cdot1\cdot0} - 2A_{4\cdot1\cdot0}^{+1}$$
$$r_2^{(2)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}$$
$$r_2^{(4)} = \tfrac{1}{2}A_{6\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} - 3A_{6\cdot0\cdot0}$$

$$r_3^{(0)} = A_{2\cdot0\cdot1}^{+1}$$
$$r_3^{(1)} = \tfrac{1}{2}A_{0\cdot0\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0} - 2A_{4\cdot0\cdot1}^{+1}$$
$$r_3^{(3)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = r_2^{(2)}$$
$$r_3^{(5)} = \tfrac{1}{2}A_{6\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} - 3A_{6\cdot0\cdot0} = r_2^{(4)}$$

$$r_4^{(0)} = A_{6\cdot1\cdot0}^{-1}$$
$$r_4^{(1)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}A_{8\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} + 2A_{4\cdot1\cdot0}^{-1} - 4A_{8\cdot1\cdot0}^{-1} + 3A_{8\cdot0\cdot0}$$
$$r_4^{(2)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = r_2^{(2)}$$
$$r_4^{(4)} = \tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} + A_{2\cdot0\cdot0} = r_1^{(1)} - r_2^{(4)}$$

$$r_5^{(0)} = A_{6\cdot0\cdot1}^{-1}$$
$$r_5^{(1)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}A_{8\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} + 2A_{4\cdot0\cdot1}^{-1} - 4A_{8\cdot0\cdot1}^{-1}$$
$$r_5^{(3)} = \tfrac{1}{2}A_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = r_2^{(2)}$$
$$r_5^{(5)} = \tfrac{1}{2}A_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} + A_{2\cdot0\cdot0} = r_4^{(4)}$$

Ermittlung der p-Koefficienten.

$$p_0^{(0)} = B_{0\cdot0\cdot0}$$
$$p_0^{(1)} = \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} - B_{2\cdot0\cdot0}$$

$$p_1^{(0)} = B_{2\cdot0\cdot0}$$
$$p_1^{(1)} = B_{0\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} + \tfrac{1}{2}B_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} - 2B_{4\cdot0\cdot0} = B_{0\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} + \mathfrak{p}_1^{(4)}$$

$$p_2^{(0)} = B_{2\cdot1\cdot0}^{-1}$$
$$p_2^{(1)} = \tfrac{1}{2}B_{0\cdot1\cdot0}^{+1\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}B_{4\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} - 2B_{4\cdot1\cdot0}^{-1} + \tfrac{3}{2}B_{4\cdot0\cdot0}$$
$$p_2^{(3)} = B_{0\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}$$
$$p_2^{(4)} = \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} - B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}$$

$$p_3^{(0)} = B_{2\cdot0\cdot1}^{-1}$$
$$p_3^{(1)} = \tfrac{1}{2}B_{0\cdot0\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}B_{4\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} - 2B_{4\cdot0\cdot1}^{-1}$$
$$p_3^{(3)} = B_{0\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = p_2^{(2)}$$
$$p_3^{(5)} = \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} - B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}$$

$$p_4^{(0)} = B_{4\cdot1\cdot0}^{-1}$$
$$p_4^{(1)} = \tfrac{1}{2}B_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}B_{6\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} + B_{2\cdot1\cdot0}^{-1} - 3B_{6\cdot1\cdot0}^{-1} + \tfrac{3}{4}B_{6\cdot0\cdot0}$$
$$p_4^{(3)} = \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(2)}$$
$$p_4^{(4)} = B_{0\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = p_2^{(2)}$$

$$p_5^{(0)} = B_{4\cdot0\cdot1}^{-1}$$
$$p_5^{(1)} = \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}B_{6\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} + B_{2\cdot0\cdot1}^{-1} - 3B_{6\cdot0\cdot1}^{-1}$$
$$p_5^{(3)} = \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(2)}$$
$$p_5^{(5)} = B_{0\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = p_2^{(2)}$$

$$\mathfrak{p}_1^{(0)} = B_{0\cdot1\cdot0}^{+1}$$
$$\mathfrak{p}_0^{(1)} = \tfrac{1}{2}B_{2\cdot1\cdot0}^{+1\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}B_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} - B_{2\cdot1\cdot0}^{+1} - B_{2\cdot1\cdot0}^{-1} + \tfrac{3}{4}B_{2\cdot0\cdot0}$$
$$\mathfrak{p}_1^{(3)} = \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}$$
$$\mathfrak{p}_1^{(4)} = \tfrac{1}{2}B_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} - 2B_{4\cdot0\cdot0}$$

$$\mathfrak{p}_2^{(0)} = B_{0\cdot0\cdot1}^{+1}$$
$$\mathfrak{p}_2^{(1)} = \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} - B_{2\cdot0\cdot1}^{+1} - B_{2\cdot0\cdot1}^{-1}$$
$$\mathfrak{p}_2^{(3)} = \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(2)}$$
$$\mathfrak{p}_2^{(5)} = \tfrac{1}{2}B_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} - 2B_{4\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(4)}$$

www.libtool.com.cn

$$\mathfrak{p}_3^{(0)} = B_{0\cdot2\cdot0} - \tfrac{1}{2}\frac{B_{2\cdot0\cdot0} \times A^{-1}_{2\cdot1\cdot0}}{\delta_1}$$
$$\mathfrak{p}_3^{(1)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{2\cdot2\cdot0} - B_{2\cdot2\cdot0} + \tfrac{3}{4}B^{+1}_{2\cdot1\cdot0} - \tfrac{3}{2}B_{2\cdot0\cdot0}$$
$$\mathfrak{p}_3^{(2)} = \tfrac{1}{2}B^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot0} + \tfrac{3}{2}B_{2\cdot0\cdot0}$$
$$\mathfrak{p}_3^{(4)} = \tfrac{1}{2}B^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot0} - 2B^{-1}_{4\cdot1\cdot0} + \tfrac{3}{2}B_{4\cdot0\cdot0} = p_2^{(1)} - \tfrac{1}{2}B^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0}$$
$$\mathfrak{p}_3^{(7)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} - B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}$$

$$\mathfrak{p}_4^{(0)} = B^{+1}_{0\cdot1\cdot1} + \tfrac{1}{2}\frac{B_{2\cdot0\cdot0} \times A^{-1}_{2\cdot0\cdot1}}{\delta_1}$$
$$\mathfrak{p}_4^{(1)} = \tfrac{1}{2}B^{+1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot1} + \tfrac{1}{4}B^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot1} - B^{+1}_{2\cdot1\cdot1} - B^{-1}_{2\cdot1\cdot1} + \tfrac{3}{4}B^{+1}_{2\cdot0\cdot1}$$
$$\mathfrak{p}_4^{(2)} = \tfrac{1}{2}B^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1}$$
$$\mathfrak{p}_4^{(3)} = \tfrac{1}{2}B^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot0} + \tfrac{3}{2}B_{2\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_3^{(2)}$$
$$\mathfrak{p}_4^{(4)} = \tfrac{1}{2}B^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot1} - 2B^{-1}_{4\cdot0\cdot1}$$
$$\mathfrak{p}_4^{(5)} = \tfrac{1}{2}B^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot0} - 2B^{-1}_{4\cdot1\cdot0} + \tfrac{3}{2}B_{4\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_3^{(4)}$$
$$\mathfrak{p}_4^{(8)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} - B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}$$
$$\mathfrak{p}_4^{(9)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} - B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}$$

$$\mathfrak{p}_5^{(0)} = B_{0\cdot0\cdot2}$$
$$\mathfrak{p}_5^{(1)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot2} - B_{2\cdot0\cdot2}$$
$$\mathfrak{p}_5^{(3)} = \tfrac{1}{2}B^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1} = \mathfrak{p}_4^{(2)}$$
$$\mathfrak{p}_5^{(5)} = \tfrac{1}{2}B^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot1} - 2B^{-1}_{4\cdot0\cdot1} = \mathfrak{p}_4^{(4)}$$
$$\mathfrak{p}_5^{(10)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} - B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}$$

$$\mathfrak{p}_7^{(0)} = B_{2\cdot2\cdot0} - \frac{B_{4\cdot0\cdot0} \times A^{-1}_{2\cdot1\cdot0}}{\delta_1}$$
$$\mathfrak{p}_7^{(1)} = B^{1\cdot0}_{0\cdot2\cdot0} + \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{4\cdot2\cdot0} - 2B_{4\cdot2\cdot0} + \tfrac{3}{2}B^{+1}_{4\cdot1\cdot0} - 3B_{4\cdot0\cdot0}$$
$$\mathfrak{p}_7^{(2)} = \tfrac{1}{2}B^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}B^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot0} + 3B_{4\cdot0\cdot0}$$
$$\mathfrak{p}_7^{(4)} = \tfrac{1}{2}B^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}B^{-1\cdot1\cdot0}_{6\cdot1\cdot0} - 3B^{-1}_{6\cdot1\cdot0} - B^{-1}_{2\cdot1\cdot0} + \tfrac{3}{4}B_{2\cdot0\cdot0} + \tfrac{9}{4}B_{6\cdot0\cdot0} = p_4^{(1)} - 2p_2^{(0)} + \tfrac{3}{4}p_1^{(0)}$$
$$\mathfrak{p}_7^{(7)} = B^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot0} + \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} - 2B_{4\cdot0\cdot0} = p_1^{(1)}$$

$$\mathfrak{p}_8^{(0)} = B^{+1}_{2\cdot1\cdot1}$$
$$\mathfrak{p}_8^{(1)} = \tfrac{1}{2}B^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot1} + \tfrac{1}{2}B^{+1\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot1} - 2B^{+1}_{4\cdot1\cdot1}$$
$$\mathfrak{p}_8^{(2)} = \tfrac{1}{2}B^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot1}$$
$$\mathfrak{p}_8^{(3)} = \tfrac{1}{2}B^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0}$$
$$\mathfrak{p}_8^{(4)} = \tfrac{1}{2}B^{-1\cdot1\cdot0}_{6\cdot0\cdot1} - 3B^{-1}_{6\cdot0\cdot1}$$
$$\mathfrak{p}_8^{(5)} = \tfrac{1}{2}B^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot0} - B^{-1}_{2\cdot1\cdot0} + \tfrac{3}{4}B_{2\cdot0\cdot0}$$
$$\mathfrak{p}_8^{(9)} = B^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot0} = p_2^{(2)}$$
$$\mathfrak{p}_8^{(6)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} - 2B_{4\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(4)}$$

$$\mathfrak{p}_9^{(0)} = B^{-1}_{2\cdot1\cdot1} - \frac{B_{4\cdot0\cdot0} \times A^{-1}_{2\cdot0\cdot1}}{\delta_1}$$
$$\mathfrak{p}_9^{(1)} = \tfrac{1}{2}B^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot1} + \tfrac{1}{2}B^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot1} - 2B^{-1}_{4\cdot1\cdot1} + \tfrac{3}{2}B^{+1}_{4\cdot0\cdot1}$$
$$\mathfrak{p}_9^{(2)} = \tfrac{1}{2}B^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1}$$
$$\mathfrak{p}_9^{(3)} = \tfrac{1}{2}B^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot0} + 3B_{4\cdot0\cdot0} = p_7^{(2)} - p_8^{(3)}$$
$$\mathfrak{p}_9^{(4)} = \tfrac{1}{2}B^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1} - B^{-1}_{2\cdot0\cdot1}$$
$$\mathfrak{p}_9^{(5)} = \tfrac{1}{2}B^{-1\cdot1\cdot0}_{6\cdot1\cdot0} - 3B^{-1}_{6\cdot1\cdot0} + \tfrac{9}{4}B_{6\cdot0\cdot0}$$
$$\mathfrak{p}_9^{(8)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} - 2B_{4\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(4)}$$
$$\mathfrak{p}_9^{(9)} = B^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot0} = p_2^{(2)}$$

$$\mathfrak{p}_{10}^{(0)} = B_{2\cdot0\cdot2}$$
$$\mathfrak{p}_{10}^{(1)} = B^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot2} + \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot2} - 2B_{4\cdot0\cdot2}$$
$$\mathfrak{p}_{10}^{(3)} = \tfrac{1}{2}B^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1} + \tfrac{1}{2}B^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot1} = p_3^{(1)} + 2p_5^{(0)}$$
$$\mathfrak{p}_{10}^{(5)} = \tfrac{1}{2}B^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1} + \tfrac{1}{2}B^{-1\cdot1\cdot0}_{6\cdot0\cdot1} - B^{-1}_{2\cdot0\cdot1} - 3B^{-1}_{6\cdot0\cdot1} = p_8^{(4)} + p_9^{(4)}$$
$$\mathfrak{p}_{10}^{(10)} = B^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot0} + \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} - 2B_{4\cdot0\cdot0} = p_1^{(1)}$$

$$\mathfrak{p}_{11}^{(0)} = B^{-2}_{2\cdot2\cdot0}$$
$$\mathfrak{p}_{11}^{(1)} = \tfrac{1}{2}B^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot2\cdot0} + \tfrac{1}{2}B^{-2\cdot1\cdot0}_{4\cdot2\cdot0} - 2B^{-2}_{4\cdot2\cdot0} + \tfrac{3}{2}B^{-1}_{4\cdot1\cdot0} - B_{4\cdot0\cdot0}$$
$$\mathfrak{p}_{11}^{(2)} = \tfrac{1}{2}B^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0} = p_8^{(3)}$$
$$\mathfrak{p}_{11}^{(4)} = \tfrac{1}{2}B^{+1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot0} - B^{+1}_{2\cdot1\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(1)} - p_8^{(5)}$$
$$\mathfrak{p}_{11}^{(11)} = B^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot0} = p_2^{(2)}$$
$$\mathfrak{p}_{11}^{(14)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(2)}$$
$$\mathfrak{p}_{11}^{(17)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} - 2B_{4\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(4)}$$

$$\mathfrak{p}_{12}^{(0)} = B^{-2}_{2\cdot1\cdot1}$$
$$\mathfrak{p}_{12}^{(1)} = \tfrac{1}{2}B^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot1} + \tfrac{1}{2}B^{-2\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot1} - 2B^{-2}_{4\cdot1\cdot1} + \tfrac{3}{2}B^{-1}_{4\cdot0\cdot1}$$
$$\mathfrak{p}_{12}^{(2)} = \tfrac{1}{2}B^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1} = p_9^{(2)}$$
$$\mathfrak{p}_{12}^{(3)} = \tfrac{1}{2}B^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0} = p_8^{(3)}$$
$$\mathfrak{p}_{12}^{(4)} = \tfrac{1}{2}B^{+1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1} - B^{+1}_{2\cdot0\cdot1}$$
$$\mathfrak{p}_{12}^{(5)} = \tfrac{1}{2}B^{+1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot0} - B^{+1}_{2\cdot1\cdot0} = p_{11}^{(4)}$$
$$\mathfrak{p}_{12}^{(12)} = B^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot0} = p_2^{(2)}$$
$$\mathfrak{p}_{12}^{(15)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(2)}$$
$$\mathfrak{p}_{12}^{(18)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} - 2B_{4\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(4)}$$

www.libtool.com.cn

$$
\begin{aligned}
p_{13}^{(0)} &= B_{3\cdot0\cdot2}^{-2}\\
p_{13}^{(1)} &= \tfrac{1}{2}B_{0\cdot0\cdot2}^{+2\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}B_{4\cdot0\cdot2}^{-2\cdot1\cdot0}-2B_{4\cdot0\cdot2}^{-2}\\
p_{13}^{(3)} &= \tfrac{1}{2}B_{0\cdot0\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0} = p_9^{(2)}\\
p_{13}^{(5)} &= \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0}-B_{2\cdot0\cdot1}^{+1} = p_{12}^{(4)}\\
p_{13}^{(12)} &= B_{0\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = p_2^{(2)}\\
p_{13}^{(15)} &= \tfrac{1}{2}B_{3\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(2)}\\
p_{13}^{(16)} &= \tfrac{1}{2}B_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}-2B_{4\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(4)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{14}^{(0)} &= B_{4\cdot2\cdot0}^{-2}-\tfrac{1}{2}\frac{B_{2\cdot0\cdot0}\times A_{2\cdot1\cdot0}^{-1}}{\delta_1}\\
p_{14}^{(1)} &= \tfrac{1}{2}B_{2\cdot2\cdot0}^{-2\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}B_{6\cdot2\cdot0}^{-2\cdot1\cdot0}+B_{2\cdot2\cdot0}^{-2}-3B_{6\cdot2\cdot0}^{-2}\\
&\quad+\tfrac{9}{4}B_{6\cdot1\cdot0}^{-1}-\tfrac{3}{2}B_{2\cdot0\cdot0}-\tfrac{3}{2}B_{6\cdot0\cdot0}\\
p_{14}^{(2)} &= \tfrac{1}{2}B_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0}+\tfrac{3}{2}B_{2\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_3^{(2)}\\
p_{14}^{(4)} &= \tfrac{1}{2}B_{0\cdot1\cdot0}^{+1\cdot1\cdot0} = p_8^{(3)}\\
p_{14}^{(11)} &= \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}-B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}\\
p_{14}^{(14)} &= B_{0\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = p_2^{(2)}\\
p_{14}^{(17)} &= \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}-B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{15}^{(0)} &= B_{4\cdot1\cdot1}^{-2}-\tfrac{1}{2}\frac{B_{2\cdot0\cdot0}\times A_{2\cdot0\cdot1}^{-1}}{\delta_1}\\
p_{15}^{(1)} &= \tfrac{1}{2}B_{2\cdot1\cdot1}^{-2\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}B_{6\cdot1\cdot1}^{-2\cdot1\cdot0}+B_{2\cdot1\cdot1}^{-2}-3B_{6\cdot1\cdot1}^{-2}+\tfrac{9}{4}B_{6\cdot0\cdot1}^{-1}\\
p_{15}^{(2)} &= \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} = \mathfrak{p}_4^{(2)}\\
p_{15}^{(3)} &= \tfrac{1}{2}B_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0}+\tfrac{3}{2}B_{2\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_3^{(2)}\\
p_{15}^{(4)} &= \tfrac{1}{2}B_{0\cdot0\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0} = p_9^{(2)}\\
p_{15}^{(5)} &= \tfrac{1}{2}B_{0\cdot1\cdot0}^{+1\cdot1\cdot0} = p_8^{(3)}\\
p_{15}^{(12)} &= \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}-B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}\\
p_{15}^{(15)} &= B_{0\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = p_2^{(2)}\\
p_{15}^{(16)} &= \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}-B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{16}^{(0)} &= B_{4\cdot0\cdot2}^{-2}\\
p_{16}^{(1)} &= \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot2}^{-2\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}B_{6\cdot0\cdot2}^{-2\cdot1\cdot0}+B_{2\cdot0\cdot2}^{-2}-3B_{6\cdot0\cdot2}^{-2}\\
p_{16}^{(2)} &= \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} = \mathfrak{p}_4^{(2)}\\
p_{16}^{(5)} &= \tfrac{1}{2}B_{0\cdot0\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0} = p_9^{(2)}\\
p_{16}^{(12)} &= \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}-B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}\\
p_{16}^{(16)} &= B_{0\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = p_2^{(2)}\\
p_{16}^{(19)} &= \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}-B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{17}^{(0)} &= B_{6\cdot2\cdot0}^{-2}-\frac{B_{4\cdot0\cdot0}\times A_{2\cdot1\cdot0}^{-1}}{\delta_1}\\
p_{17}^{(1)} &= \tfrac{1}{2}B_{4\cdot2\cdot0}^{-2\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}B_{8\cdot2\cdot0}^{-2\cdot1\cdot0}+2B_{4\cdot2\cdot0}^{-2}-4B_{8\cdot2\cdot0}^{-2}\\
&\quad+3B_{8\cdot1\cdot0}^{-1}-3B_{4\cdot0\cdot0}-2B_{8\cdot0\cdot0}\\
p_{17}^{(2)} &= \tfrac{1}{2}B_{4\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0}+3B_{4\cdot0\cdot0} = p_7^{(2)}-p_8^{(3)}\\
p_{17}^{(4)} &= \tfrac{1}{2}B_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0}+B_{2\cdot1\cdot0}^{-1} = p_4^{(1)}-p_9^{(5)}\\
p_{17}^{(11)} &= \tfrac{1}{2}B_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}-2B_{4\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(4)}\\
p_{17}^{(14)} &= \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(2)}\\
p_{17}^{(17)} &= B_{0\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = p_2^{(2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{18}^{(0)} &= B_{6\cdot1\cdot1}^{-2}-\frac{B_{4\cdot0\cdot0}\times A_{2\cdot0\cdot1}^{-1}}{\delta_1}\\
p_{18}^{(1)} &= \tfrac{1}{2}B_{4\cdot1\cdot1}^{-2\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}B_{8\cdot1\cdot1}^{-2\cdot1\cdot0}+2B_{4\cdot1\cdot1}^{-2}-4B_{8\cdot1\cdot1}^{-2}+3B_{8\cdot0\cdot1}^{-1}\\
p_{18}^{(2)} &= \tfrac{1}{2}B_{4\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} = p_8^{(2)}\\
p_{18}^{(3)} &= \tfrac{1}{2}B_{4\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0}+3B_{4\cdot0\cdot0} = p_{17}^{(2)}\\
p_{18}^{(4)} &= \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0}+B_{2\cdot0\cdot1}^{-1} = p_5^{(1)}-p_8^{(4)}\\
p_{18}^{(5)} &= \tfrac{1}{2}B_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0}+B_{2\cdot1\cdot0}^{-1} = p_{17}^{(4)}\\
p_{18}^{(12)} &= \tfrac{1}{2}B_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}-2B_{4\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(4)}\\
p_{18}^{(15)} &= \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(2)}\\
p_{18}^{(16)} &= B_{0\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = p_2^{(2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{19}^{(0)} &= B_{6\cdot0\cdot2}^{-2}\\
p_{19}^{(1)} &= \tfrac{1}{2}B_{4\cdot0\cdot2}^{-2\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}B_{8\cdot0\cdot2}^{-2\cdot1\cdot0}+2B_{4\cdot0\cdot2}^{-2}-4B_{8\cdot0\cdot2}^{-2}\\
p_{19}^{(3)} &= \tfrac{1}{2}B_{4\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} = p_8^{(2)}\\
p_{19}^{(5)} &= \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0}+B_{2\cdot0\cdot1}^{-1} = p_{18}^{(4)}\\
p_{19}^{(13)} &= \tfrac{1}{2}B_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0}-2B_{4\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(4)}\\
p_{19}^{(16)} &= \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(2)}\\
p_{19}^{(19)} &= B_{0\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = p_2^{(2)}
\end{aligned}
$$

www.libtool.com.cn

Ermittlung der p-Koefficienten, welche von der Neigung abhängen.

$$\mathfrak{p}_6^{(0)} = \overline{B}_{0\cdot2\cdot0}$$
$$\mathfrak{p}_6^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{1\cdot0}_{2\cdot2\cdot0} - \overline{B}_{2\cdot2\cdot0}$$
$$\mathfrak{p}_6^{(32)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} - B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}$$
$$\mathfrak{p}_6^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{4\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{4\cdot1\cdot0}$$

$$\mathfrak{p}_7^{(0)} = \overline{B}^{+1}_{0\cdot1\cdot1}$$
$$\mathfrak{p}_7^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{+1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot1} + \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot1} - \overline{B}^{+1}_{2\cdot1\cdot1} - \overline{B}^{-1}_{2\cdot1\cdot1}$$
$$\mathfrak{p}_7^{(34)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} - B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}$$
$$\mathfrak{p}_7^{(25)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} - B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}$$
$$\mathfrak{p}_7^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{4\cdot0\cdot1}$$
$$\mathfrak{p}_7^{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{4\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{4\cdot1\cdot0} = \mathfrak{p}_6^{\mathrm{I}}$$

$$\mathfrak{p}_8^{(0)} = \overline{B}_{0\cdot0\cdot2}$$
$$\mathfrak{p}_8^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot2} - \overline{B}_{2\cdot0\cdot2}$$
$$\mathfrak{p}_8^{(26)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} - B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}$$
$$\mathfrak{p}_8^{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{4\cdot0\cdot1} = \mathfrak{p}_7^{\mathrm{I}}$$

$$p_{23}^{(0)} = \overline{B}_{2\cdot2\cdot0}$$
$$p_{23}^{(1)} = \overline{B}^{1\cdot0}_{0\cdot2\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{B}^{1\cdot0}_{4\cdot2\cdot0} - 2\overline{B}_{4\cdot2\cdot0}$$
$$p_{23}^{(22)} = B^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot0} + \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} - 2B_{4\cdot0\cdot0} = p_1^{(1)}$$
$$p_{23}^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{2\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{2\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{6\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{6\cdot1\cdot0}$$

$$p_{24}^{(0)} = \overline{B}^{+1}_{2\cdot1\cdot1}$$
$$p_{24}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot1} + \tfrac{1}{2}\overline{B}^{+1\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot1} - 2\overline{B}^{+1}_{4\cdot1\cdot1}$$
$$p_{24}^{(24)} = B^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot0} = p_2^{(2)}$$
$$p_{24}^{(25)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} - 2B_{4\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(4)}$$
$$p_{24}^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{6\cdot0\cdot1}$$
$$p_{24}^{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{2\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{2\cdot1\cdot0}$$

$$p_{25}^{(0)} = \overline{B}^{-1}_{2\cdot1\cdot1}$$
$$p_{25}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot1} + \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot1} - 2\overline{B}^{-1}_{4\cdot1\cdot1}$$
$$p_{25}^{(24)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} - 2B_{4\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(4)}$$
$$p_{25}^{(25)} = B^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot0} = p_2^{(2)}$$
$$p_{25}^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{2\cdot0\cdot1}$$
$$p_{25}^{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{6\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{6\cdot1\cdot0} = p_{23}^{\mathrm{I}} - p_{24}^{\mathrm{II}}$$

$$p_{26}^{(0)} = \overline{B}_{2\cdot0\cdot2}$$
$$p_{26}^{(1)} = \overline{B}^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot2} + \tfrac{1}{2}\overline{B}^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot2} - 2\overline{B}_{4\cdot0\cdot2}$$
$$p_{26}^{(26)} = B^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot0} - 2B_{4\cdot0\cdot0} + \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} = p_1^{(1)}$$
$$p_{26}^{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{2\cdot0\cdot1} + \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{6\cdot0\cdot1}$$
$$p_{27}^{(0)} = \overline{B}^{-2}_{2\cdot2\cdot0}$$
$$p_{27}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot2\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-2\cdot1\cdot0}_{4\cdot2\cdot0} - 2\overline{B}^{-2}_{4\cdot2\cdot0}$$
$$p_{27}^{(27)} = B^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot0} = p_2^{(2)}$$
$$p_{27}^{(30)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(3)}$$
$$p_{27}^{(33)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} - 2B_{4\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(4)}$$
$$p_{27}^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{+1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{2\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{B}^{+1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{2\cdot1\cdot0}$$

$$p_{28}^{(0)} = \overline{B}^{-2}_{2\cdot1\cdot1}$$
$$p_{28}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot1} + \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-2\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot1} - 2\overline{B}^{-2}_{4\cdot1\cdot1}$$
$$p_{28}^{(28)} = B^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot0} = p_2^{(2)}$$
$$p_{28}^{(31)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(3)}$$
$$p_{28}^{(34)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} - 2B_{4\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(4)}$$
$$p_{28}^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{+1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{2\cdot0\cdot1}$$
$$p_{28}^{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{+1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{2\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{B}^{+1\cdot0\cdot\mathrm{I}}_{2\cdot1\cdot0} = p_{27}^{\mathrm{I}}$$

$$p_{29}^{(0)} = \overline{B}^{-2}_{2\cdot0\cdot2}$$
$$p_{29}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot2} + \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-2\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot2} - 2\overline{B}^{-2}_{4\cdot0\cdot2}$$
$$p_{29}^{(29)} = B^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot0} = p_2^{(2)}$$
$$p_{29}^{(32)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(3)}$$
$$p_{29}^{(35)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} - 2B_{4\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(4)}$$
$$p_{29}^{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{+1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{2\cdot0\cdot1} = p_{28}^{\mathrm{I}}$$

$$p_{30}^{(0)} = \overline{B}^{-2}_{4\cdot2\cdot0}$$
$$p_{30}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-2\cdot1\cdot0}_{2\cdot2\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{B}^{-2\cdot1\cdot0}_{6\cdot2\cdot0} + \overline{B}^{-2}_{2\cdot2\cdot0} - 3\overline{B}^{-2}_{6\cdot2\cdot0}$$
$$p_{30}^{(27)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} - B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}$$
$$p_{30}^{(30)} = B^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot0} = p_2^{(2)}$$
$$p_{30}^{(33)} = \tfrac{1}{2}B^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} - B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}$$
$$p_{30}^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\overline{B}^{+1\cdot\mathrm{I}\cdot0}_{0\cdot1\cdot0}$$

www.libtool.com.cn

$$p_{31}^{(0)} = \overline{B}_{4\cdot1\cdot1}^{-2}$$
$$p_{31}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{B}_{2\cdot1\cdot1}^{-2\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{B}_{6\cdot1\cdot1}^{-2\cdot1\cdot0} + \overline{B}_{2\cdot1\cdot1}^{-2} - 3\overline{B}_{6\cdot1\cdot1}^{-2}$$
$$p_{31}^{(28)} = \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} - B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}$$
$$p_{31}^{(31)} = B_{0\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = p_2^{(2)}$$
$$p_{31}^{(34)} = \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} - B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}$$
$$p_{31}^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\overline{B}_{0\cdot0\cdot1}^{+1\cdot\mathrm{I}\cdot0}$$
$$p_{31}^{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\overline{B}_{0\cdot1\cdot0}^{+1\cdot\mathrm{I}\cdot0} = p_{30}^{\mathrm{I}}$$

$$p_{32}^{(0)} = \overline{B}_{4\cdot0\cdot2}^{-2}$$
$$p_{32}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{B}_{2\cdot0\cdot2}^{-2\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{B}_{6\cdot0\cdot2}^{-2\cdot1\cdot0} + \overline{B}_{2\cdot0\cdot2}^{-2} - 3\overline{B}_{6\cdot0\cdot2}^{-2}$$
$$p_{32}^{(29)} = \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} - B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}$$
$$p_{32}^{(32)} = B_{0\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = p_2^{(2)}$$
$$p_{32}^{(35)} = \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} - B_{2\cdot0\cdot0} = p_0^{(1)}$$
$$p_{32}^{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\overline{B}_{0\cdot0\cdot1}^{+1\cdot\mathrm{I}\cdot0} = p_{31}^{\mathrm{I}}$$

$$p_{33}^{(0)} = \overline{B}_{6\cdot2\cdot0}^{-2}$$
$$p_{33}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{B}_{4\cdot2\cdot0}^{-2\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{B}_{8\cdot2\cdot0}^{-2\cdot1\cdot0} + 2\overline{B}_{4\cdot2\cdot0}^{-2} - 4\overline{B}_{8\cdot2\cdot0}^{-2}$$
$$p_{33}^{(27)} = \tfrac{1}{2}B_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} - 2B_{4\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(4)}$$
$$p_{33}^{(30)} = \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(2)}$$
$$p_{33}^{(33)} = B_{0\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = p_2^{(2)}$$
$$p_{33}^{\mathrm{I}} = -\tfrac{1}{2}\overline{B}_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{B}_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}}$$

$$p_{34}^{(0)} = \overline{B}_{6\cdot1\cdot1}^{-2}$$
$$p_{34}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{B}_{4\cdot1\cdot1}^{-2\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{B}_{8\cdot1\cdot1}^{-2\cdot1\cdot0} + 2\overline{B}_{4\cdot1\cdot1}^{-2} - 4\overline{B}_{8\cdot1\cdot1}^{-2}$$
$$p_{34}^{(28)} = \tfrac{1}{2}B_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} - 2B_{4\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(4)}$$
$$p_{34}^{(31)} = \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(2)}$$
$$p_{34}^{(34)} = B_{0\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = p_2^{(2)}$$
$$p_{34}^{\mathrm{I}} = -\tfrac{1}{2}\overline{B}_{2\cdot0\cdot1}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0}$$
$$p_{34}^{\mathrm{II}} = -\tfrac{1}{2}\overline{B}_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{B}_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot0\cdot\mathrm{I}} = p_{33}^{\mathrm{I}}$$

$$p_{35}^{(0)} = \overline{B}_{6\cdot0\cdot2}^{-2}$$
$$p_{35}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\overline{B}_{4\cdot0\cdot2}^{-2\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}\overline{B}_{8\cdot0\cdot2}^{-2\cdot1\cdot0} + 2\overline{B}_{4\cdot0\cdot2}^{-2} - 4\overline{B}_{8\cdot0\cdot2}^{-2}$$
$$p_{35}^{(29)} = \tfrac{1}{2}B_{4\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} - 2B_{4\cdot0\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(4)}$$
$$p_{35}^{(32)} = \tfrac{1}{2}B_{2\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = \mathfrak{p}_1^{(2)}$$
$$p_{35}^{(35)} = B_{0\cdot0\cdot0}^{1\cdot0} = p_2^{(2)}$$
$$p_{35}^{\mathrm{II}} = -\tfrac{1}{2}\overline{B}_{2\cdot0\cdot1}^{-1\cdot\mathrm{I}\cdot0} = p_{34}^{\mathrm{I}}$$

Ermittlung der ε-Koefficienten.

$$\mathfrak{z}_1^{(0)} = C_{0\cdot1\cdot0}^{+1}$$
$$\mathfrak{z}_1^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}C_{2\cdot1\cdot0}^{+1\cdot1\cdot0} - \tfrac{1}{2}C_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} - C_{2\cdot1\cdot0}^{+1} + C_{2\cdot1\cdot0}^{-1}$$
$$\mathfrak{z}_1^{(1)} = -\tfrac{1}{2}C_{4\cdot0\cdot0}^{0\cdot1}$$

$$\varepsilon_1^{(0)} = C_{4\cdot1\cdot0}^{-1}$$
$$\varepsilon_1^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}C_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}C_{6\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} + C_{2\cdot1\cdot0}^{-1} - 3C_{6\cdot1\cdot0}^{-1}$$
$$\varepsilon_1^{(1)} = C_{0\cdot0\cdot0}^{0\cdot1}$$

$$\mathfrak{z}_2^{(0)} = C_{0\cdot0\cdot1}^{+1}$$
$$\mathfrak{z}_2^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}C_{2\cdot0\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0} - \tfrac{1}{2}C_{2\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} - C_{2\cdot0\cdot1}^{+1} + C_{2\cdot0\cdot1}^{-1}$$
$$\mathfrak{z}_2^{(2)} = -\tfrac{1}{2}C_{4\cdot0\cdot0}^{0\cdot1} = \mathfrak{z}_1^{(1)}$$

$$\varepsilon_2^{(0)} = C_{4\cdot0\cdot1}^{-1}$$
$$\varepsilon_2^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}C_{2\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}C_{6\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} + C_{2\cdot0\cdot1}^{-1} - 3C_{6\cdot0\cdot1}^{-1}$$
$$\varepsilon_2^{(2)} = C_{0\cdot0\cdot0}^{0\cdot1} = \varepsilon_1^{(1)}$$

$$\mathfrak{z}_3^{(0)} = C_{0\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}^{+1}$$
$$\mathfrak{z}_3^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}C_{2\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}^{+1\cdot1\cdot0} - \tfrac{1}{2}C_{2\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} - C_{2\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}^{+1} + C_{2\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}^{-1} + \tfrac{3}{4}C_{2\cdot1\cdot0}^{+1}$$
$$\mathfrak{z}_3^{\mathrm{II}} = -\tfrac{1}{2}C_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0}$$
$$\mathfrak{z}_3^{\mathrm{IV}} = -\tfrac{1}{2}C_{4\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} + 2C_{4\cdot1\cdot0}^{-1}$$
$$\mathfrak{z}_3^{(1)} = -\tfrac{1}{2}C_{4\cdot0\cdot0\cdot1\cdot0}^{-1\cdot0\cdot1}$$
$$\mathfrak{z}_3^{(3)} = \tfrac{1}{2}C_{2\cdot0\cdot0}^{0\cdot1}$$
$$\mathfrak{z}_3^{(4)} = -\tfrac{1}{2}C_{2\cdot0\cdot0}^{0\cdot1} = -\mathfrak{z}_3^{(3)}$$

$$\mathfrak{z}_4^{(0)} = C_{0\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}^{+1}$$
$$\mathfrak{z}_4^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}C_{2\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}^{+1\cdot1\cdot0} - \tfrac{1}{2}C_{2\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}^{-1\cdot1\cdot0} - C_{2\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}^{+1} + C_{2\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}^{-1}$$
$$\mathfrak{z}_4^{\mathrm{III}} = -\tfrac{1}{2}C_{2\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} = \mathfrak{z}_3^{\mathrm{II}}$$
$$\mathfrak{z}_4^{\mathrm{V}} = -\tfrac{1}{2}C_{4\cdot1\cdot0}^{-1\cdot1\cdot0} + 2C_{4\cdot1\cdot0}^{-1} = \mathfrak{z}_3^{\mathrm{IV}}$$
$$\mathfrak{z}_4^{(1)} = -\tfrac{1}{2}C_{4\cdot0\cdot0\cdot0\cdot1}^{-1\cdot0\cdot1}$$
$$\mathfrak{z}_4^{(5)} = \tfrac{1}{2}C_{2\cdot0\cdot0}^{0\cdot1} = \mathfrak{z}_3^{(3)}$$
$$\mathfrak{z}_4^{(6)} = -\tfrac{1}{2}C_{2\cdot0\cdot0}^{0\cdot1} = -\mathfrak{z}_3^{(3)}$$

www.libtool.com.cn

$$\lambda_{05}^{(0)} = C^{+1}_{0\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}$$
$$\lambda_{05}^{I} = \tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} - \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} - C^{+1}_{2\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} + C^{-1}_{2\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} + \tfrac{3}{4}C^{+1}_{2\cdot0\cdot1}$$
$$\lambda_{05}^{II} = -\tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1}$$
$$\lambda_{05}^{IV} = -\tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot1} + 2C^{-1}_{4\cdot0\cdot1}$$
$$\lambda_{05}^{(2)} = -\tfrac{1}{2}C^{-1\cdot0\cdot1}_{4\cdot0\cdot0\cdot1\cdot0} = \lambda_{03}^{(1)}$$
$$\lambda_{05}^{(7)} = \tfrac{1}{2}C^{0\cdot1}_{2\cdot0\cdot0} = \lambda_{03}^{(3)}$$
$$\lambda_{05}^{(8)} = -\tfrac{1}{2}C^{0\cdot1}_{2\cdot0\cdot0} = -\lambda_{03}^{(3)}$$

$$\lambda_{06}^{(0)} = C^{+1}_{0\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}$$
$$\lambda_{06}^{I} = \tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1} - \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1} - C^{+1}_{2\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1} + C^{-1}_{2\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}$$
$$\lambda_{06}^{III} = -\tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1} = \lambda_{05}^{II}$$
$$\lambda_{06}^{V} = -\tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot1} + 2C^{-1}_{4\cdot0\cdot1} = \lambda_{05}^{IV}$$
$$\lambda_{06}^{(2)} = -\tfrac{1}{2}C^{-1\cdot0\cdot1}_{4\cdot0\cdot0\cdot0\cdot1} = \lambda_{04}^{(1)}$$
$$\lambda_{06}^{(9)} = \tfrac{1}{2}C^{0\cdot1}_{2\cdot0\cdot0} = \lambda_{03}^{(3)}$$
$$\lambda_{06}^{(10)} = -\tfrac{1}{2}C^{0\cdot1}_{2\cdot0\cdot0} = -\lambda_{03}^{(3)}$$

$$z_3^{(0)} = C^{+1}_{2\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}$$
$$z_3^{I} = \tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} - 2C^{+1}_{4\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} + \tfrac{3}{2}C^{+1}_{4\cdot1\cdot0}$$
$$z_3^{II} = \tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0}$$
$$z_3^{IV} = -\tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot0} + C^{-1}_{2\cdot1\cdot0} = \lambda_{03}^{II} + C^{-1}_{2\cdot1\cdot0}$$
$$z_3^{(1)} = -\tfrac{1}{2}C^{-1\cdot0\cdot1}_{6\cdot0\cdot0\cdot1\cdot0}$$
$$z_3^{(3)} = C^{0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0} = z_1^{(1)}$$
$$z_3^{(4)} = -\tfrac{1}{2}C^{0\cdot1}_{4\cdot0\cdot0} = \lambda_{01}^{(1)}$$

$$z_3^{(0)} = C^{-1}_{2\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}$$
$$z_3^{I} = -\tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} - 2C^{-1}_{4\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}$$
$$z_3^{II} = \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot0} = 2z_1^{(0)} - \lambda_{03}^{IV}$$
$$z_3^{IV} = \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{6\cdot1\cdot0} - 3C^{-1}_{6\cdot1\cdot0}$$
$$z_3^{(1)} = \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot0\cdot1}_{2\cdot0\cdot0\cdot1\cdot0}$$
$$z_3^{(3)} = -\tfrac{1}{2}C^{0\cdot1}_{4\cdot0\cdot0} = \lambda_{01}^{(1)}$$
$$z_3^{(4)} = C^{0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0} = z_1^{(1)}$$

$$z_5^{(0)} = C^{+1}_{2\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}$$
$$z_5^{I} = \tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} + \tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} - 2C^{+1}_{4\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}$$
$$z_5^{III} = \tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0} = z_3^{II}$$
$$z_5^{V} = -\tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot0} + C^{-1}_{2\cdot1\cdot0} = z_3^{IV}$$
$$z_5^{(1)} = -\tfrac{1}{2}C^{-1\cdot0\cdot1}_{6\cdot0\cdot0\cdot0\cdot1}$$
$$z_5^{(5)} = C^{0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0} = z_1^{(1)}$$
$$z_5^{(6)} = -\tfrac{1}{2}C^{0\cdot1}_{4\cdot0\cdot0} = \lambda_{01}^{(1)}$$

$$z_6^{(0)} = C^{-1}_{2\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}$$
$$z_6^{I} = -\tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} + \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} - 2C^{-1}_{4\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}$$
$$z_6^{III} = \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot0} = z_4^{II}$$
$$z_6^{V} = \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{6\cdot1\cdot0} - 3C^{-1}_{6\cdot1\cdot0} = z_4^{IV}$$
$$z_6^{(1)} = \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot0\cdot1}_{2\cdot0\cdot0\cdot0\cdot1}$$
$$z_6^{(5)} = -\tfrac{1}{2}C^{0\cdot1}_{4\cdot0\cdot0} = \lambda_{01}^{(1)}$$
$$z_6^{(6)} = C^{0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0} = z_1^{(1)}$$

$$z_7^{(0)} = C^{+1}_{2\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}$$
$$z_7^{I} = \tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} - 2C^{+1}_{4\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} + \tfrac{3}{2}C^{+1}_{4\cdot0\cdot1}$$
$$z_7^{II} = \tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1}$$
$$z_7^{IV} = -\tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1} + C^{-1}_{2\cdot0\cdot1} = \lambda_{05}^{II} + C^{-1}_{2\cdot0\cdot1}$$
$$z_7^{(2)} = -\tfrac{1}{2}C^{-1\cdot0\cdot1}_{6\cdot0\cdot0\cdot1\cdot0} = z_3^{(1)}$$
$$z_7^{(7)} = C^{0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0} = z_1^{(1)}$$
$$z_7^{(8)} = -\tfrac{1}{2}C^{0\cdot1}_{4\cdot0\cdot0} = \lambda_{01}^{(1)}$$

$$z_8^{(0)} = C^{-1}_{2\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}$$
$$z_8^{I} = -\tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} + \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} - 2C^{-1}_{4\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}$$
$$z_8^{II} = \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot1} = 2z_2^{(0)} - \lambda_{05}^{IV}$$
$$z_8^{IV} = \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{6\cdot0\cdot1} - 3C^{-1}_{6\cdot0\cdot1}$$
$$z_8^{(2)} = \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot0\cdot1}_{2\cdot0\cdot0\cdot1\cdot0} = z_4^{(1)}$$
$$z_8^{(7)} = -\tfrac{1}{2}C^{0\cdot1}_{4\cdot0\cdot0} = \lambda_{01}^{(1)}$$
$$z_8^{(8)} = C^{0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0} = z_1^{(1)}$$

$$z_9^{(0)} = C^{+1}_{2\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}$$
$$z_9^{I} = \tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1} + \tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1} - 2C^{+1}_{4\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}$$
$$z_9^{III} = \tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1} = z_7^{II}$$
$$z_9^{V} = -\tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1} + C^{-1}_{2\cdot0\cdot1} = z_7^{IV}$$
$$z_9^{(2)} = -\tfrac{1}{2}C^{-1\cdot0\cdot1}_{6\cdot0\cdot0\cdot1\cdot0} = z_5^{(1)}$$
$$z_9^{(9)} = C^{0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0} = z_1^{(1)}$$
$$z_9^{(10)} = -\tfrac{1}{2}C^{0\cdot1}_{4\cdot0\cdot0} = \lambda_{01}^{(1)}$$

$$z_{10}^{(0)} = C^{-1}_{2\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}$$
$$z_{10}^{I} = -\tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1} + \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1} - 2C^{-1}_{4\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}$$
$$z_{10}^{III} = \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot1} = z_8^{II}$$
$$z_{10}^{V} = \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{6\cdot0\cdot1} - 3C^{-1}_{6\cdot0\cdot1} = z_8^{IV}$$
$$z_{10}^{(2)} = \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot0\cdot1}_{2\cdot0\cdot0\cdot0\cdot1} = z_6^{(1)}$$
$$z_{10}^{(9)} = -\tfrac{1}{2}C^{0\cdot1}_{4\cdot0\cdot0} = \lambda_{01}^{(1)}$$
$$z_{10}^{(10)} = C^{0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0} = z_1^{(1)}$$

www.libtool.com.cn

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11}^{(0)} &= C^{-2}_{2\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\\
\varepsilon_{11}^{\mathrm{I}} &= -\tfrac{1}{2}C^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}C^{-2\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}-2C^{-2}_{4\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}+\tfrac{3}{2}C^{-1}_{4\cdot1\cdot0}\\
\varepsilon_{11}^{\mathrm{II}} &= -\tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0} = -\varepsilon_{3}^{\mathrm{II}}\\
\varepsilon_{11}^{\mathrm{IV}} &= -\tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot0}+C^{+1}_{2\cdot1\cdot0} = \varepsilon_{3}^{\mathrm{IV}}-\tfrac{1}{01}^{\mathrm{I}}\\
\varepsilon_{11}^{(1)} &= \tfrac{1}{2}C^{+1\cdot0\cdot1}_{2\cdot0\cdot0\cdot1\cdot0}\\
\varepsilon_{11}^{(11)} &= C^{0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0} = \varepsilon_{1}^{(1)}\\
\varepsilon_{11}^{(15)} &= \tfrac{1}{2}C^{0\cdot1}_{4\cdot0\cdot0} = -\tfrac{1}{01}^{(1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{12}^{(0)} &= C^{-2}_{2\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}\\
\varepsilon_{12}^{\mathrm{I}} &= -\tfrac{1}{2}C^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}+\tfrac{1}{2}C^{-2\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}-2C^{-2}_{4\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}\\
\varepsilon_{12}^{\mathrm{III}} &= -\tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0} = -\varepsilon_{3}^{\mathrm{II}}\\
\varepsilon_{12}^{\mathrm{V}} &= -\tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot0}+C^{+1}_{2\cdot1\cdot0} = \varepsilon_{11}^{\mathrm{IV}}\\
\varepsilon_{12}^{(1)} &= \tfrac{1}{2}C^{+1\cdot0\cdot1}_{2\cdot0\cdot0\cdot0\cdot1}\\
\varepsilon_{12}^{(12)} &= C^{0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0} = \varepsilon_{1}^{(1)}\\
\varepsilon_{12}^{(16)} &= \tfrac{1}{2}C^{0\cdot1}_{4\cdot0\cdot0} = -\tfrac{1}{01}^{(1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{13}^{(0)} &= C^{-2}_{2\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}\\
\varepsilon_{13}^{\mathrm{I}} &= -\tfrac{1}{2}C^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}C^{-2\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}-2C^{-2}_{4\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}+\tfrac{3}{2}C^{-1}_{4\cdot0\cdot1}\\
\varepsilon_{13}^{\mathrm{II}} &= -\tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1} = -\varepsilon_{7}^{\mathrm{II}}\\
\varepsilon_{13}^{\mathrm{IV}} &= -\tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1}+C^{+1}_{2\cdot0\cdot1} = \varepsilon_{7}^{\mathrm{IV}}-\tfrac{1}{02}^{\mathrm{I}}\\
\varepsilon_{13}^{(2)} &= \tfrac{1}{2}C^{+1\cdot0\cdot1}_{2\cdot0\cdot0\cdot1\cdot0} = \varepsilon_{11}^{(1)}\\
\varepsilon_{13}^{(13)} &= C^{0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0} = \varepsilon_{1}^{(1)}\\
\varepsilon_{13}^{(17)} &= \tfrac{1}{2}C^{0\cdot1}_{4\cdot0\cdot0} = -\tfrac{1}{01}^{(1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{14}^{(0)} &= C^{-2}_{2\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}\\
\varepsilon_{14}^{\mathrm{I}} &= -\tfrac{1}{2}C^{+2\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}+\tfrac{1}{2}C^{-2\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}-2C^{-2}_{4\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}\\
\varepsilon_{14}^{\mathrm{III}} &= -\tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1} = -\varepsilon_{7}^{\mathrm{II}}\\
\varepsilon_{14}^{\mathrm{V}} &= -\tfrac{1}{2}C^{+1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1}+C^{+1}_{2\cdot0\cdot1} = \varepsilon_{12}^{\mathrm{IV}}\\
\varepsilon_{14}^{(2)} &= \tfrac{1}{2}C^{+1\cdot0\cdot1}_{2\cdot0\cdot0\cdot0\cdot1} = \varepsilon_{12}^{(1)}\\
\varepsilon_{14}^{(14)} &= C^{0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0} = \varepsilon_{1}^{(1)}\\
\varepsilon_{14}^{(18)} &= \tfrac{1}{2}C^{0\cdot1}_{4\cdot0\cdot0} = -\tfrac{1}{01}^{(1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{15}^{(0)} &= C^{-2}_{6\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\\
\varepsilon_{15}^{\mathrm{I}} &= \tfrac{1}{2}C^{-2\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}C^{-2\cdot1\cdot0}_{8\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}+2C^{-2}_{4\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}-4C^{-2}_{8\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}+3C^{-1}_{8\cdot1\cdot0}\\
\varepsilon_{15}^{\mathrm{II}} &= \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot0} = \varepsilon_{4}^{\mathrm{II}}\\
\varepsilon_{15}^{\mathrm{IV}} &= \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot0}+C^{-1}_{2\cdot1\cdot0} = \varepsilon_{1}^{\mathrm{I}}-\varepsilon_{4}^{\mathrm{IV}}\\
\varepsilon_{15}^{(1)} &= \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot0\cdot1}_{2\cdot0\cdot0\cdot1\cdot0} = \varepsilon_{4}^{(1)}\\
\varepsilon_{15}^{(11)} &= \tfrac{1}{2}C^{0\cdot1}_{4\cdot0\cdot0} = -\tfrac{1}{01}^{(1)}\\
\varepsilon_{15}^{(15)} &= C^{0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0} = \varepsilon_{1}^{(1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{16}^{(0)} &= C^{-2}_{6\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}\\
\varepsilon_{16}^{\mathrm{I}} &= \tfrac{1}{2}C^{-2\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}+\tfrac{1}{2}C^{-2\cdot1\cdot0}_{8\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}+2C^{-2}_{4\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}-4C^{-2}_{8\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}\\
\varepsilon_{16}^{\mathrm{III}} &= \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot0} = \varepsilon_{4}^{\mathrm{II}}\\
\varepsilon_{16}^{\mathrm{V}} &= \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot0}+C^{-1}_{2\cdot1\cdot0} = \varepsilon_{15}^{\mathrm{IV}}\\
\varepsilon_{16}^{(1)} &= \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot0\cdot1}_{2\cdot0\cdot0\cdot0\cdot1} = \varepsilon_{6}^{(1)}\\
\varepsilon_{16}^{(12)} &= \tfrac{1}{2}C^{0\cdot1}_{4\cdot0\cdot0} = -\tfrac{1}{01}^{(1)}\\
\varepsilon_{16}^{(16)} &= C^{0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0} = \varepsilon_{1}^{(1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{17}^{(0)} &= C^{-2}_{6\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}\\
\varepsilon_{17}^{\mathrm{I}} &= \tfrac{1}{2}C^{-2\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}C^{-2\cdot1\cdot0}_{8\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}+2C^{-2}_{4\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}-4C^{-2}_{8\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}+3C^{-1}_{8\cdot0\cdot1}\\
\varepsilon_{17}^{\mathrm{II}} &= \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot1} = \varepsilon_{8}^{\mathrm{II}}\\
\varepsilon_{17}^{\mathrm{IV}} &= \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1}+C^{-1}_{2\cdot0\cdot1} = \varepsilon_{2}^{\mathrm{I}}-\varepsilon_{8}^{\mathrm{IV}}\\
\varepsilon_{17}^{(2)} &= \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot0\cdot1}_{2\cdot0\cdot0\cdot1\cdot0} = \varepsilon_{4}^{(1)}\\
\varepsilon_{17}^{(13)} &= \tfrac{1}{2}C^{0\cdot1}_{4\cdot0\cdot0} = -\tfrac{1}{01}^{(1)}\\
\varepsilon_{17}^{(17)} &= C^{0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0} = \varepsilon_{1}^{(1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{18}^{(0)} &= C^{-2}_{6\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}\\
\varepsilon_{18}^{\mathrm{I}} &= \tfrac{1}{2}C^{-2\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}+\tfrac{1}{2}C^{-2\cdot1\cdot0}_{8\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}+2C^{-2}_{4\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}-4C^{-2}_{8\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}\\
\varepsilon_{18}^{\mathrm{III}} &= \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot1} = \varepsilon_{8}^{\mathrm{II}}\\
\varepsilon_{18}^{\mathrm{V}} &= \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1}+C^{-1}_{2\cdot0\cdot1} = \varepsilon_{17}^{\mathrm{IV}}\\
\varepsilon_{18}^{(2)} &= \tfrac{1}{2}C^{-1\cdot0\cdot1}_{2\cdot0\cdot0\cdot0\cdot1} = \varepsilon_{6}^{(1)}\\
\varepsilon_{18}^{(14)} &= \tfrac{1}{2}C^{0\cdot1}_{4\cdot0\cdot0} = -\tfrac{1}{01}^{(1)}\\
\varepsilon_{18}^{(18)} &= C^{0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0} = \varepsilon_{1}^{(1)}
\end{aligned}
$$

Damit wäre die erste Aufgabe für die Behandlung der charakteristischen und kritischen Planeten erledigt, die Herstellung der Q, P, Z in den Differentialgleichungen bis auf Glieder v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ incl. genau in den Hauptgliedern. Nun müssen diese Differentialgleichungen, da sie nach Potenzen von S und R fortschreiten, weiter entwickelt werden, indem auch hier die Koefficienten der Hauptglieder bis auf Grössen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ genau gerechnet werden.

An dieser Stelle will ich auch Herrn Ludendorff für die Bereitwilligkeit, mit der er mir gestattete, aus seinen Resultaten Nutzen zu ziehen, meinen besten Dank sagen.

www.libtool.com.cn

Drittes Kapitel.

Die Integration der Differentialgleichungen für die Glieder nullten, ersten und zweiten Grades ohne Berücksichtigung der exargumentalen Glieder sowie der Veränderlichkeit von η, Π; η', Π' und $\sin j, \sigma$; $\sin j', \sigma'$.

§ 1. Die Glieder nullten und ersten Grades.

1) Das vorliegende Kapitel wird über die Integration der Differentialgleichungen handeln, wie sie in Formel (1), (2), (3), (7) gegeben sind. Es kommen in diesen ausser gewissen Potenzen und Derivierten von η, d. h. ausser langperiodisch elementaren Teilen, die Funktionen Q, P, Z vor. Die ersteren wollen wir bei unseren vorläufigen Betrachtungen ausser Acht lassen; ausserdem kommt noch $S, R, \mathfrak{Z}$ rechts vor. Für diese benutzen wir, soweit sie in der zweiten Potenz der Masse auftreten, unsere Ansätze des vorigen Kapitels. Für S wollen wir noch folgende Annahme für den charakteristischen Teil machen:

$$
\begin{aligned}
(50)\quad S = {} & \alpha_2 \eta \cos(2w - \mathfrak{v}) + \alpha_{14} \eta^2 \cos(4w - 2\mathfrak{v}) + \alpha_{30} \sin^2 j \cos(4w - 2\mathfrak{v}) \\
& + \alpha_3 \eta' \cos(2w - \mathfrak{v}_1) + \alpha_{15} \eta \eta' \cos(4w - \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) + \alpha_{31} \sin j \sin j' \cos(4w - \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) \\
& + \alpha_{16} \eta'^2 \cos(4w - 2\mathfrak{v}_1) + \alpha_{32} \sin^2 j' \cos(4w - 2\mathfrak{v}_1).
\end{aligned}
$$

Unsere Entwicklungen schreiten direkt nach Potenzen von Grössen fort, die mit Excentricität und Neigung vergleichbar sind. Also von diesen Grössen wird es in erster Linie abhängen, bis zu welchem Grade (so wollen wir die Potenzen dieser Grössen nennen) in den Formeln zu gehen ist. Es scheint im allgemeinen für Planeten mit mittlerer Excentricität und Neigung die Mitnahme des zweiten Grades noch erforderlich, die des dritten jedoch nicht mehr. Andererseits treten, wie wir ersahen, noch Potenzen der Masse auf, und zwar kann man sich bei gewöhnlichen Planeten in den meisten Fällen mit der ersten Potenz der Masse (ersten Ordnung) begnügen oder braucht nur wenige Glieder zweiter Ordnung nachzutragen. Anders ist es jedoch bei charakteristischen und kritischen Planeten, bei welchen eine Mitnahme der zweiten Potenz in den Hauptungleichheiten von Anfang an erforderlich ist.

Ausserdem bringt die partielle Integration noch das Auftreten exargumentaler Glieder mit sich, welche, obwohl nominell mindestens zweiter Ordnung, durch hohe Potenzen der Divisoren verhältnismässig gross und gemäss unserer Definition des $\frac{d\overline{V}}{dv}$ mindestens von einem um eins höheren Grade werden als diejenigen Glieder, aus denen sie entstehen. Deswegen dürfte es bei kritischen Planeten ganz besonders geboten sein, auch die aus den Gliedern zweiten

www.libtool.com.cn

Grades entstehenden exargumentalen Glieder zu berücksichtigen. In dieser Hinsicht ist das Auftreten von Gliedern dritten Grades zu erklären.

Wir wollen nun bei der Integration derart verfahren, dass wir in diesem Kapitel die Integration der charakteristischen und koordinierten Glieder durchführen, ohne Rücksicht auf das Auftreten des $\overline{V}$ im Argumente, und zwar sollen die Differentialgleichungen einschliesslich Glieder zweiten Grades und zweiter Ordnung in den charakteristischen Termen gegeben werden. Ebenso sollen zuerst die langperiodischen Funktionen $\eta, \Pi, \ldots \sin j, \sigma \ldots$ als konstant betrachtet werden. Auch die Integration des elementaren Teils der Funktionen S und V sowie (ϱ) und $(\dot{s})$ wollen wir hier fortlassen. Was die Integration der gewöhnlichen Glieder betrifft, so reichen die in Br. Kap. 6 gegebenen Formeln vollkommen aus und wir brauchen diese nicht weiter zu berücksichtigen.

Ist dies erledigt, so wollen wir das Auftreten von $\overline{V}$ in den charakteristi-Argumenten berücksichtigen. Dies führt uns auf die exargumentalen Zusätze ersten und zweiten Grades, sowie auf die exargumentalen Teile der Glieder dritten Grades.

In demselben Kapitel werden wir dann der Veränderlichkeit von η, Π etc. in den charakteristischen Gliedern Rechnung tragen und die hieraus entstehenden „Zusatzglieder" herleiten. Im engsten Anschluss hieran steht die Ermittelung der elementaren und konstanten Glieder.

Dann erst sind unsere Formeln vollständig, und es erübrigt noch, sie für eine bequemere numerische Rechnung umzuformen.

---

2) Was die Integration für Glieder nullten und ersten Grades betrifft, so kann ich mich kurz fassen und in Einzelheiten auf Herrn Ludendorffs Dissertationsschrift sowie auf Br. Kap. 7 verweisen.

Wir machen folgenden Ansatz für die Differentialgleichung in S:

$$\left(\frac{dS}{dv}\right)_0 + \left(\frac{dS}{dv}\right)_1 = \frac{dS_0}{dv} + \frac{dS_1}{dv}.$$

Dies dürfen wir, da wir vorläufig $\overline{V}$ in den Argumenten nicht berücksichtigen. Erklärend sei hierzu bemerkt, dass S_n den Teil n-ten Grades der Funktion bezeichnet und dass ist

$$\left(\frac{dS}{dv}\right)_n = \text{dem Teil der Differentialgleichung vom } n\text{-ten Grade,}$$

dass dagegen ist

$$\frac{dS_n}{dv} = \left(\frac{dS}{dv}\right)_n + \frac{\partial S_n}{\partial \overline{V}}\frac{d\overline{V}}{dv} = \left(\frac{dS}{dv}\right)_n + \frac{\partial S_n}{\partial \overline{V}} \times \text{(Glieder von mindestens erstem Grade),}$$

also dann verschieden, wenn wir $\overline{V}$ nicht als konstant in den Argumenten ansehen:

www.libtool.com.cn

$$\frac{d(S_0+S_1)}{dv} = -Q_0-Q_1-3S_1Q_0. \tag{51}$$

Hier brauchen wir nur die C-Glieder ersten Grades von der Funktion S. Das letzte Glied ist v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$, und da Q_0 keine Konstante enthält, kann es zu C-Gliedern keine Veranlassung geben, es bleibt also auch im Integral von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$, wird dagegen in R von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$, weswegen wir es mitnehmen.

Wir wollen hier noch einen Schritt weiter gehen als Herr Ludendorff, damit unsere Formeln auch für kritische Planeten Giltigkeit behalten. Da S und W bei denselben Gliedern denselben Divisor erhalten, also in W das Quadrat des Divisors auftritt, wollen wir hier in $\frac{dS}{dv}$ auch Glieder rein zweiter Ordnung mitnehmen, insofern sie von der Art C sind; sie werden dann in V von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1^2} < m'$.

Wir bilden also, soweit C-Glieder entstehen:

$$\frac{dS_1}{dv} = -3S_1Q_0-3S_0Q_1.$$

Bezeichnen wir nun mit T_0S_1 die C-Glieder in S_2, so ergiebt sich folgendes merkwürdige Resultat:

$$T_0S_1 = -\int[3S_1Q_0+3S_0Q_1]dv = 0.$$

Die C-Glieder in S_1 werden, soweit sie rein zweiter Ordnung in der Differentialgleichung sind, im Integral Null mit einem Fehler v. d. Ord. m'^2 resp. $\frac{m'^2}{\delta_1}$, mit Ausnahme von p. const. S. Den Beweis will ich hier nicht geben; er ist ohne weiteres einzusehen.

Wir erhalten also T_0S_1 genau bis zu Gliedern rein zweiter Ordnung excl. Unter Berücksichtigung der Formeln für Q sowie des Ansatzes für S erhalten wir, wenn wir sofort integrieren, für den charakteristischen Teil in S:

$$\begin{aligned}\text{pars}(S_0+S_1) = {} & a_1\cos 2w+a_2\eta\cos(2w-\mathrm{v})+a_4\eta\cos(4w-\mathrm{v}) \\ & +a_3\eta'\cos(2w-\mathrm{v}_1)+a_5\eta'\cos(4w-\mathrm{v}_1).\end{aligned} \tag{52}$$

Die Werte der Koefficienten sind:

$$a_1 = \frac{q_1}{1+\delta_1}, \quad a_2 = \frac{q_2+2p_0^{(0)}q_2^{(0)}}{\delta_1}, \quad a_4 = \frac{1}{1+2\delta_1}[q_4+\tfrac{3}{2}q_1^{(0)}a_2] \tag{53}$$

$$a_3 = \frac{q_3+2p_0^{(0)}q_3^{(0)}}{\delta_1}, \quad a_5 = \frac{1}{1+2\delta_1}[q_5+\tfrac{3}{2}q_1^{(0)}a_3]$$

www.libtool.com.cn

Den elementaren Teil ersten Grades wollen wir zusammen mit (ϱ) ermitteln. Auf einen Umstand will ich hier gleich noch aufmerksam machen, die Grössen ε_n und τ_n werden in diesen Untersuchungen niemals als Divisor in Verbindung mit δ_1 auftreten, im Gegensatz zu Herrn Ludendorffs Formeln; denn wir betrachten η sowie Π, $\sin j$ und σ überall als vollständig konstant, mit Ausnahme der charakteristischen Glieder, welche δ_1 als Divisor erhalten. Dort nehmen wir η, Π etc. als variabel an und erhalten infolgedessen ganz neue Glieder. Herr Ludendorff hat dagegen η, $\sin j$ durchweg als konstant angenommen, in Π, σ aber den secularen Teil berücksichtigt, d. h. gesetzt:

$$\Pi = \Pi_0 + \varsigma v, \qquad \sigma = \sigma_0 - \tau v \qquad \text{etc.}$$

wo Π_0 und σ_0 an Stelle von Π und σ in Gleichung (10) auftreten. Unsere Definition von η, Π sowie $\sin j$, σ schliesst dies aus, und wir folgen hierin Herrn Brendels Theorie der kleinen Planeten.

---

3) Da R eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, so werden hier die kurzperiodisch elementaren Glieder einen kleinen Divisor erhalten, also schon ein Glied nullten Grades. Wir machen folgenden Ansatz:

$$\frac{d^2(R_0+R_1)}{dv^2} + (R_0+R_1) =$$

$$2S_0 - P_0 - Q_0\frac{dR_0}{dv} + 2S_1 - P_1 + 2S_0S_1 - 2S_1P_0 - Q_0\frac{dR_1}{dv} - Q_1\frac{dR_0}{dv} - Q_0\frac{d(\varrho)}{dv}.$$

Hier vernachlässigen wir stets in $Q_n\frac{dR_n}{dv}$, sowie in $Q_n\frac{d(\varrho)}{dv}$ die Veränderlichkeit von η, Π, sowie im ersteren auch die Anwesenheit von $\overline{V}$ im Argument. Denn wegen des Faktors ς werden die aus η, Π entspringenden Zusatz-Teile rein erster Ordnung, also nicht mehr elementar, treten stets in m' multipliziert auf und werden dann rein zweiter Ordnung. Da ferner

$$\frac{dR_n}{dv} = \left(\frac{dR}{dv}\right)_n + \frac{\partial R_n}{\partial \overline{V}}\frac{d\overline{V}}{dv}$$

ist, und da $\frac{\partial R_n}{\partial \overline{V}}$ v. d. Ord. m' bis $\frac{m'}{\delta_1}$ und $\frac{d\overline{V}}{dv}$ v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ ist, so würde der aus $\overline{V}$ entspringende Zusatz ungünstigen Falles v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ und er tritt dann überall in m' multipliziert auf; der Fehler ist demnach v. d. Ord. $\frac{m'^3}{\delta_1^2}$, liegt also unterhalb unserer Genauigkeitsgrenze.

Die Integration führt Herr Ludendorff mittelst des früher gegebenen Ansatzes für R_0 und R_1 und mit Hilfe der Koefficientenvergleichung aus. Wir

www.libtool.com.cn

wollen uns hier der Variation der Parameter bedienen, welchen Weg auch Herr Brendel in seiner Theorie der kleinen Planeten eingeschlagen hat, und welcher eine bequemere Berücksichtigung der Variabilität von η und Π gestattet. Da das Hauptintegral mit den Konstanten schon ermittelt ist, es sich hier also nur um die Ermittelung des particularen Integrals handelt, bedienen wir uns folgender Formeln:

$$\frac{d^2x}{dy^2}+x = b\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} cy.$$

Das Hauptintegral unter Vernachlässigung des zweiten Gliedes lautet dann in periodischer Form: $x = g_1 \sin y - g_2 \cos y$. Variieren wir die Parameter, so erhalten wir die bekannten Bedingungsgleichungen:

$$\frac{dg_1}{dy} = \tfrac{1}{2} b\left[\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(c+1)y+\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(c-1)y\right]$$

(54)

$$\frac{dg_2}{dy} = \mp\tfrac{1}{2} b\left[\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(c+1)y-\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(c-1)y\right],$$

und das particulare Integral ist gleich $\dfrac{b}{(1-c)(1+c)}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} cy.$

Komponieren wir die in der Differentialgleichung für R stehenden periodischen Aggregate zu charakteristischen Gliedern, so können wir diese schreiben:

$$\frac{d^2R}{dv^2}+R = b_{2\cdot0\cdot0}\cos 2w + b^{-1}_{2\cdot1\cdot0}\eta\cos(2w-\mathrm{v}) + b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}\eta\cos(4w-\mathrm{v}) + b^{-1}_{2\cdot0\cdot1}\eta'\cos(2w-\mathrm{v}_1) + b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}\eta'\cos(4w-\mathrm{v}_1). \tag{55}$$

Hier ist:

$$b_{2\cdot0\cdot0} = 2a_1 - p_1 \qquad b^{-1}_{2\cdot1\cdot0} = 2a_2 - p_2 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1}{2}q_4\beta_1 + \tfrac{1}{2}q_1\beta_4$$
$$b^{-1}_{2\cdot0\cdot1} = 2a_3 - p_3 + \tfrac{1}{2}(q_2^{(0)}+q_5)\beta_1 + \tfrac{1}{2}q_1\beta_5$$
$$b^{-1}_{4\cdot1\cdot0} = 2a_4 - p_4 + \tfrac{1}{2}r_1 + \tfrac{1}{2}(r_4-q_2)\beta_1 + (a_1-p_1)\alpha_2$$
$$b^{-1}_{4\cdot0\cdot1} = 2a_5 - p_5 + \tfrac{1}{2}(r_5-q_3)\beta_1 + (a_1-p_1)\alpha_3. \tag{56}$$

Das Resultat der Integration lässt sich in die Form bringen:

$$R_0+R_1 = \beta_1\cos 2w + \beta_2\eta\cos(2w-\mathrm{v}) + \beta_4\eta\cos(4w-\mathrm{v}) + \beta_3\eta'\cos(2w-\mathrm{v}_1) + \beta_5\eta'\cos(4w-\mathrm{v}_1). \tag{57}$$

Wie im vorigen Kapitel erwähnt wurde, treten infolge Mitnahme der zweiten Ordnung alle Koefficienten als Funktionen dieser β_s auf, von welcher Thatsache man sich leicht durch einen Blick auf die q- und p-Koefficienten überzeugen kann. Die β_s werden sich demnach nicht direkt ermitteln lassen. Wir bekommen vielmehr für den ersten Grad je zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten für sie. Sind diese aufgelöst, was im Schlusskapitel geschehen wird, so sind erst die Werte der β_s ermittelt, und dann können wir die Koefficienten in S, die ebenfalls

www.libtool.com.cn

in Funktion dieser β_1 bis β_5 gegeben sind, berechnen. Wir wollen uns vorläufig mit folgendem Resultate begnügen:

$$(58)\quad \begin{cases} \beta_1 = -\dfrac{b_{2\cdot0\cdot0}}{\delta_1(2+\delta_1)}, & \beta_2 = \dfrac{b^{-1}_{2\cdot1\cdot0}}{(1+\delta_1)(1-\delta_1)}, & \beta_4 = -\dfrac{b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}}{4\delta_1(1+\delta_1)} \\ & \beta_3 = \dfrac{b^{-1}_{2\cdot0\cdot1}}{(1+\delta_1)(1-\delta_1)}, & \beta_5 = -\dfrac{b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}}{4\delta_1(1+\delta_1)}. \end{cases}$$

In Wirklichkeit werden die Gleichungen wegen des Auftretens der exargumentalen Glieder nicht so einfach sein, weil die γ_s in $\dfrac{d\overline{V}}{dv}$ ebenfalls durch die β_s auszudrücken sind.

---

4) Wir wollen jetzt die B-Glieder in S_1 und $\varrho_1 = (\varrho)$ ermitteln. Zu diesem Zwecke schreiben wir die Differentialgleichungen hinreichend genau folgendermassen:

$$T_0 \frac{dS_1}{dv} = -Q_1 - 3S_1 Q_0$$

$$\frac{d^2(\varrho)}{dv^2} + (\varrho) = 2S_1 - P_1 + 2S_0 S_1 - 2S_1 P_0 - Q_0 \frac{dR_1}{dv} - Q_1 \frac{dR_0}{dv},$$

oder, die B-Glieder ausgesondert und S integriert:

$$(59)\quad T_0 S_1 = a_1 \eta \cos \mathrm{v} + a_2 \eta' \cos \mathrm{v}_1$$

$$a_1 = \frac{1}{1-\varsigma}[q_1 + \tfrac{3}{2} q_1 \alpha_2]$$

$$a_2 = \frac{1}{1-\varsigma_1}[q_2 + \tfrac{3}{2} q_1 \alpha_2].$$

Ferner ist

$$(60)\quad \frac{d^2(\varrho)}{dv^2} + (\varrho) = b^{+1}_{0\cdot1\cdot0} \eta \cos \mathrm{v} + b^{+1}_{0\cdot0\cdot1} \eta' \cos \mathrm{v}_1$$

$$b^{+1}_{0\cdot1\cdot0} = 2a_1 - p_1 + \alpha_2(a_1 - p_1) + \tfrac{1}{2}\beta_1(q_2 + r_2) + \tfrac{1}{2} r_1 \beta_4$$

$$b^{+1}_{0\cdot0\cdot1} = 2a_2 - p_2 + \alpha_2(a_1 - p_1) + \tfrac{1}{2}\beta_1(q_2 + r_2) + \tfrac{1}{2} r_1 \beta_5.$$

In betreff der Integration bedenken wir, dass wir unbedingt η und Π als variabel betrachten müssen, und dass nach Gleichung (10) geschrieben werden kann

$$(61)\quad \eta \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(2v - \Pi) = \varkappa \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(2v - \omega) + \sum \varkappa_n \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(2v - \omega_n)$$

$$\eta' \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(2v - \Pi_1) = \sum \varkappa'_n \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(2v - \omega_n),$$

und da $\mathrm{v} = v - \Pi$, $\mathrm{v}_1 = v - \Pi_1$ ist, so erhalten wir unter Anwendung der Va-

www.libtool.com.cn

riation der Parameter:

$$(62)\qquad \left.\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \end{matrix}\right\} = \frac{b^{+1}_{0\cdot1\cdot0}}{2}\int \eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2v-\Pi)\,dv + \frac{b^{+1}_{0\cdot1\cdot0}}{2}\int \eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Pi\,dv$$
$$+\frac{b^{+1}_{0\cdot0\cdot1}}{2}\int \eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2v-\Pi_1)\,dv + \frac{b^{+1}_{0\cdot0\cdot1}}{2}\int \eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Pi_1\,dv.$$

Unter Anwendung der Gleichungen (10) und (61) integriert:

$$(63)\qquad \left.\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \end{matrix}\right\} = \pm\frac{b^{+1}_{0\cdot1\cdot0}}{2}\left[\frac{\varkappa}{2-\varsigma}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(2v-\omega) + \sum \frac{\varkappa_n}{2-\varsigma_n}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(2v-\omega_n)\right]$$
$$\pm\frac{b^{+1}_{0\cdot1\cdot0}}{2}\left[\frac{\varkappa}{\varsigma}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\omega + \sum\frac{\varkappa_n}{\varsigma_n}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\omega_n\right]$$
$$\pm\frac{b^{+1}_{0\cdot0\cdot1}}{2}\sum\frac{\varkappa'_n}{2-\varsigma_n}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(2v-\omega_n) \pm \frac{b^{+1}_{0\cdot0\cdot1}}{2}\sum\frac{\varkappa'_n}{\varsigma_n}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\omega_n$$
$$(\varrho) = \frac{\varkappa}{2}\left[\frac{b^{+1}_{0\cdot1\cdot0}}{\varsigma} + \frac{b^{+1}_{0\cdot1\cdot0}}{2-\varsigma}\right]\cos(v-\omega) + \sum\frac{\varkappa_n}{2}\left[\frac{b^{+1}_{0\cdot1\cdot0}}{\varsigma_n} + \frac{b^{+1}_{0\cdot1\cdot0}}{2-\varsigma_n}\right]\cos(v-\omega_n)$$
$$+\sum\frac{\varkappa'_n}{2}\left[\frac{b^{+1}_{0\cdot0\cdot1}}{\varsigma_n} + \frac{b^{+1}_{0\cdot0\cdot1}}{2-\varsigma_n}\right]\cos(v-\omega_n)$$

Andrerseits muss sein:

$$(64)\qquad (\varrho) = \eta\cos(v-\Pi) = \varkappa\cos(v-\omega) + \sum\varkappa_n\cos(v-\omega_n).$$

Durch Vergleichung der Koefficienten kann man $\varkappa_n$ und ς berechnen. Doch wollen wir dies im nächsten Kapitel genauer ausführen unter Berücksichtigung der exargumentalen Glieder. Die ς_n und $\varkappa'_n$ liegen schon anderweitig ermittelt vor.

---

5) Wir kommen jetzt zur Berechnung von $W = K + V$, soweit es vom nullten und ersten Grade ist. Wir erhalten die Differentialgleichung hinreichend genau, wenn wir schreiben:

$$\frac{d(K_0+K_1+V_0+V_1)}{dv} = S_0 - 2R_0 - 2R_0S_0 + 3R_0^2$$
$$+ S_1 - 2R_1 - 2R_0S_1 - 2R_1S_0 + (6R_0 - 2S_0 - 12R_0^2 + 6R_0S_0)\,\eta\cos v$$
$$-\frac{d\Xi}{dv}$$

Ebenfalls mit hinreichender Genauigkeit erhält man folgenden Ausdruck, wenn man sofort mit Hilfe der linearen Integrationsdivisoren integriert:

$$(65)\quad K_0+K_1 = c_0 + \gamma_1\sin 2w + W_{4\cdot0\cdot0}\sin 4w$$
$$+ W^{+1}_{0\cdot1\cdot0}\eta\sin v + \gamma_4\eta\sin(4w-v) + \gamma_6\eta\sin(2w+v) + W^{-1}_{6\cdot1\cdot0}\eta\sin(6w-v)$$
$$+ W^{+1}_{0\cdot0\cdot1}\eta'\sin v_1 + \gamma_5\eta'\sin(4w-v_1) \qquad + W^{-1}_{6\cdot0\cdot1}\eta'\sin(6w-v_1).$$

www.libtool.com.cn

Ξ, welches sehr klein ist, werden wir später berücksichtigen, da es aus der Veränderlichkeit von η und Π in der Mittelpunktgleichung entspringt. Es tritt hier ein koordiniertes Glied γ_6 auf, sowie fünf Glieder, die Teile v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ enthalten, was durch die Gestalt der Differentialgleichung verursacht wird. Die Koefficienten lauten:

$$
(66)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\gamma_1 = \frac{1}{1+\delta_1}[a_1-2\beta_1], & \gamma_4 = \frac{1}{1+2\delta_1}[a_4-2\beta_4-\beta_1\alpha_3+3\beta_1\beta_3+3R_{4\cdot0\cdot0}-S_{4\cdot0\cdot0}-3\beta_1^2] \\
W_{4\cdot0\cdot0} = \frac{1}{2(1+\delta_1)}[S_{4\cdot0\cdot0}-2R_{4\cdot0\cdot0}+\tfrac{3}{2}\beta_1^2], & \gamma_5 = \frac{1}{1+2\delta_1}[a_5-2\beta_5-\beta_1\alpha_3+3\beta_1\beta_3] \\
 & \gamma_6 = \frac{1}{2+\delta_1}[S^{+1}_{2\cdot1\cdot0}-2R^{+1}_{2\cdot1\cdot0}+3\beta_1-S_{2\cdot0\cdot0}] \\
W^{+1}_{0\cdot1\cdot0} = \frac{1}{1-\varsigma}[a_1-a_1\beta_2-\alpha_2\beta_1+3\beta_1\beta_2+a_0-6\beta_1^2] & \\
W^{+1}_{0\cdot0\cdot1} = \frac{1}{1-\varsigma_1}[a_2-a_1\beta_2-\alpha_2\beta_1+3\beta_1\beta_2] & \\
W^{-1}_{6\cdot1\cdot0} = \frac{1}{2+3\delta_1}[S^{-1}_{6\cdot1\cdot0}-2R^{-1}_{6\cdot1\cdot0}+3\beta_1\beta_4+3R_{6\cdot0\cdot0}-S_{6\cdot0\cdot0}] & \\
W^{-1}_{6\cdot0\cdot1} = \frac{1}{2+3\delta_1}[S^{-1}_{6\cdot0\cdot1}-2R^{-1}_{6\cdot0\cdot1}+3\beta_1\beta_5] &
\end{array}\right.
$$

Jetzt sind wir auch in der Lage, a_0 und b_0 zu bestimmen. Da c_0 nur Glieder rein erster Ordnung enthalten soll, und da andrerseits sein muss:

$$c_0 = a_0-2b_0 = 0$$

so folgt:

$$
(67)\quad \left\{\begin{array}{l}
a_0 = \frac{2}{3}p_0^{(0)}+\frac{2}{3}(p_0^{(1)}-\frac{1}{2}q_1^{(0)})\beta_1 \\
b_0 = \frac{1}{2}a_0
\end{array}\right.
$$

Das Integral für V können wir folgendermassen schreiben:

$$
(68)\quad \begin{aligned} V_0+V_1 = {} & \gamma v+\gamma_2'\eta\sin(2w-v) \\ & +\gamma_3'\eta'\sin(2w-v_1) \end{aligned}
$$

Hier tritt also der seculare Teil auf, der bei kritischen Planeten sich fast der nullten Ordnung nähert und deswegen nicht gleich Null gesetzt werden darf; er ist, soweit er nullten Grades ist:

$$
(69)\quad \left\{\begin{array}{l}
\gamma = \frac{3}{2}\beta_1^2;\ \text{ferner } \gamma_2' = \frac{\gamma_2}{\delta_1},\ \gamma_3' = \frac{\gamma_3}{\delta_1} \\
\gamma_2 = \left[\frac{q_2^{(0)}}{\delta_1}(1+\frac{1}{3}p_0^{(0)})-\frac{q_1^{(0)}}{1+\delta_1}\right]+\left[\frac{q_2^{(1)}}{\delta_1}-\frac{q_1^{(1)}}{1+\delta_1}-\frac{q_4^{(0)}}{1+2\delta_1}+3\right]\beta_1+[\tfrac{2}{3}p_0^{(0)}-2]\beta_2+\left[\frac{q_2^{(4)}}{\delta_1}-\frac{q_1^{(3)}}{1+\delta_1}+3\beta_1\right]\beta_4 \\
\gamma_3 = \frac{q_3^{(0)}}{\delta_1}(1+\frac{1}{3}p_0^{(0)})+\left[\frac{q_2^{(1)}}{\delta_1}-\frac{q_5^{(0)}}{1+2\delta_1}\right]\beta_1+[\tfrac{2}{3}p_0^{(0)}-2]\beta_3+\left[\frac{q_3^{(3)}}{\delta_1}-\frac{q_1^{(0)}}{1+\delta_1}+3\beta_1\right]\beta_5.
\end{array}\right.
$$

www.libtool.com.cn

Es sind dies bis auf die exargumentalen Zusatzteile die Formeln, wie sie Herr Ludendorff gegeben hat. Eine Vergleichung der Resultate zeigt jedoch, dass wir in der Genauigkeit weiter gegangen sind. So haben wir in R_1 die C-Glieder incl. Grössen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ berechnet, wir erhalten also, da T, S_1 mit derselben Genauigkeit gerechnet ist, V_1 genau einschliesslich Grössen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$, da wir auch in der Differentialgleichung für V die Entwicklung bis zu Grössen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ incl. geführt haben. Diese Genauigkeit dürfte in Anbetracht kritischer Planeten nicht zu weit getrieben sein, bei denen Glieder v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ ausserordentlich vergrössert erscheinen; und auch für die Grenzfälle der charakteristischen Planeten, wo $\delta_1 = \sqrt{m'}$ ist, werden derartige Glieder in V erster Ordnung.

---

6) Wir haben jetzt den charakteristischen und elementaren Teil der Funktion $\mathfrak{z}$, des gestörten Sinus der Breite, zu bestimmen. Wie aus der Differentialgleichung und aus der Entwicklung von Z hervorgeht, wird diese Funktion mindestens ersten Grades. Wir machen folgenden Ansatz für die Differentialgleichung unter Vernachlässigung der Glieder v. d. Ord. m'^2.

$$(70)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2(\mathfrak{z})}{dv^2} + (\mathfrak{z}) = Z_1 = \mathfrak{z}_1 \sin j \sin \mathfrak{v} + \mathfrak{z}_2 \sin j' \sin \mathfrak{v}_1 \\ \dfrac{d^2 \mathfrak{Z}}{dv^2} + \mathfrak{Z} = Z_1 - Q_0 \dfrac{d(\mathfrak{z})}{dv} = c^{-1}_{4\cdot 1\cdot 0} \sin j \sin(4w - \mathfrak{v}) + c^{-1}_{4\cdot 0\cdot 1} \sin j' \sin(4w - \mathfrak{v}_1). \end{cases}$$

In $Q_0 \frac{d(\mathfrak{z})}{dv}$ wird die Variabilität von $\sin j$ und σ vernachlässigt, was einem Fehler v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ im Integrale gleichkommt. Die Koefficienten lauten, da $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ aus dem vorigen Kapitel als Funktionen der ξ_1 und ξ_2 bekannt sind:

$$(71)\qquad c^{-1}_{4\cdot 0\cdot 0} = \varepsilon_1 - \tfrac{1}{2} r_1, \qquad c^{-1}_{4\cdot 0\cdot 1} = \varepsilon_2.$$

Integrieren wir mit Hülfe der Variation der Parameter, und bedenken wir, dass die exargumentalen Glieder immer um einen Grad höher sind als die Glieder, aus denen sie entstehen, sie also hier mindestens zweiten Grades sein müssen, so erhalten wir diesmal vollständig genau:

$$(71)\qquad \mathfrak{Z}_1 = \xi_1 \sin j \sin(4w - \mathfrak{v}) + \xi_2 \sin j' \sin(4w - \mathfrak{v}_1),$$

wo ist

www.libtool.com.cn

$$\xi_1 = \frac{-1}{4\delta_1(1+\delta_1)}\left[\varepsilon_1^{(0)} - \tfrac{1}{2}r_1^{(0)} + (\varepsilon_1^{I} - \tfrac{1}{2}r_1^{(1)})\beta_1 + \varepsilon_1^{(1)}\xi_1\right]$$

$$\xi_2 = \frac{-1}{4\delta_1(1+\delta_1)}\left[\varepsilon_2^{(0)} + \varepsilon_2^{I}\beta_1 + \varepsilon_2^{(1)}\xi_2\right],$$

und wo die ξ_n diesmal von vornherein leicht zu berechnen sind. Zur Ermittlung der B-Glieder verfahren wir ähnlich wie in (ϱ). Aus (10) folgt:

$$(72)\qquad \begin{cases} \sin j \dfrac{\sin}{\cos}(2v-\sigma) = \sin\iota \dfrac{\sin}{\cos}(2v-\vartheta) + \sum \sin\iota_n \dfrac{\sin}{\cos}(2v-\vartheta_n) \\ \sin j' \dfrac{\sin}{\cos}(2v-\sigma_1) = \sum \sin\iota_n' \dfrac{\sin}{\cos}(2v-\vartheta_n). \end{cases}$$

Da nun $\mathfrak{v} = v-\sigma$, $\mathfrak{v}_1 = v-\sigma_1$ ist, und da ferner ist:

$$\left.\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \end{matrix}\right\} = \pm\tfrac{1}{2}\mathfrak{z}_1\left[\int \sin j \frac{\sin}{\cos}(\mathfrak{v}+v)\,dv \pm \int \sin j \frac{\sin}{\cos}(\mathfrak{v}-v)\,dv\right]$$
$$\pm\tfrac{1}{2}\mathfrak{z}_2\left[\int \sin j' \frac{\sin}{\cos}(\mathfrak{v}_1+v)\,dv \pm \int \sin j' \frac{\sin}{\cos}(\mathfrak{v}_1-v)\,dv\right],$$

wo g_1 und g_2 jetzt eine andere Bedeutung haben als in ϱ, so folgt, wenn man (72) hier einführt, integriert und dabei bedenkt, dass $(\mathfrak{z}) = g_1\sin v - g_2\cos v$ ist:

$$(\mathfrak{z}) = \frac{-1}{\tau(2+\tau)}\mathfrak{z}_1\sin\iota\sin(v-\vartheta) - \sum\frac{1}{\tau_n(2+\tau_n)}\left[\mathfrak{z}_1\sin\iota_n + \mathfrak{z}_2\sin\iota_n'\right]\sin(v-\vartheta_n).$$

Andrerseits sollte sein:

$$(73)\qquad (\mathfrak{z}) = \sin j\sin\mathfrak{v} = \sin\iota\sin(v-\vartheta) + \sum\sin\iota_n\sin(v-\vartheta_n).$$

Durch Koefficientenvergleichung folgt

näherungsweise: $\tau = -\frac{\mathfrak{z}_1}{2}$; $\sin\iota_n = -\frac{\mathfrak{z}_2\sin\iota_n'}{2(\tau_n-\tau)}$,

streng dagegen:

$$(73)\qquad \tau(2+\tau) = -\mathfrak{z}_1;\quad \sin\iota_n = \frac{\mathfrak{z}_2\sin\iota_n'}{2(\tau-\tau_n)\left[1+\dfrac{\tau+\tau_n}{2}\right]}.$$

Weiter ist:

$$(73a)\qquad \tau_n = \mu_2\tau_n' + c - \mu_2 c',\quad \Theta_n = \Theta_n' - \tau_n' B,\quad \vartheta_n = \Theta_n - \tau_n v.$$

Die τ_n' und $\sin\iota_n'$ liegen aus der Theorie der grossen Planeten als bekannt vor. Da hier keine exargumentalen Glieder auftreten können, so haben wir $(\mathfrak{z})$ wie $\mathfrak{z}_1$ bis auf die Zusatzglieder in definitiver Form ermittelt, und mit einem Fehler v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ im Integral.

www.libtool.com.cn

§ 2. Die Glieder zweiten Grades.

7) Wir wollen jetzt die charakteristischen und auch langperiodisch elementaren Glieder in S_2 ermitteln. Wir erhalten sie mit hinreichender Genauigkeit, wenn wir die Differentialgleichung folgendermassen ansetzen:

$$\frac{dS}{dv} = -Q_2 - 3S_0Q_2 - 3S_1Q_1 - 3S_2Q_0 - \tfrac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv},$$

indem hier in S_1 und S_2, soweit diese Grössen in Q multipliziert sind, nur die charakteristischen Glieder zu nehmen sind. Das letzte Glied wollen wir vorläufig noch weglassen, da es nur A-Glieder hervorruft. Ausserdem wollen wir uns erinnern, dass durch Q_2 und S_2 schon der Neigungsteil hier auftreten wird, dass also das Integral doppelt soviel Glieder enthalten wird als bei Herrn Ludendorff. Wir wollen auch hier die C-Glieder bis rein zweiter Ordnung in der Differentialgleichung bilden. Es ergiebt sich dann analog dem ersten Grade das Resultat:

$$\text{pars } T_c \frac{dS_2}{dv} = -3[S_0Q_2 + S_2Q_0 + S_1Q_1] = 0.$$

Die C-Glieder werden, abgesehen von dem konstanten Teile in S_0, soweit sie in $\frac{dS}{dv}$ rein zweiter Ordnung sind, null bis auf Glieder v. d. Ord. $\delta_1 m'^2$, also im Integral bis auf m'^2. Bei der Zusammensetzung zu C-Gliedern sind jedoch in S und Q nur die Vielfachen des Arguments bis $n = 6$ incl. berücksichtigt worden.

Wir haben demnach die C-Glieder in S_2 wieder bis zu Grössen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ incl. berechnet. Für den Neigungsteil folgt mit derselben Genauigkeit:

$$\text{pars } T_c \frac{dS_2}{dv} = -3[S_0\overline{Q}_2 + \overline{S}_2Q_0] = 0.$$

Komponiert man wieder die periodischen Aggregate zu charakteristischen Gliedern und integriert sofort, so ergiebt sich:

(74) $\text{pars } S_2 =$

$$+a_7\eta^2\cos 2w \quad +a_{11}\eta^2\cos(2w-2\mathrm{v}) \quad +a_{14}\eta^2\cos(4w-2\mathrm{v}) \quad +a_{17}\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v})$$
$$+a_8\eta\eta'\cos(2w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)+a_{12}\eta\eta'\cos(2w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)+a_{15}\eta\eta'\cos(4w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)+a_{18}\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$$
$$+a_9\eta\eta'\cos(2w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1)+a_{13}\eta'^2\cos(2w-2\mathrm{v}_1) \quad +a_{16}\eta'^2\cos(4w-2\mathrm{v}_1) \quad +a_{19}\eta'^2\cos(6w-2\mathrm{v}_1)$$
$$+a_{10}\eta'^2\cos 2w$$

www.libtool.com.cn

$$+a_{23}\sin^2 j\cos 2w + a_{24}\sin j\sin j'\cos(2w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) + a_{25}\sin j\sin j'\cos(2w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) + a_{26}\sin^2 j'\cos 2w$$
$$+a_{27}\sin^2 j\cos(2w-2\mathfrak{v}) \quad +a_{30}\sin^2 j\cos(4w-2\mathfrak{v}) \quad +a_{33}\sin^2 j\cos(6w-2\mathfrak{v})$$
$$+a_{28}\sin j\sin j'\cos(2w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) + a_{31}\sin j\sin j'\cos(4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) + a_{34}\sin j\sin j'\cos(6w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)$$
$$+a_{29}\sin^2 j'\cos(2w-2\mathfrak{v}_1) \quad +a_{32}\sin^2 j'\cos(4w-2\mathfrak{v}_1) \quad +a_{35}\sin^2 j'\cos(6w-2\mathfrak{v}_1),$$

wo die Koefficienten sich zusammensetzen aus:

$$(75)\quad \begin{cases} a_7 = \frac{1}{1+\delta_1}[q_7+\frac{3}{2}(q_1+q_4)\alpha_2], & a_{11} = \frac{-1}{1-\delta_1}[q_{11}-\frac{3}{2}q_1\alpha_{16}-\frac{3}{2}q_1\alpha_2], \\ a_8 = \frac{1}{1+\delta_1}[q_8+\frac{3}{2}(q_1\alpha_3+q_5\alpha_2)], & a_{12} = \frac{-1}{1-\delta_1}[q_{12}-\frac{3}{2}q_1\alpha_{15}-\frac{3}{2}(q_1\alpha_3+q_3\alpha_2)], \\ a_9 = \frac{1}{1+\delta_1}[q_9+\frac{3}{2}(q_2\alpha_2+q_4\alpha_3)], & a_{13} = \frac{-1}{1-\delta_1}[q_{13}-\frac{3}{2}q_1\alpha_{16}-\frac{3}{2}q_2\alpha_2], \\ a_{10} = \frac{1}{1+\delta_1}[q_{10}+\frac{3}{2}(q_2+q_5)\alpha_3], & \\ \alpha_{14} = \frac{1}{2\delta_1}[q_{14}(1+2p_0^{(0)})+\frac{3}{2}q_2\alpha_2], & a_{17} = \frac{1}{1+3\delta_1}[q_{17}+\frac{3}{2}q_1\alpha_{14}+\frac{3}{2}q_4\alpha_2], \\ \alpha_{15} = \frac{1}{2\delta_1}[q_{15}(1+2p_0^{(0)})+\frac{3}{2}(q_3\alpha_2+q_2\alpha_3)], & a_{18} = \frac{1}{1+3\delta_1}[q_{18}+\frac{3}{2}q_1\alpha_{15}+\frac{3}{2}(q_4\alpha_3+q_5\alpha_2)], \\ \alpha_{16} = \frac{1}{2\delta_1}[q_{16}(1+2p_0^{(0)})+\frac{3}{2}q_3\alpha_3], & a_{19} = \frac{1}{1+3\delta_1}[q_{19}+\frac{3}{2}q_1\alpha_{16}+\frac{3}{2}q_5\alpha_3]. \end{cases}$$

Diese a_k-Koefficienten sind wieder Funktionen der β_k, und soweit diese zweiten Grades sind, noch unbekannt. Die β_k ergeben sich später analog dem ersten Grade aus gewissen Gleichungen, und nach ihrer Ermittlung können wir erst die a_k berechnen.

Hierzu kommen noch die exargumentalen Zusätze und die aus der Variabilität von η, Π etc. in den C-Gliedern entstehenden Zusatzglieder, was wir, wie schon erwähnt, im nächsten Kapitel nachholen werden. Die Koefficienten der Neigungsteile enthalten auch noch ξ_1 und ξ_2, welche aus den Gliedern ersten Grades als ermittelt vorliegen. Sie werden:

$$(76)\quad \begin{cases} a_{22} = \frac{1}{1+\delta_1}q_{22}, \quad a_{24} = \frac{1}{1+\delta_1}q_{24}, \quad a_{25} = \frac{1}{1+\delta_1}q_{25}, \quad a_{26} = \frac{1}{1+\delta_1}q_{26}, \\ a_{27} = \frac{-1}{1-\delta_1}[q_{27}-\frac{3}{2}q_1\alpha_{30}], \quad \alpha_{30} = \frac{q_{30}}{2\delta_1}(1+2p_0^{(0)}), \quad a_{33} = \frac{1}{1+3\delta_1}[q_{33}+\frac{3}{2}q_1\alpha_{30}], \\ a_{28} = \frac{-1}{1-\delta_1}[q_{28}-\frac{3}{2}q_1\alpha_{31}], \quad \alpha_{31} = \frac{q_{31}}{2\delta_1}(1+2p_0^{(0)}), \quad a_{34} = \frac{1}{1+3\delta_1}[q_{34}+\frac{3}{2}q_1\alpha_{31}], \\ a_{29} = \frac{-1}{1-\delta_1}[q_{29}-\frac{3}{2}q_1\alpha_{32}], \quad \alpha_{32} = \frac{q_{32}}{2\delta_1}(1+2p_0^{(0)}), \quad a_{35} = \frac{1}{1+3\delta_1}[q_{35}+\frac{3}{2}q_1\alpha_{32}], \end{cases}$$

Den konstanten Teil, soweit er zweiten Grades ist, können wir erst angeben, wenn c_0 bekannt ist. Dagegen wollen wir hier noch die A-Glieder be-

www.libtool.com.cn

trachten. Herr Ludendorff hat in seiner Dissertationsschrift nachgewiesen, dass $T_a S_2$ keine Glieder v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1^2}, \frac{m'}{\delta_1}, \frac{m'^2}{\delta_1^3}, \frac{m'^3}{\delta_1^5}$ enthält, insofern man die η und Π als konstant ansieht, was hier noch der Fall ist. $T_a S_2$ kann nur Glieder v. d. Ord. m', $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$, $\frac{m'^3}{\delta_1^4}$ etc. enthalten. Diese sind einmal mindestens zweiter Ordnung und nur durch die Häufung kleiner Divisoren vergrössert, und dann nähern sich die A-Glieder fast dem Charakter konstanter Grössen. Aus diesem Grunde wollen wir ebenfalls $T_a S_2$ vernachlässigen, der hierdurch entstehende Fehler wird sich in W derart bemerkbar machen, dass A einen anderen Wert erhält, und ebenso n im Laufe grösserer Zeiträume von der wahren Bewegung eine der Zeit proportionale Abweichung erleiden wird. Die Sekularvariation der Konstanten soll dies dann ausgleichen.

Für S_2, soweit es aus der Neigung herrührt, habe ich die A-Glieder untersucht und gefunden, dass sich nur in der Differentialgleichung der Teil, welcher rein erster Ordnung ist, aufhebt, dass also $(T_a S_2)_{\text{Neigung}} = \frac{m'}{\delta_1}$ wird. Glieder v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1^2}$ können hier nicht vorkommen. Wir wollen $(T_a S_2)_{\text{Neigung}}$ nicht vernachlässigen, damit nachher in $T_a W$ nicht Glieder v. d. Ord. $\frac{1}{\delta_1}$ vernachlässigt werden, obwohl es selbst bei kritischen Planeten wegen der geringen Veränderlichkeit dieser Glieder wenig ausmachen würde. Es lautet:

$$T_a \frac{dS_2}{dv} = q_1 \sin j \sin j' \sin(\sigma - \sigma_1). \tag{76}$$

Die Integration selbst wollen wir im nächsten Kapitel geben.

---

8) Die Differentialgleichung für R_2 schreibt sich so:

$$\frac{d^2 R_2}{dv^2} + R_2 = 2S_2 - P_2 + S_1^2 + 2S_0 S_2 - 2S_2 P_0 - 2S_1 P_1 - Q_1 \frac{d(\varrho)}{dv} - 2S_1 Q_0 \frac{d(\varrho)}{dv}$$
$$- 2\frac{d\eta^2}{dv}\frac{dR_0}{dv} - Q_0 \frac{dR_2}{dv} - Q_1 \frac{dR_1}{dv} - Q_2 \frac{dR_0}{dv}.$$

In dem Ansatz für $\frac{dR}{dv}$ lasse ich die C-Glieder fort, da sie wegen des Faktors δ_1 rein zweiter Ordnung werden, ebenso vernachlässige ich hier in den aus dem Argument heraustretenden Faktoren δ_1 gegenüber der Einheit, da der Fehler zweiter Ordnung wird, und ausserdem die Veränderlichkeit von η und Π in $\frac{d(\varrho)}{dv}$ wie in $\frac{dR}{dv}$ mit derselben Genauigkeit. Für $\frac{d\eta^2}{dv}$ bedienen wir uns nicht des

www.libtool.com.cn

von Herrn Brendel gegebenen Ausdrucks, sondern gehen in der Genauigkeit noch etwas weiter. In Br. pag. 109 wird unter Vernachlässigung der Glieder rein zweiter Ordnung gesetzt:

$$T_0\left[\left(\frac{d^2(\varrho)}{dv^2}+(\varrho)\right)\frac{d(\varrho)}{dv}\right] = \tfrac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv}.$$

Nun war nach (60):

$$\frac{d^2(\varrho)}{dv^2}+(\varrho) = b^{+1}_{0\cdot1\cdot0}\,\eta\cos\mathrm{v}+b^{+1}_{0\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos\mathrm{v}_1,$$

$$\frac{d(\varrho)}{dv} = -\eta\sin\mathrm{v},$$

mithin unter Vernachlässigung der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$

$$(77)\qquad \frac{d\eta^2}{dv} = \mathfrak{p}_1\eta^2\sin 2\mathrm{v}+(\mathfrak{p}_2-2\mathfrak{q}_2)\eta\eta'\sin(\mathrm{v}+\mathrm{v}_1)+(\mathfrak{p}_2-2\mathfrak{q}_2)\eta\eta'\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1).$$

Der genauere Wert $\left(\text{Fehler } m'^2 \text{ resp. } \frac{m'^2}{\delta_1}\right)$ ist dagegen:

$$(77a)\qquad \frac{d\eta^2}{dv} = -b^{+1}_{0\cdot1\cdot0}\,\eta^2\sin 2\mathrm{v}-b^{+1}_{0\cdot0\cdot1}\,\eta\eta'\sin(\mathrm{v}+\mathrm{v}_1)-b^{+1}_{0\cdot0\cdot1}\,\eta\eta'\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1).$$

Herr Brendel sowohl wie Herr Ludendorff vernachlässigen die ersten beiden Glieder, was für kritische Planeten nicht gerechtfertigt ist; denn nehmen wir z. B.

$$-2\frac{d\eta^2}{dv}\frac{dR_0}{dv} = -2b^{+1}_{0\cdot1\cdot0}\,\eta^2\sin 2\mathrm{v}\,\beta_1\sin 2w = -b^{+1}_{0\cdot1\cdot0}\,\beta_1\,\eta^2\cos(2w-2\mathrm{v}),$$

so wird schon in der Differentialgleichung ein Glied $\frac{m'^2}{\delta_1}$, also im Integral $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ fortgelassen. Multiplizieren wir aus und suchen wir uns die charakteristischen Glieder heraus, so folgt:

$$(78)\qquad \frac{d^2R_2}{dv^2}+R_2 =$$

$$b_{2\cdot2\cdot0}\,\eta^2\cos 2w+b^{+1}_{2\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(2w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)+b^{-1}_{2\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(2w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1)+b_{2\cdot0\cdot2}\,\eta'^2\cos 2w$$

$$\begin{aligned}
&+b^{-2}_{2\cdot2\cdot0}\,\eta^2\cos(2w-2\mathrm{v}) && +b^{-2}_{4\cdot2\cdot0}\,\eta^2\cos(4w-2\mathrm{v}) && +b^{-2}_{6\cdot2\cdot0}\,\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v})\\
&+b^{-2}_{2\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(2w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && +b^{-2}_{4\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(4w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && +b^{-2}_{6\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\
&+b^{-2}_{2\cdot0\cdot2}\,\eta'^2\cos(2w-2\mathrm{v}_1) && +b^{-2}_{4\cdot0\cdot2}\,\eta'^2\cos(4w-2\mathrm{v}_1) && +b^{-2}_{6\cdot0\cdot2}\,\eta'^2\cos(6w-2\mathrm{v}_1)
\end{aligned}$$

$$+\overline{b}_{2\cdot2\cdot0}\sin^2 j\cos 2w+\overline{b}^{+1}_{2\cdot1\cdot1}\sin j\sin j'\cos(2w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)+\overline{b}^{-1}_{2\cdot1\cdot1}\sin j\sin j'\cos(2w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1)+\overline{b}_{2\cdot0\cdot2}\sin^2 j'\cos 2w$$

$$\begin{aligned}
&+\overline{b}^{-2}_{2\cdot2\cdot0}\sin^2 j\cos(2w-2\mathfrak{v}) && +\overline{b}^{-2}_{4\cdot2\cdot0}\sin^2 j\cos(4w-2\mathfrak{v}) && +\overline{b}^{-2}_{6\cdot2\cdot0}\sin^2 j\cos(6w-2\mathfrak{v})\\
&+\overline{b}^{-2}_{2\cdot1\cdot1}\sin j\sin j'\cos(2w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && +\overline{b}^{-2}_{4\cdot1\cdot1}\sin j\sin j'\cos(4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && +\overline{b}^{-2}_{6\cdot1\cdot1}\sin j\sin j'\cos(6w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)\\
&+\overline{b}^{-2}_{2\cdot0\cdot2}\sin^2 j'\cos(2w-2\mathfrak{v}_1) && +\overline{b}^{-2}_{4\cdot0\cdot2}\sin^2 j'\cos(4w-2\mathfrak{v}_1) && +\overline{b}^{-2}_{6\cdot0\cdot2}\sin^2 j'\cos(6w-2\mathfrak{v}_1).
\end{aligned}$$

www.libtool.com.cn

Die A-Glieder werden:

$$+b_{0\cdot2\cdot0}\,\eta^2+b^{+1}_{0\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)+b_{0\cdot0\cdot2}\,\eta'^2$$
$$+\overline{b}_{0\cdot2\cdot0}\sin^2 j+\overline{b}^{+1}_{0\cdot1\cdot1}\sin j\sin j'\cos(\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)+\overline{b}_{0\cdot0\cdot2}\sin^2 j'.$$

Die Koefficienten haben folgende Werte:

(79)
$$b_{2\cdot2\cdot0}=2a_7-p_7-\tfrac{1}{2}(q_3-r_3)+\tfrac{1}{2}\beta_1A_{4\cdot2\cdot0}+\alpha_3(a_1-\mathfrak{p}_1+\tfrac{1}{2}r_1+a_4-p_4)+\tfrac{1}{2}\beta_4(q_3+r_4)+\tfrac{1}{2}r_1\beta_7$$
$$b^{+1}_{2\cdot1\cdot1}=2a_8-p_8-\tfrac{1}{2}q_3+\beta_1(b^{+1}_{0\cdot0\cdot1}-\tfrac{1}{2}q_4+\tfrac{1}{2}A^{+1}_{4\cdot1\cdot1})+\alpha_2(a_5-p_5)+\alpha_3(a_1-\mathfrak{p}_1)+\tfrac{1}{2}\beta_4r_5+\tfrac{1}{2}\beta_5q_3+\tfrac{1}{2}r_1\beta_8$$
$$b^{-1}_{2\cdot1\cdot1}=2a_9-p_9+\tfrac{1}{2}r_3+\beta_1(-b^{+1}_{0\cdot0\cdot1}+\tfrac{1}{2}q_4+\tfrac{1}{2}A^{-1}_{4\cdot1\cdot1})+\alpha_2(a_2-\mathfrak{p}_2)+\alpha_3(\tfrac{1}{2}r_1+a_4-p_4)+\tfrac{1}{2}\beta_4q_3+\tfrac{1}{2}\beta_5r_4+\tfrac{1}{2}r_1\beta_8$$
$$b_{2\cdot0\cdot2}=2a_{10}-p_{10}+\tfrac{1}{2}\beta_1A_{4\cdot0\cdot2}+\alpha_3(a_2-\mathfrak{p}_2+a_5-p_5)+\tfrac{1}{2}\beta_5(q_3+r_5)+\tfrac{1}{2}r_1\beta_{10}$$

$$b^{-2}_{2\cdot2\cdot0}=2a_{11}-p_{11}+\tfrac{1}{2}q_3+\beta_1(-b^{+1}_{0\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}q_{14})+\alpha_2(a_1-\mathfrak{p}_1)+\tfrac{1}{2}\beta_4r_3+\alpha_{14}(a_1-p_1)+\tfrac{1}{2}r_1\beta_{17}$$
$$b^{-2}_{2\cdot1\cdot1}=2a_{12}-p_{12}+\tfrac{1}{2}q_8+\beta_1(-b^{+1}_{0\cdot0\cdot1}+\tfrac{1}{2}q_{15}+\tfrac{1}{2}A^{+2}_{0\cdot1\cdot1})+\alpha_2(a_2-\mathfrak{p}_2)+\alpha_3(a_1-\mathfrak{p}_1)+\tfrac{1}{2}\beta_4r_3+\tfrac{1}{2}\beta_5r_2+\alpha_{15}(a_1-p_1)+\tfrac{1}{2}r_1\beta_{18}$$
$$b^{-2}_{2\cdot0\cdot2}=2a_{13}-p_{13}+\tfrac{1}{2}\beta_1q_{16}+\alpha_3(a_2-\mathfrak{p}_2)+\tfrac{1}{2}\beta_5r_3+\alpha_{16}(a_1-p_1)+\tfrac{1}{2}r_1\beta_{19}$$

$$b^{-2}_{4\cdot2\cdot0}=2\alpha_{14}(1+\tfrac{1}{3}p_0^{(0)})-p_{14}+\tfrac{1}{2}q_4-\tfrac{1}{2}\beta_1(q_{11}-q_{17})+\tfrac{1}{2}\alpha_2(q_1-2p_2+\alpha_2)+\tfrac{1}{2}\beta_4q_1+\tfrac{1}{2}q_1(\beta_{11}+\beta_{17})$$
$$b^{-2}_{4\cdot1\cdot1}=2\alpha_{15}(1+\tfrac{1}{3}p_0^{(0)})-p_{15}+\tfrac{1}{2}q_5-\tfrac{1}{2}\beta_1(q_{12}-q_{18})-\alpha_2(p_3-\tfrac{1}{2}\alpha_3)+\tfrac{1}{2}\alpha_3(q_1-2p_2+\alpha_2)+\tfrac{1}{2}\beta_4q_2+\tfrac{1}{2}\beta_5q_1+\tfrac{1}{2}q_1(\beta_{12}+\beta_{18})$$
$$b^{-2}_{4\cdot0\cdot2}=2\alpha_{16}(1+\tfrac{1}{3}p_0^{(0)})-p_{16}-\tfrac{1}{2}\beta_1(q_{13}-q_{19})-\alpha_3(p_3-\tfrac{1}{2}\alpha_3)+\tfrac{1}{2}\beta_5q_2+\tfrac{1}{2}q_1(\beta_{13}+\beta_{19})$$

$$b^{-2}_{6\cdot2\cdot0}=2a_{17}-p_{17}+\tfrac{1}{2}r_4-\tfrac{1}{2}\beta_1(q_{14}-A^{-2}_{6\cdot2\cdot0})+\alpha_2(\tfrac{1}{2}r_1+a_4-p_4)-\tfrac{1}{2}\beta_4q_2+\tfrac{1}{2}r_1\beta_{11}+\alpha_{14}(a_1-p_1)$$
$$b^{-2}_{6\cdot1\cdot1}=2a_{18}-p_{18}+\tfrac{1}{2}r_5-\tfrac{1}{2}\beta_1(q_{15}-A^{-2}_{6\cdot1\cdot1})+\alpha_2(a_5-p_5)+\alpha_3(\tfrac{1}{2}r_1+a_4-p_4)-\tfrac{1}{2}\beta_4q_3-\tfrac{1}{2}\beta_5q_2+\tfrac{1}{2}r_1\beta_{12}+\alpha_{15}(a_1-p_1)$$
$$b^{-2}_{6\cdot0\cdot2}=2a_{19}-p_{19}-\tfrac{1}{2}\beta_1(q_{16}-A^{-2}_{6\cdot0\cdot2})+\alpha_3(a_5-p_5)-\tfrac{1}{2}\beta_5q_3+\tfrac{1}{2}r_1\beta_{13}+\alpha_{16}(a_1-p_1)$$

$$\overline{b}_{2\cdot2\cdot0}=2a_{23}-p_{23}+\tfrac{1}{2}\beta_1\overline{A}_{4\cdot2\cdot0}+\tfrac{1}{2}r_1\beta_{23}$$
$$\overline{b}^{+1}_{2\cdot1\cdot1}=2a_{24}-p_{24}+\tfrac{1}{2}\beta_1\overline{A}^{+1}_{4\cdot1\cdot1}+\tfrac{1}{2}r_1\beta_{25}-\tfrac{1}{2}\beta_1q_7$$
$$\overline{b}^{-1}_{2\cdot1\cdot1}=2a_{25}-p_{25}+\tfrac{1}{2}\beta_1\overline{A}^{-1}_{4\cdot1\cdot1}+\tfrac{1}{2}r_1\beta_{24}+\tfrac{1}{2}\beta_1q_7$$
$$\overline{b}_{2\cdot0\cdot2}=2a_{26}-p_{26}+\tfrac{1}{2}\beta_1\overline{A}_{4\cdot0\cdot2}+\tfrac{1}{2}r_1\beta_{26}$$

$$\overline{b}^{-2}_{2\cdot2\cdot0}=2a_{27}-p_{27}+\tfrac{1}{2}\beta_1q_{20}+\alpha_{20}(a_1-p_1)+\tfrac{1}{2}r_1\beta_{23}$$
$$\overline{b}^{-2}_{2\cdot1\cdot1}=2a_{28}-p_{28}+\tfrac{1}{2}\beta_1q_{21}+\alpha_{21}(a_1-p_1)+\tfrac{1}{2}r_1\beta_{24}$$
$$\overline{b}^{-2}_{2\cdot0\cdot2}=2a_{29}-p_{29}+\tfrac{1}{2}\beta_1q_{22}+\alpha_{22}(a_1-p_1)+\tfrac{1}{2}r_1\beta_{25}$$

$$\overline{b}^{-2}_{4\cdot2\cdot0}=2\alpha_{20}(1+\tfrac{1}{3}p_0^{(0)})-p_{30}-\tfrac{1}{2}\beta_1(q_{27}-q_{23})+\tfrac{1}{2}q_1(\beta_{27}+\beta_{23})$$
$$\overline{b}^{-2}_{4\cdot1\cdot1}=2\alpha_{21}(1+\tfrac{1}{3}p_0^{(0)})-p_{31}-\tfrac{1}{2}\beta_1(q_{28}-q_{24})+\tfrac{1}{2}q_1(\beta_{28}+\beta_{24})$$
$$\overline{b}^{-2}_{4\cdot0\cdot2}=2\alpha_{22}(1+\tfrac{1}{3}p_0^{(0)})-p_{32}-\tfrac{1}{2}\beta_1(q_{29}-q_{25})+\tfrac{1}{2}q_1(\beta_{29}+\beta_{25})$$

$$\overline{b}^{-2}_{6\cdot2\cdot0}=2a_{33}-p_{33}-\tfrac{1}{2}\beta_1(q_{30}-\overline{A}^{-2}_{6\cdot2\cdot0})+\alpha_{20}(a_1-p_1)+\tfrac{1}{2}r_1\beta_{27}$$
$$\overline{b}^{-2}_{6\cdot1\cdot1}=2a_{34}-p_{34}-\tfrac{1}{2}\beta_1(q_{31}-\overline{A}^{-2}_{6\cdot1\cdot1})+\alpha_{21}(a_1-p_1)+\tfrac{1}{2}r_1\beta_{28}$$
$$\overline{b}^{-2}_{6\cdot0\cdot2}=2a_{35}-p_{35}-\tfrac{1}{2}\beta_1(q_{32}-\overline{A}^{-2}_{6\cdot0\cdot2})+\alpha_{22}(a_1-p_1)+\tfrac{1}{2}r_1\beta_{29}$$

$$b_{0\cdot2\cdot0}=-\mathfrak{p}_3+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1}{2}\alpha_2^2+\alpha_2(\tfrac{1}{2}q_1-p_2)+\tfrac{1}{2}q_2\beta_2+\tfrac{1}{2}q_4\beta_4+\tfrac{1}{2}q_7\beta_1+\tfrac{1}{2}q_1\beta_7$$
$$b^{+1}_{0\cdot1\cdot1}=-\mathfrak{p}_4+\tfrac{1}{2}q_2+\alpha_2\alpha_3-\alpha_2p_3+\alpha_3(\tfrac{1}{2}q_1-p_2)+\tfrac{1}{2}q_3\beta_2+\tfrac{1}{2}q_2\beta_3+\tfrac{1}{2}q_5\beta_4+\tfrac{1}{2}q_4\beta_5+\tfrac{1}{2}\beta_1(q_6+q_9)+\tfrac{1}{2}q_1(\beta_8+\beta_9)$$
$$b_{0\cdot0\cdot2}=-\mathfrak{p}_5+\tfrac{1}{2}\alpha_3^2-\alpha_3p_3+\tfrac{1}{2}q_3\beta_3+\tfrac{1}{2}q_5\beta_5+\tfrac{1}{2}\beta_1q_{10}+\tfrac{1}{2}\beta_{10}q_1$$

$$\overline{b}_{0\cdot2\cdot0}=-\mathfrak{p}_6+\tfrac{1}{2}\beta_1q_{23}+\tfrac{1}{2}q_1\beta_{23}$$
$$\overline{b}^{+1}_{0\cdot1\cdot1}=-\mathfrak{p}_7+\tfrac{1}{2}\beta_1(q_{24}+q_{25})+\tfrac{1}{2}q_1(\beta_{24}+\beta_{25})$$
$$\overline{b}_{0\cdot0\cdot2}=-\mathfrak{p}_8+\tfrac{1}{2}\beta_1q_{26}+\tfrac{1}{2}q_1\beta_{26}.$$

Hier ist $2T_aS_2$ in der Differentialgleichung fortgelassen, da es später berücksichtigt wird.

www.libtool.com.cn

In den C-Gliedern habe ich solche v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ mitgenommen, die also auch im Integral von derselben Ordnung werden. Es geschah dies in Hinsicht auf W, wo sie dann v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ werden. Auch habe ich die A-Glieder bis auf Grössen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ incl. gerechnet, trotzdem sie hier keine kleinen Divisoren durch die Integration erhalten, nur um die konstanten Teile a_0, b_0 möglichst genau zu erhalten, und um genaue Rechenschaft über den Fehler zu bekommen, der durch Vernachlässigung von $c_0 = a_0 - 2b_0$ entsteht.

Integriert man mit Hilfe der Formeln für die Variation der Parameter und unter Vernachlässigung des $\overline{V}$ in den Argumenten, sowie der Variabilität von η, Π etc., so kann man das Integral gemäss der Formel (37) schreiben. Die Integration der A-Glieder soll erst im nächsten Kapitel erfolgen, und damit auch die Ermittlung des Teiles von b_0, welcher zweiten Grades ist. Die β_k haben folgende Werte:

(80)
$$\beta_7 = \frac{-b_{2\cdot2\cdot0}}{\delta_1(2+\delta_1)}, \quad \beta_{11} = \frac{b^{-2}_{2\cdot2\cdot0}}{\delta_1(2-\delta_1)}, \quad \beta_{14} = \frac{b^{-2}_{4\cdot2\cdot0}}{1-4\delta_1^2}, \quad \beta_{17} = \frac{-b^{-2}_{6\cdot2\cdot0}}{3\delta_1(2+3\delta_1)},$$
$$\beta_8 = \frac{-b^{+1}_{2\cdot1\cdot1}}{\delta_1(2+\delta_1)}, \quad \beta_{12} = \frac{b^{-2}_{2\cdot1\cdot1}}{\delta_1(2-\delta_1)}, \quad \beta_{15} = \frac{b^{-2}_{4\cdot1\cdot1}}{1-4\delta_1^2}, \quad \beta_{18} = \frac{-b^{-2}_{6\cdot1\cdot1}}{3\delta_1(2+3\delta_1)},$$
$$\beta_9 = \frac{-b^{-1}_{2\cdot1\cdot1}}{\delta_1(2+\delta_1)}, \quad \beta_{13} = \frac{b^{-2}_{2\cdot0\cdot2}}{\delta_1(2-\delta_1)}, \quad \beta_{16} = \frac{b^{-2}_{4\cdot0\cdot2}}{1-4\delta_1^2}, \quad \beta_{19} = \frac{-b^{-2}_{6\cdot0\cdot2}}{3\delta_1(2+3\delta_1)},$$
$$\beta_{10} = \frac{-b_{2\cdot0\cdot2}}{\delta_1(2+\delta_1)},$$

$$\beta_{23} = \frac{-\overline{b}_{2\cdot2\cdot0}}{\delta_1(2+\delta_1)}, \quad \beta_{27} = \frac{\overline{b}^{-2}_{2\cdot2\cdot0}}{\delta_1(2-\delta_1)}, \quad \beta_{30} = \frac{\overline{b}^{-2}_{4\cdot2\cdot0}}{1-4\delta_1^2}, \quad \beta_{33} = \frac{-\overline{b}^{-2}_{6\cdot2\cdot0}}{3\delta_1(2+3\delta_1)},$$
$$\beta_{24} = \frac{-\overline{b}^{+1}_{2\cdot1\cdot1}}{\delta_1(2+\delta_1)}, \quad \beta_{28} = \frac{\overline{b}^{-2}_{2\cdot1\cdot1}}{\delta_1(2-\delta_1)}, \quad \beta_{31} = \frac{\overline{b}^{-2}_{4\cdot1\cdot1}}{1-4\delta_1^2}, \quad \beta_{34} = \frac{-\overline{b}^{-2}_{6\cdot1\cdot1}}{3\delta_1(2+3\delta_1)},$$
$$\beta_{25} = \frac{-\overline{b}^{-1}_{2\cdot1\cdot1}}{\delta_1(2+\delta_1)}, \quad \beta_{29} = \frac{\overline{b}^{-2}_{2\cdot0\cdot2}}{\delta_1(2-\delta_1)}, \quad \beta_{32} = \frac{\overline{b}^{-2}_{4\cdot0\cdot2}}{1-4\delta_1^2}, \quad \beta_{35} = \frac{-\overline{b}^{-2}_{6\cdot0\cdot2}}{3\delta_1(2+3\delta_1)},$$
$$\beta_{26} = \frac{-\overline{b}_{2\cdot0\cdot2}}{\delta_1(2+\delta_1)}.$$

Definitiv sind die Werte von β_{30}, β_{31}, β_{32}, die andern erhalten noch exargumentale Zusätze. Die β_k kommen auch auf der rechten Seite vor, und es ergeben sich zu ihrer Bestimmung je drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Ueber ihre Auflösung und die Gleichheit der Koefficienten der Unbekannten wird nachher gehandelt werden.

Nachdem die β_k bekannt sind, können erst die a_k gerechnet werden, welche ja in Funktion der β_k gegeben sind.

www.libtool.com.cn

9) Wir wollen jetzt den langperiodischen und kurzperiodischen charakteristischen Teil von W, soweit er zweiten Grades ist, herstellen. In $\frac{dK_2}{dv}$ brauchen wir nur die Glieder bis m' mitzunehmen, in $\frac{dV_2}{dv}$ wollen wir sie dagegen bis $\frac{m'^2}{\delta_1}$ mitnehmen, da δ_1 hier als Integrationsdivisor auftritt. Wir sind dann in der Lage, weil wir die Genauigkeitsgrenze in S_2 und R_2 entsprechend gewählt haben, $\frac{dV_2}{dv}$ genau bis auf Grössen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ incl. herzustellen. Die Differentialgleichung lautet:

$$\begin{aligned}\frac{dW_2}{dv} = {} & S_2 - 2R_2 - 2R_0S_2 - 2R_1S_1 - 2R_2S_0 + 6R_0R_2 + 3R_1^2 \\ & + [6R_1 - 2S_1 - 24R_0R_1 + 6R_0S_1 + 6R_1S_0]\,\eta\cos\mathrm{v} - 3\eta^2R_0 \\ & + [\tfrac{3}{2}S_0 - 6R_0]\,\eta^2\cos 2\mathrm{v} - \frac{d\Xi}{dv}.\end{aligned}$$

Die Funktion Ξ lassen wir vorläufig fort, da sie bequemer zusammen mit den Zusatzgliedern ermittelt wird. Wir wollen hier ausser den charakteristischen Gliedern noch die koordinierten aussuchen. Ferner wollen wir den konstanten Teil mit einer b_0 entsprechenden Genauigkeit, d. h. bis auf Grössen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ incl. berechnen. Die elementaren Glieder werden wir jedoch nur mit Einschluss der Glieder $\frac{m'}{\delta_1}$ resp. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ und m' berechnen, da wir nur mit dieser Genauigkeit T_aS_2 und T_aR_2 ermittelt haben. Auch sollen die A-Glieder noch nicht integriert werden. Wir schreiben:

$$\begin{aligned}(81)\qquad T_a\frac{dV_2}{dv} = {} & T_{0\cdot2\cdot0}\eta^2 + T^{+1}_{0\cdot1\cdot1}\eta\eta'\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + T_{0\cdot0\cdot2}\eta'^2 \\ & + \overline{T}_{0\cdot2\cdot0}\sin^2 j + \overline{T}^{+1}_{0\cdot1\cdot1}\sin j\sin j'\cos(\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) + \overline{T}_{0\cdot0\cdot2}\sin^2 j'.\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich auch die konstanten Glieder zweiten Grades. Die genauere Berechnung dieser Grössen soll jedoch später gegeben werden. Die Koefficienten sind mit der für die konstanten Teile erforderlichen Genauigkeit:

$$\begin{aligned}(82)\quad T_{0\cdot2\cdot0} = {} & -2b_{0\cdot2\cdot0} - \beta_1a_7 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_4\beta_4 - a_1\beta_7 + \tfrac{3}{2}(\beta_2^2+\beta_4^2) + 3\beta_1\beta_7 - a_1 \\ & - 6\beta_1\beta_2 - 6R_{4\cdot0\cdot0}\beta_4 + \tfrac{3}{2}\beta_1\alpha_2 + \tfrac{3}{2}a_1\beta_2 + \tfrac{3}{2}S_{4\cdot0\cdot0}\beta_4 - 3b_0 \\ T^{+1}_{0\cdot1\cdot1} = {} & -2b^{+1}_{0\cdot1\cdot1} - \beta_1(a_6+a_9) - \alpha_2\beta_5 - \alpha_5\beta_2 - \alpha_5\beta_4 - \alpha_4\beta_5 - a_1(\beta_5+\beta_9) + 3(\beta_2\beta_5+\beta_4\beta_5) \\ & + 3\beta_1(\beta_5+\beta_9) - a_2 - 6\beta_1\beta_5 - 6R_{4\cdot0\cdot0}\beta_5 + \tfrac{3}{2}\beta_1\alpha_5 + \tfrac{3}{2}a_1\beta_5 + \tfrac{3}{2}S_{4\cdot0\cdot0}\beta_5 \\ T_{0\cdot0\cdot2} = {} & -2b_{0\cdot0\cdot2} - \beta_1a_{10} - \alpha_5\beta_5 - \alpha_5\beta_5 - a_1\beta_{10} + \tfrac{3}{2}(\beta_5^2+\beta_5^2) + 3\beta_1\beta_{10} \\ \overline{T}_{0\cdot2\cdot0} = {} & -2\overline{b}_{0\cdot2\cdot0} - \beta_1a_{23} - a_1\beta_{23} + 3\beta_1\beta_{23} \\ \overline{T}^{+1}_{0\cdot1\cdot1} = {} & -2\overline{b}^{+1}_{0\cdot1\cdot1} - \beta_1(a_{24}+a_{25}) - a_1(\beta_{24}+\beta_{25}) + 3\beta_1(\beta_{24}+\beta_{25}) + T_aS_2 \\ \overline{T}_{0\cdot0\cdot2} = {} & -2\overline{b}_{0\cdot0\cdot2} - \beta_1a_{26} - a_1\beta_{26} + 3\beta_1\beta_{26}.\end{aligned}$$

www.libtool.com.cn

Integrieren wir jetzt, um K und V zu erhalten, so bekommen wir:

(83) pars $K_2 =$

$$\begin{aligned}
&\gamma_7\,\eta^2\sin 2w && +\gamma_{11}\eta^2\sin(2w-2\mathfrak{v}) && +\gamma_{17}\eta^2\sin(6w-2\mathfrak{v})\\
&+\gamma_8\,\eta\eta'\sin(2w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && +\gamma_{12}\eta\eta'\sin(2w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && +\gamma_{18}\eta\eta'\sin(6w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)\\
&+\gamma_9\,\eta\eta'\sin(2w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) && +\gamma_{13}\eta'^2\sin(2w-2\mathfrak{v}_1) && +\gamma_{19}\eta'^2\sin(6w-2\mathfrak{v}_1)\\
&+\gamma_{10}\eta'^2\sin 2w
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\gamma_{20}\eta^2\sin(2w+2\mathfrak{v}) && +W^{-1}_{4\cdot1\cdot1}\eta\eta'\sin(4w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) && +W^{-2}_{8\cdot2\cdot0}\eta^2\sin(8w-2\mathfrak{v})\\
&+\gamma_{21}\eta^2\sin 4w && +W_{4\cdot0\cdot2}\eta'^2\sin 4w && +W^{-2}_{8\cdot1\cdot1}\eta\eta'\sin(8w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)\\
&+\gamma_{22}\eta\eta'\sin(4w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && +W_{6\cdot2\cdot0}\eta^2\sin 6w && +W^{-2}_{8\cdot0\cdot2}\eta'^2\sin(8w-2\mathfrak{v}_1)\\
& && +W^{+1}_{6\cdot1\cdot1}\eta\eta'\sin(6w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\gamma_{23}\sin^2 j\sin 2w && +\gamma_{27}\sin^2 j\sin(2w-2\mathfrak{v}) && +\gamma_{33}\sin^2 j\sin(6w-2\mathfrak{v})\\
&+\gamma_{24}\sin j\sin j'\sin(2w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && +\gamma_{28}\sin j\sin j'\sin(2w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && +\gamma_{34}\sin j\sin j'\sin(6w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)\\
&+\gamma_{25}\sin j\sin j'\sin(2w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) && +\gamma_{29}\sin^2 j'\sin(2w-2\mathfrak{v}_1) && +\gamma_{35}\sin^2 j'\sin(6w-2\mathfrak{v}_1)\\
&+\gamma_{26}\sin^2 j'\sin 2w
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\overline{W}_{4\cdot2\cdot0}\sin^2 j\sin 4w && +\overline{W}^{-1}_{4\cdot1\cdot1}\sin j\sin j'\sin(4w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) && +\overline{W}^{-2}_{8\cdot2\cdot0}\sin^2 j\sin(8w-2\mathfrak{v})\\
&+\overline{W}^{+1}_{4\cdot1\cdot1}\sin j\sin j'\sin(4w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && +\overline{W}_{4\cdot0\cdot2}\sin^2 j'\sin 4w && +\overline{W}^{-2}_{8\cdot1\cdot1}\sin j\sin j'\sin(8w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)\\
& && && +\overline{W}^{-2}_{8\cdot0\cdot2}\sin^2 j'\sin(8w-2\mathfrak{v}_1).
\end{aligned}$$

(84)
$$\begin{aligned}
\gamma_7 &= \frac{1}{1+\delta_1}[a_7-2\beta_7'-\alpha_2-3\beta_1+3\beta_2-\beta_4(\alpha_2-3\beta_2+6\beta_1)+3R^{+1}_{2\cdot1\cdot0}-S^{+1}_{2\cdot1\cdot0}]\\
\gamma_8 &= \frac{1}{1+\delta_1}[a_8-2\beta_8-\alpha_2+3\beta_2-\beta_5(\alpha_2-3\beta_2+6\beta_1)]\\
\gamma_9 &= \frac{1}{1+\delta_1}[a_9-2\beta_9-\beta_4(\alpha_2-3\beta_2)+3R^{+1}_{2\cdot0\cdot1}-S^{+1}_{2\cdot0\cdot1}]\\
\gamma_{10} &= \frac{1}{1+\delta_1}[a_{10}-2\beta_{10}-\beta_5(\alpha_2-3\beta_2)]\\
\gamma_{11} &= \frac{-1}{1-\delta_1}[a_{11}-2\beta_{11}-\alpha_2-3\beta_1+3\beta_2-6\beta_1\beta_4-\beta_1(\alpha_{14}-3\beta_{14})+\tfrac{3}{4}a_1]\\
\gamma_{12} &= \frac{-1}{1-\delta_1}[a_{12}-2\beta_{12}-\alpha_2+3\beta_2-6\beta_1\beta_5-\beta_1(\alpha_{15}-3\beta_{15})]\\
\gamma_{13} &= \frac{-1}{1-\delta_1}[a_{13}-2\beta_{13}-\beta_1(\alpha_{16}-3\beta_{16})]
\end{aligned}$$

www.libtool.com.cn

$$\gamma_{17} = \frac{1}{1+3\delta_1}[a_{17}-2\beta_{17}-\beta_4(\alpha_3-3\beta_3+6\beta_1)-\beta_1(\alpha_{14}-3\beta_{14})+3R^{-1}_{6\cdot1\cdot0}-S^{-1}_{6\cdot1\cdot0}+\tfrac{3}{4}S_{6\cdot0\cdot0}-3R_{6\cdot0\cdot0}]$$

$$\gamma_{18} = \frac{1}{1+3\delta_1}[a_{18}-2\beta_{18}-\beta_4(\alpha_5-3\beta_5)-\beta_5(\alpha_3-3\beta_3+6\beta_1)-\beta_1(\alpha_{15}-3\beta_{15})+3R^{-1}_{6\cdot0\cdot1}-S^{-1}_{6\cdot0\cdot1}]$$

$$\gamma_{19} = \frac{1}{1+3\delta_1}[a_{19}-2\beta_{19}-\beta_5(\alpha_5-3\beta_5)-\beta_1(\alpha_{16}-3\beta_{16})]$$

$$\gamma_{20} = \frac{1}{3+\delta_1}[-3\beta_1+S^{+2}_{2\cdot2\cdot0}-2R^{+2}_{2\cdot2\cdot0}+3R^{+1}_{2\cdot1\cdot0}-S^{+1}_{2\cdot1\cdot0}+\tfrac{3}{4}S_{2\cdot0\cdot0}]$$

$$\gamma_{21} = \frac{1}{2(1+\delta_1)}[3\beta_4+3\beta_1(\tfrac{1}{2}\alpha_2-2\beta_2+\beta_7)-a_4+S_{4\cdot2\cdot0}-2R_{4\cdot2\cdot0}+3R^{+1}_{4\cdot1\cdot0}-S^{+1}_{4\cdot1\cdot0}-3R_{4\cdot0\cdot0}]$$

$$\gamma_{22} = \frac{1}{2(1+\delta_1)}[3\beta_5+3\beta_1(\tfrac{1}{2}\alpha_3-2\beta_3+\beta_8)+S^{+1}_{4\cdot1\cdot1}-2R^{+1}_{4\cdot1\cdot1}-a_5]$$

$$W^{-1}_{4\cdot1\cdot1} = \frac{1}{2(1+\delta_1)}[3\beta_1\beta_9+S^{-1}_{4\cdot1\cdot1}-2R^{-1}_{4\cdot1\cdot1}+3R^{+1}_{4\cdot0\cdot1}-S^{+1}_{4\cdot0\cdot1}]$$

$$W_{4\cdot0\cdot2} = \frac{1}{2(1+\delta_1)}[3\beta_1\beta_{10}+S_{4\cdot0\cdot2}-2R_{4\cdot0\cdot2}]$$

$$W_{6\cdot2\cdot0} = \frac{1}{3(1+\delta_1)}[-6\beta_1\beta_4+S_{6\cdot2\cdot0}-2R_{6\cdot2\cdot0}+3R^{+1}_{6\cdot1\cdot0}+3R^{-1}_{6\cdot1\cdot0}-S^{+1}_{6\cdot1\cdot0}-S^{-1}_{6\cdot1\cdot0}-3R_{6\cdot0\cdot0}]$$

$$W^{+1}_{6\cdot1\cdot1} = \frac{1}{3(1+\delta_1)}[-6\beta_1\beta_5+S^{+1}_{6\cdot1\cdot1}-2R^{+1}_{6\cdot1\cdot1}+3R^{-1}_{6\cdot0\cdot1}-S^{-1}_{6\cdot0\cdot1}]$$

$$W^{-2}_{8\cdot2\cdot0} = \frac{1}{2(1+2\delta_1)}[\tfrac{3}{2}\beta_4^2+3\beta_1\beta_{17}+S^{-2}_{6\cdot2\cdot0}-2R^{-2}_{8\cdot2\cdot0}+3R^{-1}_{8\cdot1\cdot0}-S^{-1}_{8\cdot1\cdot0}+\tfrac{3}{4}S_{8\cdot0\cdot0}-3R_{8\cdot0\cdot0}]$$

$$W^{-2}_{8\cdot1\cdot1} = \frac{1}{2(1+2\delta_1)}[3\beta_4\beta_5+3\beta_1\beta_{18}+S^{-2}_{8\cdot1\cdot1}-2R^{-2}_{8\cdot1\cdot1}+3R^{-1}_{8\cdot0\cdot1}-S^{-1}_{8\cdot0\cdot1}]$$

$$W^{-2}_{8\cdot0\cdot2} = \frac{1}{2(1+2\delta_1)}[\tfrac{3}{2}\beta_5^2+3\beta_1\beta_{19}+S^{-2}_{8\cdot0\cdot2}-2R^{-2}_{8\cdot0\cdot2}]$$

$$\gamma_{13} = \frac{1}{1+\delta_1}(a_{23}-2\beta_{23}) \qquad \gamma_{27} = \frac{-1}{1+\delta_1}[a_{27}-2\beta_{27}-\beta_1(\alpha_{30}-3\beta_{30})] \qquad \gamma_{33} = \frac{1}{1+3\delta_1}[a_{33}-2\beta_{33}-\beta_1(\alpha_{30}-3\beta_{30})]$$

$$\gamma_{14} = \frac{1}{1+\delta_1}(a_{24}-2\beta_{24}) \qquad \gamma_{28} = \frac{-1}{1+\delta_1}[a_{28}-2\beta_{28}-\beta_1(\alpha_{31}-3\beta_{31})] \qquad \gamma_{34} = \frac{1}{1+3\delta_1}[a_{34}-2\beta_{34}-\beta_1(\alpha_{31}-3\beta_{31})]$$

$$\gamma_{15} = \frac{1}{1+\delta_1}(a_{25}-2\beta_{25}) \qquad \gamma_{29} = \frac{-1}{1+\delta_1}[a_{29}-2\beta_{29}-\beta_1(\alpha_{32}-3\beta_{32})] \qquad \gamma_{35} = \frac{1}{1+3\delta_1}[a_{35}-2\beta_{35}-\beta_1(\alpha_{32}-3\beta_{32})]$$

$$\gamma_{16} = \frac{1}{1+\delta_1}(a_{26}-2\beta_{26})$$

www.libtool.com.cn

$$\overline{W}_{4\cdot2\cdot0} = \frac{1}{2(1+\delta_1)}[3\beta_1\beta_{22}+\overline{S}_{4\cdot2\cdot0}-2\overline{R}_{4\cdot2\cdot0}] \qquad \overline{W}^{-2}_{3\cdot2\cdot0} = \frac{1}{2(1+2\delta_1)}[3\beta_1\beta_{33}+\overline{S}^{-2}_{3\cdot2\cdot0}-2\overline{R}^{-2\,V}_{3\cdot2\cdot0}]$$

$$\overline{W}^{+1}_{4\cdot1\cdot1} = \frac{1}{2(1+\delta_1)}[3\beta_1\beta_{24}+\overline{S}^{+1}_{4\cdot1\cdot1}-2\overline{R}^{+1}_{4\cdot1\cdot1}] \qquad \overline{W}^{-2}_{3\cdot1\cdot1} = \frac{1}{2(1+2\delta_1)}[3\beta_1\beta_{34}+\overline{S}^{-2}_{3\cdot1\cdot1}-2\overline{R}^{-2\,\mathfrak{v}}_{3\cdot1\cdot1}]$$

$$\overline{W}^{-1}_{4\cdot1\cdot1} = \frac{1}{2(1+\delta_1)}[3\beta_1\beta_{25}+\overline{S}^{-1}_{4\cdot1\cdot1}-2\overline{R}^{-1}_{4\cdot1\cdot1}] \qquad \overline{W}^{-2}_{3\cdot0\cdot2} = \frac{1}{2(1+2\delta_1)}[3\beta_1\beta_{35}+\overline{S}^{-2}_{3\cdot0\cdot2}-2\overline{R}^{-2}_{3\cdot0\cdot2}].$$

$$\overline{W}_{4\cdot0\cdot2} = \frac{1}{2(1+\delta_1)}[3\beta_1\beta_{26}+\overline{S}_{4\cdot0\cdot2}-2\overline{R}_{4\cdot0\cdot2}]$$

(85) $$\begin{aligned}\text{pars } V_2 = {} & \gamma'_{14}\eta^2\sin(4w-2\mathfrak{v}) \quad + \gamma'_{20}\sin^2 j\sin(4w-2\mathfrak{v}) \\ & + \gamma'_{15}\eta\eta'\sin(4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) + \gamma'_{21}\sin j\sin j'\sin(4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) \\ & + \gamma'_{16}\eta'^2\sin(4w-2\mathfrak{v}_1) \quad + \gamma'_{22}\sin^2 j'\sin(4w-2\mathfrak{v}_1).\end{aligned}$$

Hier ist

(86) $$\gamma'_{14} = \frac{\gamma_{14}}{2\delta_1}, \quad \gamma'_{15} = \frac{\gamma_{15}}{2\delta_1}, \quad \gamma'_{16} = \frac{\gamma_{16}}{2\delta_1},$$

$$\gamma'_{20} = \frac{\gamma_{20}}{2\delta_1}, \quad \gamma'_{21} = \frac{\gamma_{21}}{2\delta_1}, \quad \gamma'_{22} = \frac{\gamma_{22}}{2\delta_1}.$$

Die γ_k sind die im Ansatz für $\frac{d\overline{V}}{dv}$ (Formel 39) gebrauchten Koefficienten. Wir sind jetzt in der Lage, ihre Werte in Funktion der β_k geben zu können.

(86)
$$\begin{aligned}\gamma_{14} = {} & \alpha_{14}(1-\tfrac{3}{2}p_0^{(0)})-2\beta_{14}(1-\tfrac{1}{2}p_0^{(0)})+\tfrac{3}{2}\beta_1(\alpha_2+S^{-1}_{3\cdot1\cdot0}-4R^{-1}_{3\cdot1\cdot0})-\beta_2(\alpha_2+6\beta_1-\tfrac{3}{2}\beta_2-\tfrac{3}{2}a_1) \\ & +\beta_4(3-a_1-2p_0^{(0)})+(3\beta_1-a_1)(\beta_{11}+\beta_{17})-\beta_1(a_{11}+a_{17})+\tfrac{3}{4}S_{4\cdot0\cdot0}-3R_{4\cdot0\cdot0}-a_6 \\ \gamma_{15} = {} & \alpha_{15}(1-\tfrac{3}{2}p_0^{(0)})-2\beta_{15}(1-\tfrac{1}{2}p_0^{(0)})+\tfrac{3}{2}\beta_1(\alpha_3+S^{-1}_{3\cdot0\cdot1}-4R^{-1}_{3\cdot0\cdot1})-\beta_2(\alpha_3-\tfrac{3}{2}\beta_3)-\beta_3(\alpha_2+6\beta_1-\tfrac{3}{2}\beta_2-\tfrac{3}{2}a_1) \\ & -\beta_4 a_3+\beta_3(3-a_1-2p_0^{(0)})+(3\beta_1-a_1)(\beta_{12}+\beta_{18})-\beta_1(a_{12}+a_{18})-a_5 \\ \gamma_{16} = {} & \alpha_{16}(1-\tfrac{3}{2}p_0^{(0)})-2\beta_{16}(1-\tfrac{1}{2}p_0^{(0)})-\beta_3(\alpha_3-\tfrac{3}{2}\beta_3)-\beta_3 a_3+(3\beta_1-a_1)(\beta_{13}+\beta_{19})-\beta_1(a_{13}+a_{19}) \\ \gamma_{20} = {} & \alpha_{20}(1-\tfrac{3}{2}p_0^{(0)})-2\beta_{20}(1-\tfrac{1}{2}p_0^{(0)})+(3\beta_1-a_1)(\beta_{27}+\beta_{33})-\beta_1(a_{27}+a_{33}) \\ \gamma_{21} = {} & \alpha_{21}(1-\tfrac{3}{2}p_0^{(0)})-2\beta_{21}(1-\tfrac{1}{2}p_0^{(0)})+(3\beta_1-a_1)(\beta_{28}+\beta_{34})-\beta_1(a_{28}+a_{34}) \\ \gamma_{22} = {} & \alpha_{22}(1-\tfrac{3}{2}p_0^{(0)})-2\beta_{22}(1-\tfrac{1}{2}p_0^{(0)})+(3\beta_1-a_1)(\beta_{29}+\beta_{35})-\beta_1(a_{29}+a_{35}).\end{aligned}$$

Die $\gamma_{14}, \gamma_{15}, \gamma_{16}, \gamma_{20}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ sind definitive Werte, dagegen tritt zu den γ'_k später noch ein exargumentaler Teil hinzu. Die Integration der A-Glieder, sowie die Ermittelung des konstanten Teiles zweiten Grades wird besser im folgenden Kapitel erledigt werden zugleich mit der Berücksichtigung der Funktion $\mathfrak{F}$ und der Zusatzglieder aus η, Π etc.

www.libtool.com.cn

10) Die Berechnung von $\mathfrak{Z}_2$ gestaltet sich wesentlich einfacher, bedingt durch die einfachere Form der Differentialgleichung. Bekanntlich werden die kurzperiodischen Glieder in $\mathfrak{Z}_2$ durch den Divisor bei der Integration vergrössert, wir brauchen also nur diese genau bis zu Grössen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ in der Differentialgleichung. Die A-Glieder wollen wir nur genau bis auf Grössen v. d. Ord. m' und $\frac{m'}{\delta_1}$ in der Differentialgleichung herstellen, B-Glieder kommen nicht vor. Es ist:

$$\frac{d^2\mathfrak{Z}_2}{dv^2}+\mathfrak{Z}_2 = -Q_0\frac{d\mathfrak{Z}_2}{dv}-Q_1\frac{d\mathfrak{Z}_1}{dv}+Z_2+2S_1Z_1-Q_1\frac{d(\mathfrak{z})}{dv}.$$

Analog $\frac{d(\varrho)}{dv}$ setzen wir $\frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = \sin j\cos\mathfrak{v}$, vernachlässigen also hier, ebenso in $\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}$, die Veränderlichkeit von $\sin j$, σ etc. mit einem Fehler $\frac{m'^2}{\delta_1}$ im Integral. Für $\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}$ brauchen wir nur die D-Glieder anzusetzen. Multiplizieren wir die periodischen Aggregate aus und suchen die entstehenden D-Glieder, sowie die von der Form A heraus, so können wir schreiben:

$$\begin{aligned}(87)\qquad \frac{d^2\mathfrak{Z}_2}{dv^2}+\mathfrak{Z}_2 = {} & c_3\eta\sin j\sin(2w+\mathfrak{v}-\mathrm{v})+c_7\eta\sin j'\sin(2w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v})\\ & +c_4\eta\sin j\sin(2w-\mathfrak{v}+\mathrm{v})+c_8\eta\sin j'\sin(2w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v})\\ & +c_5\eta'\sin j\sin(2w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)+c_9\eta'\sin j'\sin(2w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)\\ & +c_6\eta'\sin j\sin(2w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1)+c_{10}\eta'\sin j'\sin(2w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1)\\ & +c_{11}\eta\sin j\sin(2w-\mathfrak{v}-\mathrm{v})+c_{15}\eta\sin j\sin(6w-\mathfrak{v}-\mathrm{v})\\ & +c_{12}\eta'\sin j\sin(2w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)+c_{16}\eta'\sin j\sin(6w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)\\ & +c_{13}\eta\sin j'\sin(2w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v})+c_{17}\eta\sin j'\sin(6w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v})\\ & +c_{14}\eta'\sin j'\sin(2w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)+c_{18}\eta'\sin j'\sin(6w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1).\end{aligned}$$

Die Koefficienten lauten:

$$\begin{aligned}(88)\quad c_3 &= \varepsilon_3-\tfrac{1}{2}q_2+\alpha_2\mathfrak{z}_1-\tfrac{1}{2}(r_4\xi_1+r_1\xi_4) & c_7 &= \varepsilon_7+\alpha_2\mathfrak{z}_2-\tfrac{1}{2}(r_4\xi_2+r_1\xi_8)\\ c_4 &= \varepsilon_4-\tfrac{1}{2}r_3+\alpha_2(\varepsilon_1-\tfrac{1}{2}r_1)+\tfrac{1}{2}(q_2\xi_1-r_1\xi_3) & c_8 &= \varepsilon_8+\alpha_2\varepsilon_2+\tfrac{1}{2}(q_2\xi_2-r_1\xi_7)\\ c_5 &= \varepsilon_5-\tfrac{1}{2}q_3+\alpha_3\mathfrak{z}_1-\tfrac{1}{2}(r_5\xi_1+r_1\xi_6) & c_9 &= \varepsilon_9+\alpha_3\mathfrak{z}_2-\tfrac{1}{2}(r_5\xi_2+r_1\xi_{10})\\ c_6 &= \varepsilon_6-\tfrac{1}{2}r_3+\alpha_3(\varepsilon_1-\tfrac{1}{2}r_1)+\tfrac{1}{2}(q_3\xi_1-r_1\xi_5) & c_{10} &= \varepsilon_{10}+\alpha_3\varepsilon_2+\tfrac{1}{2}(q_3\xi_2-r_1\xi_9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{11} &= \varepsilon_{11}-\tfrac{1}{2}q_3-\alpha_2\mathfrak{z}_1+\tfrac{1}{2}(r_2\xi_1+r_1\xi_{15}) & c_{15} &= \varepsilon_{15}-\tfrac{1}{2}r_4+\alpha_2(\varepsilon_1-\tfrac{1}{2}r_1)-\tfrac{1}{2}(q_2\xi_1-r_1\xi_{11})\\ c_{12} &= \varepsilon_{12}-\tfrac{1}{2}q_3-\alpha_3\mathfrak{z}_1+\tfrac{1}{2}(r_3\xi_1+r_1\xi_{16}) & c_{16} &= \varepsilon_{16}-\tfrac{1}{2}r_5+\alpha_3(\varepsilon_1-\tfrac{1}{2}r_1)-\tfrac{1}{2}(q_3\xi_1-r_1\xi_{12})\\ c_{13} &= \varepsilon_{13}-\alpha_2\mathfrak{z}_2+\tfrac{1}{2}(r_2\xi_2+r_1\xi_{17}) & c_{17} &= \varepsilon_{17}+\alpha_2\varepsilon_2-\tfrac{1}{2}(q_2\xi_2-r_1\xi_{13})\\ c_{14} &= \varepsilon_{14}-\alpha_3\mathfrak{z}_2+\tfrac{1}{2}(r_3\xi_2+r_1\xi_{18}) & c_{18} &= \varepsilon_{18}+\alpha_3\varepsilon_2-\tfrac{1}{2}(q_3\xi_2-r_1\xi_{14}).\end{aligned}$$

www.libtool.com.cn

Da in den elementaren Gliedern der Differentialgleichung solche v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ nicht vorkommen und wir schon $\frac{m'^2}{\delta_1}$ vernachlässigen, so folgt:

$$(89)\quad T_0\left(\frac{d^2\mathfrak{z}_2}{dv^2}+\mathfrak{z}_2\right) = \mathfrak{z}_{\delta_2}^{(0)}\eta\sin j\sin(\mathfrak{v}-\mathrm{v}) + \mathfrak{z}_{\delta_5}^{(0)}\eta\sin j'\sin(\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) + (\mathfrak{z}_{\delta_4}^{(0)}+\tfrac{1}{2}\mathfrak{q}_2^{(0)})\eta'\sin j\sin(\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)+\mathfrak{z}_{\delta_6}^{(0)}\eta'\sin j'\sin(\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1).$$

Die Koefficienten sind aus dem zweiten Kapitel bekannt. Die Integration soll im folgenden Kapitel geleistet werden, zusammen mit der Berücksichtigung der Zusatzglieder und der exargumentalen Teile der Koefficienten. Das Integral von $\mathfrak{z}_2$ hat die im Ansatz für $\mathfrak{z}$ (Formel 41) angegebene Form. Die Koefficienten sind:

$$(90)\quad \xi_3=-\frac{c_3}{\delta_1(2+\delta_1)},\ \xi_4=-\frac{c_4}{\delta_1(2+\delta_1)},\ \xi_{11}=\frac{c_{11}}{\delta_1(2-\delta_1)},\ \xi_{15}=-\frac{c_{15}}{3\delta_1(2+3\delta_1)},$$
$$\xi_5=-\frac{c_5}{\delta_1(2+\delta_1)},\ \xi_6=-\frac{c_6}{\delta_1(2+\delta_1)},\ \xi_{12}=\frac{c_{12}}{\delta_1(2-\delta_1)},\ \xi_{16}=-\frac{c_{16}}{3\delta_1(2+3\delta_1)},$$
$$\xi_7=-\frac{c_7}{\delta_1(2+\delta_1)},\ \xi_8=-\frac{c_8}{\delta_1(2+\delta_1)},\ \xi_{13}=\frac{c_{13}}{\delta_1(2-\delta_1)},\ \xi_{17}=-\frac{c_{17}}{3\delta_1(2+3\delta_1)},$$
$$\xi_9=-\frac{c_9}{\delta_1(2+\delta_1)},\ \xi_{10}=-\frac{c_{10}}{\delta_1(2+\delta_1)},\ \xi_{14}=\frac{c_{14}}{\delta_1(2-\delta_1)},\ \xi_{18}=-\frac{c_{18}}{3\delta_1(2+3\delta_1)}.$$

ξ_3, ξ_5, ξ_7, ξ_9 und ξ_{11}, ξ_{12}, ξ_{13}, ξ_{14} sind definitive Werte. Die andern erhalten noch exargumentale Zusätze.

Viertes Kapitel.

Berücksichtigung der exargumentalen Teile in den Gliedern ersten bis dritten Grades, sowie der Veränderlichkeit der langperiodischen Funktionen η, Π etc. in den C- und D-Gliedern ersten und zweiten Grades, soweit diese kleine Divisoren erhalten.

§ 1. Die Gyldén'sche partielle Integration. — Ableitung mehrerer Hilfsformeln.

1) Im vorigen Kapitel integrierten wir die Differentialgleichungen des Problems, indem wir die langperiodische charakteristische Funktion $\overline{V}$ innerhalb der Argumente als konstant ansahen. Ebenso verfuhren wir mit den langperiodisch elementaren Funktionen η, Π, $\sin j$, σ etc. Beides ist bei charakteristischen Planeten nicht gestattet. Haben wir gewöhnliche Planeten, so ist dort $\overline{V}$ von der Ordnung

www.libtool.com.cn

der störenden Masse, man kann unbedenklich nach Potenzen dieser Grösse entwickeln und schon die erste Potenz in der Entwicklung vernachlässigen (Störungen zweiter Ordnung). „Gewöhnliche Planeten haben demnach keine exargumentalen Glieder".

Bei charakteristischen Planeten, wo die als Divisor auftretende Grösse δ_1 Werte bis zu $\sqrt[3]{m'}$ annehmen kann, nähert sich $\overline{V}$ stark der Einheit und muss in den Argumenten bleiben. Die Gyldén'sche partielle Integration trägt diesem Vorhandensein des $\overline{V}$ in den Argumenten Rechnung. „Bei charakteristischen Planeten treten exargumentale Glieder auf".

Bei kritischen Planeten, definiert durch $\sqrt[3]{m'} \geqq \delta_1 > \sqrt[3]{m'^2}$ müssen unbedingt exargumentale Glieder berücksichtigt werden. Hier können wir aber auch die η, Π etc. nicht mehr als konstant ansehen, sondern müssen ihrem funktionalen Charakter durch die partielle Integration Rechnung tragen, welche im folgenden in Gestalt einer Reihenentwicklung gegeben werden soll, die nach Potenzen von $\frac{m'}{\delta_1}$ fortschreitet. Hier dürfte wohl die zweite Potenz dieser Entwicklung ausreichen. „Kritische Planeten haben sowohl exargumentale Glieder als auch Zusatzglieder (durch η, Π etc. hervorgerufen)".

Wir haben uns im vorigen Kapitel einer nur für gewöhnliche Planeten ausreichenden Integrationsmethode bedient, sind aber insofern in der Genauigkeit erheblich weiter gegangen, als wir die Koefficienten unter Berücksichtigung der zweiten Potenz der Masse in charakteristischen Gliedern bestimmten. Wir wollen jetzt zuerst die exargumentalen Zusätze herleiten, die an diese Koefficienten anzubringen sind, damit sie für charakteristische Planeten genügen. Ist uns dies gelungen, so sollen die η, Π etc. als variabel betrachtet werden. Die Koefficienten der Entwicklungen bleiben davon unberührt, wie wir gleich sehen werden; die Reihen für S, R, W, $\mathfrak{Z}$ etc. werden dagegen fast um die bereits vorhandene Anzahl Terme vermehrt, und es bestehen die Koefficienten aus den alten Gliedern, sowie aus gewissen Grössen ς_n und τ_n.

Ich will jetzt eine kurze Ableitung der Gyldén'schen partiellen Integration in einer etwas anderen Form geben.

In dem Argument w tritt v explicit wie implicit auf, und dies muss bei der Integration berücksichtigt werden. Es geschieht das ganz analog der partiellen Differentiation, indem man zuerst nur das explicite v berücksichtigt und dies dann durch einen Zusatz berichtigt. Es sei folgendes Argument zu integrieren:

$$J = \int \sin(ax + by)\, dx, \qquad y = f(x)$$

Sehen wir y als konstant an:

$$J = \int^{y = \text{const.}} \sin(ax + by)\, dx + \varphi,$$

wo die Funktion φ so zu bestimmen ist, dass die rechte Seite den Wert des

www.libtool.com.cn

Integrals unter Berücksichtigung von y giebt. Differentiieren wir, so folgt einmal:

$$\frac{dJ}{dx} = \sin(ax+by),$$

und

$$\frac{dJ}{dx} = \sin(ax+by)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\int^{y=\text{const.}}\sin(ax+by)\,dx\right]\frac{dy}{dx}+\frac{d\varphi}{dx}.$$

Aus der Gleichsetzung beider Ausdrücke ergiebt sich zur Bestimmung von φ folgender Differentialausdruck:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\int^{y=\text{const.}}\sin(ax+by)\,dx\right]\frac{dy}{dx}$$

$$\varphi = -\int\frac{\partial}{\partial y}\left[\int^{y=\text{const.}}\sin(ax+by)\,dx\right]\frac{dy}{dx}\cdot dx.$$

Es lautet demnach das Resultat:

$$J = \int^{y=\text{const.}}\sin(ax+by)\,dx-\int\frac{\partial}{\partial y}\left[\int^{y=\text{const.}}\sin(ax+by)\,dx\right]\frac{dy}{dx}\,dx. \tag{91}$$

Das Integral ohne Index ist wieder über x und y zu erstrecken; wendet man obiges Verfahren von neuem auf dieses erste Integral an, so folgt:

$$J = \int^{y=\text{const.}}\sin(ax+by)\,dx-\int^{y=\text{const.}}\frac{\partial}{\partial y}\left[\int^{y=\text{const.}}\sin(ax+by)\,dx\right]\frac{dy}{dx}\cdot dx \tag{91a}$$

$$+\int\frac{\partial}{\partial y}\left\{\int^{y=\text{const.}}\frac{\partial}{\partial y}\left[\int^{y=\text{const.}}\sin(ax+by)\,dx\right]\frac{dy}{dx}\,dx\right\}\frac{dy}{dx}\,dx.$$

Und so liesse sich die Reihe leicht weiter fortsetzen. Die Integrationen sind hier aus gutem Grunde nicht ausgeführt, ebenso die Differentiationen, denn wir haben ja $\frac{dy}{dx}$ $\left(\text{bei uns } \frac{d\overline{V}}{dv}\right)$ in periodischer Form. Wir komponieren dies dann mit dem Integranden und integrieren jetzt erst.

Wie man sieht, muss bei der letzten Integration, mit der man die Reihe abbrechen will, y doch als konstant betrachtet werden. Hier tritt aber schon $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ auf, bei uns $\left(\frac{d\overline{V}}{dv}\right)^2$, und dies ist v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$. Würde nun der Koefficient von $\sin(ax+by)$ v. d. Ord. m' sein und durch jede Integration den Divisor $a = \delta_1$ erhalten, so würde er also infolge des dreimaligen Integrationsprocesses werden $\frac{\overline{m'}}{\delta_1^3}\times\left(\frac{dV}{dv}\right)^2 = \frac{m'^3}{\delta_1^5}$, während der Koefficient, ohne Berücksichtigung des $\overline{V}$ v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ wäre. Es entsteht eine Reihe von folgender Form:

www.libtool.com.cn

$$(A) \qquad J = C_1 \frac{m'}{\delta_1} + C_2 \frac{m'^2}{\delta_1^3} + C_3 \frac{m'^3}{\delta_1^5} + C_4 \frac{m'^4}{\delta_1^7} + \cdots\cdots$$

wo die C_n Zahlenfaktoren und Potenzen der Excentricitäten enthalten. Herr Brendel definiert nun (Br. pg. 153) δ_1 folgendermassen:

$$(B) \qquad \delta_1 = \delta - 2\mu \sum \frac{c_n m'^{2n}}{\delta_1^{4n-2}} \varkappa^{2n-2},$$

wo die c_n Koefficienten v. d. Ord. der Einheit sind, und $\varkappa$ v. d. Ord. der Excentricität ist. Hieraus geht direkt hervor, dass einmal δ_1 nicht streng null werden kann und dass zweitens δ_1 so definiert wird, dass für diesen Wert die Reihe (A) konvergiert.

Nun tritt aber in V der Fall ein, dass der Koefficient in der Differentialgleichung schon v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ ist, also bei der ersten Integration v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1^2}$ wird, bei der zweiten v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^4}$ etc. Wir bekommen hier eine Reihe:

$$J = C_1 \frac{m'}{\delta_1^2} + C_2 \frac{m'^2}{\delta_1^4} + C_3 \frac{m'^3}{\delta_1^6} + \cdots$$

Es ist dies die in den A. N. No. 3346 erwähnte steigende Reihe, welche jedoch nur eine endliche Zahl Glieder besitzt, deren Konvergenz demnach gar nicht in Betracht kommt. Hier ist überall der Grenzwert von δ_1 bei kritischen Planeten angenommen, also der ungünstigste Fall, welcher überhaupt eintreten kann.

Wollte man bei kritischen Planeten mit Hilfe dieser Methode der partiellen Integration eine Darstellung des gerechneten Ortes innerhalb der Beobachtungsgrenzen erreichen, so müsste man sehr hohe Potenzen sowohl der Excentricität als auch in Bezug auf die Masse bei diesen exargumentalen Gliedern mitnehmen, was eine bedeutende Mehrarbeit verursacht.

Specialisieren wir nun die in (91) gegebene allgemeine Formel der partiellen Integration für unsere Zwecke.

Das Argument w war ja

$$w = (1-\mu_1)v - \mu\overline{V} - B.$$

Mithin erhält man folgende Formeln ohne Mühe aus (91), indem man die partielle Integration nur einmal anwendet. Denn in der Praxis wird man sofort den Integranden mit dem periodischen Aggregate $\frac{d\overline{V}}{dv}$ ausmultiplizieren und auf die Integration dieser neuen periodischen Reihe wieder die Formel (91) anwenden.

www.libtool.com.cn

$$(92)\quad \begin{cases} \int \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} nw\,dv = \mp \frac{1}{n(1-\mu_1)} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nw + \frac{\mu}{1-\mu_1} \int \frac{d\overline{V}}{dv} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} nw\,dv \\ \int \sin(nw \pm kv)\,dv = -\frac{1}{n(1-\mu_1)\pm k} \cos(nw \pm kv) + \frac{n\mu}{n(1-\mu_1)\pm k} \int \frac{d\overline{V}}{dv} \sin(nw \pm kv)\,dv \\ \int \cos(nw \pm kv)\,dv = \frac{1}{n(1-\mu_1)\pm k} \sin(nw \pm kv) + \frac{n\mu}{n(1-\mu_1)\pm k} \int \frac{d\overline{V}}{dv} \cos(nw \pm kv)\,dv. \end{cases}$$

Für $\frac{d\overline{V}}{dv}$ ist der in Formel (39) gegebene Ansatz zu benutzen.

Des weiteren soll noch erwähnt werden, dass die aus charakteristischen Gliedern entstehenden exargumentalen Glieder wieder charakteristische sind, also besonders betrachtet werden müssen, dass dagegen aus gewöhnlichen Gliedern auch nur exargumentale gewöhnliche entstehen, also sofort weggelassen werden können, da sie v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$, $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ etc. sind.

---

2) Die Veränderlichkeit der η, Π etc. soll, wie bereits erwähnt wurde, mit Hilfe der gewöhnlichen partiellen Integration berücksichtigt werden, und wir wollen für diese eine etwas andere, unseren Zwecken mehr entsprechende Ableitung geben. Es liege folgender Ausdruck vor:

$$J = \int f \frac{d\varphi}{dx}\,dx,$$

wo f und φ Funktionen von x sind, und zwar sei f eine langperiodische, welche sich für kürzere Zeitintervalle von einer Konstanten nur wenig unterscheidet. In erster Näherung werde gesetzt $f = \text{const.}$, so dass ist

$$J = \int f \frac{d\varphi}{dx}\,dx = f \int \frac{d\varphi}{dx}\,dx + \psi_1,$$

wo ψ_1 so bestimmt werden soll, dass der Ausdruck rechts den wahren Wert des Integrals giebt. Differentiiert man beide Ausdrücke für J und setzt sie gleich:

$$f \frac{d\varphi}{dx} = \frac{df}{dx} \int \frac{d\varphi}{dx}\,dx + f \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\psi_1}{dx},$$

oder

$$\frac{d\psi_1}{dx} = -\frac{df}{dx} \int \frac{d\varphi}{dx}\,dx,$$

$$\psi_1 = -\int \frac{df}{dx} \int \frac{d\varphi}{dx}\,dx^2.$$

In zweiter Näherung wird gesetzt: $\frac{df}{dx} = \text{const.}$, also

www.libtool.com.cn

$$J = f\int\frac{d\varphi}{dx}dx - \frac{df}{dx}\int\int\frac{d\varphi}{dx}dx^2 + \psi_2,$$

wo ψ_2 den Fehler annullieren soll, also sein muss

$$\frac{d\psi_2}{dx} = \frac{d^2f}{dx^2}\int\int\frac{d\varphi}{dx}dx^2,$$

$$\psi_2 = \int\frac{d^2f}{dx^2}\int\int\frac{d\varphi}{dx}dx^2.$$

Fährt man so fort, so erhält man folgende Reihe für das Integral:

$$(93)\quad \int f\frac{d\varphi}{dx}dx = f\int\frac{d\varphi}{dx}dx - \frac{df}{dx}\int\int\frac{d\varphi}{dx}dx^2 + \frac{d^2f}{dx^2}\int\int\int\frac{d\varphi}{dx}dx^3 - \frac{d^3f}{dx^3}\int\int\int\int\frac{d\varphi}{dx}dx^4 + \cdots$$

$$\cdots \mp \frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\int^{(n)}\frac{d\varphi}{dx}dx^n \pm \psi_n,$$

wo ψ_n das Restglied der Reihe vertritt.

$$\psi_n = \int\frac{d^nf}{dx^n}\int^{(n)}\frac{d\varphi}{dx}dx^{n+1}.$$

Hieraus folgt sofort die bekannte Thatsache, dass, wenn f eine ganze rationale Funktion $(n-1)$ten Grades ist, ψ_n streng Null wird, ein endlicher Integrationsprozess also zum Ziele führt. Eine gute Annäherung wird aber diese Methode im Falle langperiodischer Funktionen geben. Denken wir uns $\varphi =$ kurzperiodisch, $f =$ langperiodisch, und zwar $f = \sin\varsigma x$, ς v. d. Ord. m', so wird $\frac{d^nf}{dx^n}$ v. d. Ord. m'^n, also selbst im Falle kritischer Planeten, wo φ langperiodisch charakteristisch ist, würde werden, wenn wir von den Potenzen der Excentricität absehen,

$$\frac{d\psi_n}{dx} = m'^n\cdot\frac{m'}{\delta_1^n} \text{ resp. } m'^n\cdot\frac{m'}{\delta_1^{n+1}}$$

oder im Grenzwerte von $\delta_1 = \sqrt[3]{m'^2}$

$$\frac{d\psi_n}{dx} = \sqrt[3]{m'^{n+3}} \text{ resp. } \sqrt[3]{m'^{n+1}}.$$

Der erste Fall entspricht den Funktionen S, R, Z, K, der zweite V. Brechen wir nun mit dem zweiten Gliede ab, sehen also schon den ersten Differentialquotienten als konstant an, und vernachlässigen ψ_2, so werden wir die Variabilität von f bei einem Gliede v. d. Ord. $m'^{\frac{4}{3}}$ in der Differentialgleichung für S, R, Z, K, resp. m' in der für V vernachlässigen, also ungünstigen Falls einen Fehler v. d. Ord. m' resp. $\sqrt[3]{m'}$ im Integral begehen. Hätten wir dagegen f als konstant angesehen, so wäre der Fehler v. d. Ord. $\sqrt[3]{m'^2}$ resp. nullter Ordnung geworden. Es zeigt dies, dass die Annäherungsmethode wirklich eine solche ist und dass wenigstens das zweite Glied der Reihe (93) noch mitgenommen werden muss.

www.libtool.com.cn

Die Formel (93) wird daher bei langperiodischen Funktionen f, wo der Differentialquotient um eine Ordnung kleiner wird als die Funktion, eine schnell fallende Reihe darstellen, welche ausserdem mit den Potenzen von Excentricität oder Neigung multipliziert ist.

Die Anwendung dieser Formel auf Ausdrücke wie:

$$\eta^s \sin(nw - 2v) = \eta^s \sin(nw - 2v + 2\Pi)$$

geschieht dadurch, dass man den Sinus auflöst und $\eta^s \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2\Pi$ als die langperiodische Funktion f betrachtet. Wir wollen im folgenden die Integrationsformeln für die bei uns auftretenden langperiodischen Funktionen geben, indem wir schon deren ersten Differentialquotienten als konstant betrachten. Auch in V wollen wir nicht weiter gehen und auf das bei den exargumentalen Gliedern hierüber Gesagte verweisen.

Für die Glieder ersten Grades hat Herr Brendel im sechsten Kapitel der Theorie der kleinen Planeten die Formeln gegeben. (Formel 214, 221, 235). Sie sollen deswegen hier nur für den zweiten Grad hingeschrieben werden.

(94) $$\int \eta^s \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} nw\,dv = \eta^s \int \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} nw\,dv - \frac{d\eta^s}{dv} \iint \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} nw\,dv^2$$

$$\begin{cases} \int \eta^s \sin(nw \pm 2v)\,dv = \eta^s \cos 2\Pi \int \sin(nw \pm 2v)\,dv \mp \eta^s \sin 2\Pi \int \cos(nw \pm 2v)\,dv \\ \qquad - \frac{d\eta^s \cos 2\Pi}{dv} \iint \sin(nw \pm 2v)\,dv^2 \pm \frac{d\eta^s \sin 2\Pi}{dv} \iint \cos(nw \pm 2v)\,dv^2 \\ \int \eta^s \cos(nw \pm 2v)\,dv = \eta^s \cos 2\Pi \int \cos(nw \pm 2v)\,dv \pm \eta^s \sin 2\Pi \int \sin(nw \pm 2v)\,dv \\ \qquad - \frac{d\eta^s \cos 2\Pi}{dv} \iint \cos(nw \pm 2v)\,dv^2 \mp \frac{d\eta^s \sin 2\Pi}{dv} \iint \sin(nw \pm 2v)\,dv^2. \end{cases}$$

Für den störenden Planeten gelten diese Formeln unter Berücksichtigung folgender Substitution: $\eta \parallel \eta'$, $\Pi \parallel \Pi_1$, $v \parallel v_1$.

$$\begin{cases} \int \eta\eta' \sin[nw \pm (v + v_1)]\,dv = \eta\eta' \cos(\Pi + \Pi_1) \int \sin(nw \pm 2v)\,dv \mp \eta\eta' \sin(\Pi + \Pi_1) \int \cos(nw \pm 2v)\,dv \\ \qquad - \frac{d\eta\eta' \cos(\Pi + \Pi_1)}{dv} \iint \sin(nw \pm 2v)\,dv^2 \pm \frac{d\eta\eta' \sin(\Pi + \Pi_1)}{dv} \iint \cos(nw \pm 2v)\,dv^2 \\ \int \eta\eta' \cos[nw \pm (v + v_1)]\,dv = \eta\eta' \cos(\Pi + \Pi_1) \int \cos(nw \pm 2v)\,dv \pm \eta\eta' \sin(\Pi + \Pi_1) \int \sin(nw \pm 2v)\,dv \\ \qquad - \frac{d\eta\eta' \cos(\Pi + \Pi_1)}{dv} \iint \cos(nw \pm 2v)\,dv^2 \mp \frac{d\eta\eta' \sin(\Pi + \Pi_1)}{dv} \iint \sin(nw \pm 2v)\,dv^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int \eta\eta' \sin[nw \pm (v - v_1)]\,dv = \eta\eta' \cos(\Pi - \Pi_1) \int \sin nw\,dv \mp \eta\eta' \sin(\Pi - \Pi_1) \int \cos nw\,dv \\ \qquad - \frac{d\eta\eta' \cos(\Pi - \Pi_1)}{dv} \iint \sin nw\,dv^2 \pm \frac{d\eta\eta' \sin(\Pi - \Pi_1)}{dv} \iint \cos nw\,dv^2 \\ \int \eta\eta' \cos[nw \pm (v - v_1)]\,dv = \eta\eta' \cos(\Pi - \Pi_1) \int \cos nw\,dv \pm \eta\eta' \sin(\Pi - \Pi_1) \int \sin nw\,dv \\ \qquad - \frac{d\eta\eta' \cos(\Pi - \Pi_1)}{dv} \iint \cos nw\,dv^2 \mp \frac{d\eta\eta' \sin(\Pi - \Pi_1)}{dv} \iint \sin nw\,dv^2. \end{cases}$$

www.libtool.com.cn

Die Formeln gelten für die linearen Differentialgleichungen erster Ordnung. Den Neigungsteil erhält man durch die Substitution:

$$\eta \parallel \sin j \text{ und } \eta' \parallel \sin j', \quad \Pi \parallel \sigma \text{ und } \Pi_1 \parallel \sigma_1, \quad \mathfrak{v} \parallel \mathfrak{v} \text{ und } \mathfrak{v}_1 \parallel \mathfrak{v}_1.$$

Für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung in R gelten folgende Formeln, jedoch nur bei Anwendung der Variation der Parameter:

$$(95) \qquad \int \eta^3 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(nw \pm v)\,dv = \eta^3 \int \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(nw \pm v)\,dv - \frac{d\eta^3}{dv} \iint \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(nw \pm v)\,dv^2$$

$$\begin{cases} \int \eta^3 \sin\left[nw \pm \left(2\mathfrak{v} \begin{matrix}+v\\ -v\end{matrix}\right)\right] dv = \eta^3 \cos 2\Pi \int \sin\left(nw \begin{matrix}\pm 3v\\ \pm v\end{matrix}\right) dv \mp \eta^3 \sin 2\Pi \int \cos\left(nw \begin{matrix}\pm 3v\\ \pm v\end{matrix}\right) dv \\ \qquad - \frac{d\eta^3 \cos 2\Pi}{dv} \iint \sin\left(nw \begin{matrix}\pm 3v\\ \pm v\end{matrix}\right) dv^2 \pm \frac{d\eta^3 \sin 2\Pi}{dv} \iint \cos\left(nw \begin{matrix}\pm 3v\\ \pm v\end{matrix}\right) dv^2 \\ \int \eta^3 \cos\left[nw \pm \left(2\mathfrak{v} \begin{matrix}+v\\ -v\end{matrix}\right)\right] dv = \eta^3 \cos 2\Pi \int \cos\left(nw \begin{matrix}\pm 3v\\ \pm v\end{matrix}\right) dv \pm \eta^3 \sin 2\Pi \int \sin\left(nw \begin{matrix}\pm 3v\\ \pm v\end{matrix}\right) dv \\ \qquad - \frac{d\eta^3 \cos 2\Pi}{dv} \iint \cos\left(nw \begin{matrix}\pm 3v\\ \pm v\end{matrix}\right) dv^2 \mp \frac{d\eta^3 \sin 2\Pi}{dv} \iint \sin\left(nw \begin{matrix}\pm 3v\\ \pm v\end{matrix}\right) dv^2. \end{cases}$$

Für den störenden Planeten hat man zu substituieren:

$$\eta \parallel \eta', \quad \Pi \parallel \Pi_1, \quad \mathfrak{v} \parallel \mathfrak{v}_1.$$

$$\begin{cases} \int \eta\eta' \sin\left[nw \pm \left(\mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1 \begin{matrix}+v\\ -v\end{matrix}\right)\right] dv = \eta\eta' \cos(\Pi + \Pi_1) \int \sin\left(nw \begin{matrix}\pm 3v\\ \pm v\end{matrix}\right) dv \mp \eta\eta' \sin(\Pi + \Pi_1) \int \cos\left(nw \begin{matrix}\pm 3v\\ \pm v\end{matrix}\right) dv \\ \qquad - \frac{d\eta\eta' \cos(\Pi + \Pi_1)}{dv} \iint \sin\left(nw \begin{matrix}\pm 3v\\ \pm v\end{matrix}\right) dv^2 \pm \frac{d\eta\eta' \sin(\Pi + \Pi_1)}{dv} \iint \cos\left(nw \begin{matrix}\pm 3v\\ \pm v\end{matrix}\right) dv^2 \\ \int \eta\eta' \cos\left[nw \pm \left(\mathfrak{v} + \mathfrak{v}_1 \begin{matrix}+v\\ -v\end{matrix}\right)\right] dv = \eta\eta' \cos(\Pi + \Pi_1) \int \cos\left(nw \begin{matrix}\pm 3v\\ \pm v\end{matrix}\right) dv \pm \eta\eta' \sin(\Pi + \Pi_1) \int \sin\left(nw \begin{matrix}\pm 3v\\ \pm v\end{matrix}\right) dv \\ \qquad - \frac{d\eta\eta' \cos(\Pi + \Pi_1)}{dv} \iint \cos\left(nw \begin{matrix}\pm 3v\\ \pm v\end{matrix}\right) dv^2 \mp \frac{d\eta\eta' \sin(\Pi + \Pi_1)}{dv} \iint \sin\left(nw \begin{matrix}\pm 3v\\ \pm v\end{matrix}\right) dv^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int \eta\eta' \sin\left[nw \pm \left(\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1 \begin{matrix}+v\\ -v\end{matrix}\right)\right] dv = \eta\eta' \cos(\Pi - \Pi_1) \int \sin\left(nw \begin{matrix}\pm v\\ \mp v\end{matrix}\right) dv \mp \eta\eta' \sin(\Pi - \Pi_1) \int \cos\left(nw \begin{matrix}\pm v\\ \mp v\end{matrix}\right) dv \\ \qquad - \frac{d\eta\eta' \cos(\Pi - \Pi_1)}{dv} \iint \sin\left(nw \begin{matrix}\pm v\\ \mp v\end{matrix}\right) dv^2 \pm \frac{d\eta\eta' \sin(\Pi - \Pi_1)}{dv} \iint \cos\left(nw \begin{matrix}\pm v\\ \mp v\end{matrix}\right) dv^2 \\ \int \eta\eta' \cos\left[nw \pm \left(\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1 \begin{matrix}+v\\ -v\end{matrix}\right)\right] dv = \eta\eta' \cos(\Pi - \Pi_1) \int \cos\left(nw \begin{matrix}\pm v\\ \mp v\end{matrix}\right) dv \pm \eta\eta' \sin(\Pi - \Pi_1) \int \sin\left(nw \begin{matrix}\pm v\\ \mp v\end{matrix}\right) dv \\ \qquad - \frac{d\eta\eta' \cos(\Pi - \Pi_1)}{dv} \iint \cos\left(nw \begin{matrix}\pm v\\ \mp v\end{matrix}\right) dv^2 \mp \frac{d\eta\eta'}{dv} \frac{\sin(\Pi - \Pi_1)}{dv} \iint \sin\left(nw \begin{matrix}\pm v\\ \mp v\end{matrix}\right) dv^2. \end{cases}$$

Den Neigungsteil erhält man durch die Substitution:

$$\eta \parallel \sin j \text{ und } \eta' \parallel \sin j', \quad \Pi \parallel \sigma \text{ und } \Pi_1 \parallel \sigma_1, \quad \mathfrak{v} \parallel \mathfrak{v} \text{ und } \mathfrak{v}_1 \parallel \mathfrak{v}_1.$$

www.libtool.com.cn

Für die Differentialgleichung für $\mathfrak{z}$ gelten folgende Formeln:

$$(96)\quad \begin{cases} \int \eta \sin j \sin\left[nw \pm \left(\mathfrak{v} + \mathfrak{v}\begin{smallmatrix}+v\\-v\end{smallmatrix}\right)\right] dv = \eta \sin j \cos(\Pi+\sigma) \int \sin\left(nw \begin{smallmatrix}\pm 3v\\ \pm v\end{smallmatrix}\right) dv \mp \eta \sin j \sin(\Pi+\sigma) \int \cos\left(nw \begin{smallmatrix}\pm 3v\\ \pm v\end{smallmatrix}\right) dv \\ \qquad - \frac{d\eta \sin j \cos(\Pi+\sigma)}{dv} \iint \sin\left(nw \begin{smallmatrix}\pm 3v\\ \pm v\end{smallmatrix}\right) dv^2 \pm \frac{d\eta \sin j \sin(\Pi+\sigma)}{dv} \iint \cos\left(nw \begin{smallmatrix}\pm 3v\\ \pm v\end{smallmatrix}\right) dv^2 \\ \int \eta \sin j \cos\left[nw \pm \left(\mathfrak{v} + \mathfrak{v}\begin{smallmatrix}+v\\-v\end{smallmatrix}\right)\right] dv = \eta \sin j \cos(\Pi+\sigma) \int \cos\left(nw \begin{smallmatrix}\pm 3v\\ \pm v\end{smallmatrix}\right) dv \pm \eta \sin j \sin(\Pi+\sigma) \int \sin\left(nw \begin{smallmatrix}\pm 3v\\ \pm v\end{smallmatrix}\right) dv \\ \qquad - \frac{d\eta \sin j \cos(\Pi+\sigma)}{dv} \iint \cos\left(nw \begin{smallmatrix}\pm 3v\\ \pm v\end{smallmatrix}\right) dv^2 \mp \frac{d\eta \sin j \sin(\Pi+\sigma)}{dv} \iint \sin\left(nw \begin{smallmatrix}\pm 3v\\ \pm v\end{smallmatrix}\right) dv^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int \eta \sin j \sin\left[nw \pm \left(\mathfrak{v} - \mathfrak{v}\begin{smallmatrix}+v\\-v\end{smallmatrix}\right)\right] dv = \eta \sin j \cos(\Pi-\sigma) \int \sin\left(nw \begin{smallmatrix}\pm v\\ \mp v\end{smallmatrix}\right) dv \mp \eta \sin j \sin(\Pi-\sigma) \int \cos\left(nw \begin{smallmatrix}\pm v\\ \mp v\end{smallmatrix}\right) dv \\ \qquad - \frac{d\eta \sin j \cos(\Pi-\sigma)}{dv} \iint \sin\left(nw \begin{smallmatrix}\pm v\\ \mp v\end{smallmatrix}\right) dv^2 \pm \frac{d\eta \sin j \sin(\Pi-\sigma)}{dv} \iint \cos\left(nw \begin{smallmatrix}\pm v\\ \mp v\end{smallmatrix}\right) dv^2 \\ \int \eta \sin j \cos\left[nw \pm \left(\mathfrak{v} - \mathfrak{v}\begin{smallmatrix}+v\\-v\end{smallmatrix}\right)\right] dv = \eta \sin j \cos(\Pi-\sigma) \int \cos\left(nw \begin{smallmatrix}\pm v\\ \mp v\end{smallmatrix}\right) dv \pm \eta \sin j \sin(\Pi-\sigma) \int \sin\left(nw \begin{smallmatrix}\pm v\\ \mp v\end{smallmatrix}\right) dv \\ \qquad - \frac{d\eta \sin j \cos(\Pi-\sigma)}{dv} \iint \cos\left(nw \begin{smallmatrix}\pm v\\ \mp v\end{smallmatrix}\right) dv^2 \mp \frac{d\eta \sin j \sin(\Pi-\sigma)}{dv} \iint \sin\left(nw \begin{smallmatrix}\pm v\\ \mp v\end{smallmatrix}\right) dv^2. \end{cases}$$

Die übrigen Formeln erhält man durch die Substitutionen:

$$\eta \parallel \eta', \quad \Pi \parallel \Pi_1, \quad \mathfrak{v} \parallel \mathfrak{v}_1, \text{ sowie } j \parallel j', \quad \sigma \parallel \sigma', \quad \mathfrak{v} \parallel \mathfrak{v}_1.$$

---

3) Für die Anwendung der obigen Formeln ist noch die Kenntnis der Differentialquotienten dieser langperiodischen Funktionen $\eta \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} \Pi$, $\sin j \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} \sigma$ etc. nötig, sowie die ihrer Quadrate und Produkte. Zu diesem Zwecke haben wir ihre Definitionsgleichungen (Formel 10) zu quadrieren und zu multiplizieren. Wir wollen hier jedoch gleich die Differentialformeln geben, wobei wir uns einer abgekürzten Bezeichnung bedienen. Wir wollen bei diesen Funktionen für den gestörten Körper den störenden Einfluss von Jupiter, Saturn und Uranus, und für den störenden Körper, — Jupiter in unserem Falle, — den Einfluss von Uranus und Neptun berücksichtigen. Demnach schreiben sich die Gleichungen (10):

$$\eta \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \Pi = \varkappa \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \omega + \varkappa_1 \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \omega_1 + \varkappa_2 \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \omega_2 + \varkappa_3 \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \omega_3 = \varkappa \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \omega + \sum \varkappa_n \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \omega_n$$

$$\eta' \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \Pi_1 = \varkappa' \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \omega_1 + \varkappa_2' \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \omega_2 + \varkappa_3' \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \omega_3 = \sum \varkappa_n' \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \omega_n.$$

$\varkappa'$ und Γ'' in ω_1 sind die Integrationskonstanten der Jupiterbewegung. Die Formeln für j und σ lauten ganz analog. Wir wollen nun aus einem ganz be-

www.libtool.com.cn

stimmten Grunde $\varkappa$ und ϖ sowie $\sin\iota$ und ϑ aus diesen Summen herausnehmen. Da bei den Quadraten und Produkten Doppelsummen auftreten, wollen wir diese so zerlegen, dass wir das indexfreie Glied für sich behalten, dass wir ferner mit „$\sum_{n..n}$“ eine dreigliedrige Summe bezeichnen wollen, wo n nur die Werte 1, 2, 3 ohne Wiederholung erhalten darf. Z. B.

$$\sum \varsigma_n \varkappa_n \varkappa'_n \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2\omega_n = \varsigma_1 \varkappa_1 \varkappa' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2\omega_1 + \varsigma_2 \varkappa_2 \varkappa'_2 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2\omega_2 + \varsigma_3 \varkappa_3 \varkappa'_3 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2\omega_3;$$

dagegen wollen wir mit dem Symbol „$\mathfrak{S}_{m..n}$“ eine specielle dreigliedrige Summe bezeichnen, derart, dass nur zu setzen ist $m \gtrless n$ und für $m = 1$, $n = 2$ und $n = 3$, für $m = 2$ nur $n = 3$. Keine anderen Werte der Indices sind zu verwenden. Z. B. ist:

$$\mathfrak{S}(\varsigma_m - \varsigma_n)\varkappa'_m \varkappa'_n \sin(\omega_m - \omega_n) = (\varsigma_1 - \varsigma_2)\varkappa' \varkappa'_2 \sin(\omega_1 - \omega_2) + (\varsigma_1 - \varsigma_3)\varkappa' \varkappa'_3 \sin(\omega_1 - \omega_3) + (\varsigma_2 - \varsigma_3)\varkappa'_2 \varkappa'_3 \sin(\omega_2 - \omega_3).$$

Die Formeln lassen sich dann sehr bequem schreiben, besonders bei der Quadrierung etc. Die Differentialformeln für die erste Potenz gehen ohne weiteres aus (10) hervor, die für die zweite Potenz sind:

(97)
$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\eta^2}{dv} &= -2\sum(\varsigma - \varsigma_n)\varkappa\varkappa_n \sin(\omega - \omega_n) - 2\mathfrak{S}(\varsigma_m - \varsigma_n)\varkappa_m \varkappa_n \sin(\omega_m - \omega_n)\\
\frac{d\eta'^2}{dv} &= -2\mathfrak{S}(\varsigma_m - \varsigma_n)\varkappa'_m \varkappa'_n \sin(\omega_m - \omega_n)
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\eta^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2\Pi}{dv} &= \mp 2\varsigma\varkappa^2 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2\omega \mp 2\sum(\varsigma + \varsigma_n)\varkappa\varkappa_n \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(\omega + \omega_n) \mp 2\sum \varsigma_n \varkappa_n^2 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2\omega_n \mp 2\mathfrak{S}(\varsigma_m + \varsigma_n)\varkappa_m \varkappa_n \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(\omega_m + \omega_n\\
\frac{d\eta'^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2\Pi_1}{dv} &= \mp 2\sum \varsigma_n \varkappa_n'^2 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2\omega_n \mp 2\mathfrak{S}(\varsigma_m + \varsigma_n)\varkappa'_m \varkappa'_n \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(\omega_m + \omega_n)
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\Pi + \Pi_1)}{dv} &= \mp\sum(\varsigma + \varsigma_n)\varkappa\varkappa'_n \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(\omega + \omega_n) \mp 2\sum \varsigma_n \varkappa_n \varkappa'_n \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2\omega_n \mp \mathfrak{S}(\varsigma_m + \varsigma_n)[\varkappa_m \varkappa'_n + \varkappa_n \varkappa'_m] \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(\omega_m + \omega_n)\\
\frac{d\eta\eta' \cos(\Pi - \Pi_1)}{dv} &= -\sum(\varsigma - \varsigma_n)\varkappa\varkappa'_n \sin(\omega - \omega_n) - \mathfrak{S}(\varsigma_m - \varsigma_n)[\varkappa_m \varkappa'_n + \varkappa_n \varkappa'_m]\sin(\omega_m - \omega_n)\\
\frac{d\eta\eta' \sin(\Pi - \Pi_1)}{dv} &= +\sum(\varsigma - \varsigma_n)\varkappa\varkappa'_n \cos(\omega - \omega_n) + \mathfrak{S}(\varsigma_m - \varsigma_n)[\varkappa_m \varkappa'_n - \varkappa_n \varkappa'_m]\cos(\omega_m - \omega_n);
\end{aligned}\right.$$

und für den Neigungsteil:

(98)
$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\sin^2 j}{dv} &= 2\sum(\tau - \tau_n)\sin\iota\sin\iota_n \sin(\vartheta - \vartheta_n) + 2\mathfrak{S}(\tau_m - \tau_n)\sin\iota_m \sin\iota_n \sin(\vartheta_m - \vartheta_n)\\
\frac{d\sin^2 j'}{dv} &= 2\mathfrak{S}(\tau_m - \tau'_n)\sin\iota'_m \sin\iota'_n \sin(\vartheta_m - \vartheta_n)
\end{aligned}\right.$$

www.libtool.com.cn

(98)
$$\begin{cases} \dfrac{d\sin^2 j \overset{\cos}{\sin} 2\sigma}{dv} = \pm 2\tau \sin^2\iota \overset{\sin}{\cos} 2\vartheta \pm 2\sum(\tau+\tau_n)\sin\iota\sin\iota_n \overset{\sin}{\cos}(\vartheta+\vartheta_n) \pm 2\sum \tau_n \sin^2\iota_n \overset{\sin}{\cos} 2\vartheta_n \\ \qquad\qquad \pm 2\mathfrak{S}(\tau_m+\tau_n)\sin\iota_m\sin\iota_n \overset{\sin}{\cos}(\vartheta_m+\vartheta_n) \\ \dfrac{d\sin^2 j' \overset{\cos}{\sin} 2\sigma_1}{dv} = \pm 2\sum \tau_n \sin^2\iota'_n \overset{\sin}{\cos} 2\vartheta_n \pm 2\mathfrak{S}(\tau_m+\tau_n)\sin\iota'_m\sin\iota'_n \overset{\sin}{\cos}(\vartheta_m+\vartheta_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\sin j \sin j' \overset{\cos}{\sin}(\sigma+\sigma_1)}{dv} = \pm\sum(\tau+\tau_n)\sin\iota\sin\iota'_n \overset{\sin}{\cos}(\vartheta+\vartheta_n) \pm 2\sum\tau_n\sin\iota_n\sin\iota'_n \overset{\sin}{\cos} 2\vartheta_n \\ \qquad\qquad \pm\mathfrak{S}(\tau_m+\tau_n)[\sin\iota_m\sin\iota'_n+\sin\iota_n\sin\iota'_m] \overset{\sin}{\cos}(\vartheta_m+\vartheta_n) \\ \dfrac{d\sin j \sin j' \cos(\sigma-\sigma_1)}{dv} = \sum(\tau-\tau_n)\sin\iota\sin\iota'_n\sin(\vartheta-\vartheta_n)+\mathfrak{S}(\tau_m-\tau_n)[\sin\iota_m\sin\iota'_n+\sin\iota_n\sin\iota'_m]\sin(\vartheta_m-\vartheta_n) \\ \dfrac{d\sin j \sin j' \sin(\sigma-\sigma_1)}{dv} = -\sum(\tau-\tau_n)\sin\iota\sin\iota'_n\cos(\vartheta-\vartheta_n)-\mathfrak{S}(\tau_m'-\tau_n)[\sin\iota_m\sin\iota'_n-\sin\iota_n\sin\iota'_m]\cos(\vartheta_m-\vartheta_n). \end{cases}$$

Für die Differentialgleichung in $\mathfrak{z}$ ist erforderlich:

(99)
$$\begin{cases} \dfrac{d\eta \sin j \overset{\cos}{\sin}(\Pi+\sigma)}{dv} = \mp(\varsigma-\tau)\varkappa\sin\iota \overset{\sin}{\cos}(\omega+\vartheta) \mp\sum(\varsigma_n-\tau)\varkappa_n\sin\iota \overset{\sin}{\cos}(\omega_n+\vartheta) \mp\sum(\varsigma-\tau_n)\varkappa\sin\iota_n \overset{\sin}{\cos}(\omega+\vartheta_n) \\ \qquad \mp\sum(\varsigma_n-\tau_n)\varkappa_n\sin\iota_n \overset{\sin}{\cos}(\omega_n+\vartheta_n) \mp\mathfrak{S}(\varsigma_m-\tau_n)\varkappa_m\sin\iota_n \overset{\sin}{\cos}(\omega_m+\vartheta_n) \mp\mathfrak{S}(\varsigma_n-\tau_m)\varkappa_n\sin\iota_m \overset{\sin}{\cos}(\omega_n+\vartheta_m) \\ \dfrac{d\eta \sin j \overset{\cos}{\sin}(\Pi-\sigma)}{dv} = \mp(\varsigma+\tau)\varkappa\sin\iota \overset{\sin}{\cos}(\omega-\vartheta) \mp\sum(\varsigma_n+\tau)\varkappa_n\sin\iota \overset{\sin}{\cos}(\omega_n-\vartheta) \mp\sum(\varsigma+\tau_n)\varkappa\sin\iota_n \overset{\sin}{\cos}(\omega-\vartheta_n) \\ \qquad \mp\sum(\varsigma_n+\tau_n)\varkappa_n\sin\iota_n \overset{\sin}{\cos}(\omega_n-\vartheta_n) \mp\mathfrak{S}(\varsigma_m+\tau_n)\varkappa_m\sin\iota_n \overset{\sin}{\cos}(\omega_m-\vartheta_n) \mp\mathfrak{S}(\varsigma_n+\tau_m)\varkappa_n\sin\iota_m \overset{\sin}{\cos}(\omega_n-\vartheta_m) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta' \sin j' \overset{\cos}{\sin}(\Pi_1+\sigma_1)}{dv} = \mp\sum(\varsigma_n-\tau_n)\varkappa'_n\sin\iota'_n \overset{\sin}{\cos}(\omega_n+\vartheta_n) \mp\mathfrak{S}(\varsigma_m-\tau_n)\varkappa'_m\sin\iota'_n \overset{\sin}{\cos}(\omega_m+\vartheta_n) \\ \qquad\qquad \mp\mathfrak{S}(\varsigma_n-\tau_m)\varkappa'_n\sin\iota'_m \overset{\sin}{\cos}(\omega_n+\vartheta_m) \\ \dfrac{d\eta' \sin j' \overset{\cos}{\sin}(\Pi_1-\sigma_1)}{dv} = \mp\sum(\varsigma_n+\tau_n)\varkappa'_n\sin\iota'_n \overset{\sin}{\cos}(\omega_n-\vartheta_n) \mp\mathfrak{S}(\varsigma_m+\tau_n)\varkappa'_m\sin\iota'_n \overset{\sin}{\cos}(\omega_m-\vartheta_n) \\ \qquad\qquad \mp\mathfrak{S}(\varsigma_n+\tau_m)\varkappa'_n\sin\iota'_m \overset{\sin}{\cos}(\omega_n-\vartheta_m) \end{cases}$$

www.libtool.com.cn

(99)
$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\eta' \sin j \overset{\cos}{\sin}(\Pi_1+\sigma)}{dv} &= \mp\sum(\varsigma_n-\tau)\varkappa'_n \sin\iota \overset{\sin}{\cos}(\omega_n+\vartheta) \mp \sum(\varsigma_n-\tau_n)\varkappa'_n \sin\iota_n \overset{\sin}{\cos}(\omega_n+\vartheta_n)\\
&\quad \mp \mathfrak{S}(\varsigma_m-\tau_n)\varkappa'_m \sin\iota_n \overset{\sin}{\cos}(\omega_m+\vartheta_n) \mp \mathfrak{S}(\varsigma_n-\tau_m)\varkappa'_n \sin\iota_m \overset{\sin}{\cos}(\omega_n+\vartheta_m)\\
\frac{d\eta' \sin j \overset{\cos}{\sin}(\Pi_1-\sigma)}{dv} &= \mp\sum(\varsigma_n+\tau)\varkappa'_n \sin\iota \overset{\sin}{\cos}(\omega_n-\vartheta) \mp \sum(\varsigma_n+\tau_n)\varkappa'_n \sin\iota_n \overset{\sin}{\cos}(\omega_n-\vartheta_n)\\
&\quad \mp \mathfrak{S}(\varsigma_m+\tau_n)\varkappa'_m \sin\iota_n \overset{\sin}{\cos}(\omega_m-\vartheta_n) \mp \mathfrak{S}(\varsigma_n+\tau_m)\varkappa'_n \sin\iota_m \overset{\sin}{\cos}(\omega_n-\vartheta_m)
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\eta \sin j' \overset{\cos}{\sin}(\Pi+\sigma_1)}{dv} &= \mp\sum(\varsigma-\tau_n)\varkappa \sin\iota'_n \overset{\sin}{\cos}(\omega+\vartheta_n) \mp \sum(\varsigma_n-\tau_n)\varkappa_n \sin\iota'_n \overset{\sin}{\cos}(\omega_n+\vartheta_n)\\
&\quad \mp \mathfrak{S}(\varsigma_m-\tau_n)\varkappa_m \sin\iota'_n \overset{\sin}{\cos}(\omega_m+\vartheta_n) \mp \mathfrak{S}(\varsigma_n-\tau_m)\varkappa_n \sin\iota'_m \overset{\sin}{\cos}(\omega_n+\vartheta_m)\\
\frac{d\eta \sin j' \overset{\cos}{\sin}(\Pi-\sigma_1)}{dv} &= \mp\sum(\varsigma+\tau_n)\varkappa \sin\iota'_n \overset{\sin}{\cos}(\omega-\vartheta_n) \mp \sum(\varsigma_n+\tau_n)\varkappa_n \sin\iota'_n \overset{\sin}{\cos}(\omega_n-\vartheta_n)\\
&\quad \mp \mathfrak{S}(\varsigma_m+\tau_n)\varkappa_m \sin\iota'_n \overset{\sin}{\cos}(\omega_m-\vartheta_n) \mp \mathfrak{S}(\varsigma_n+\tau_m)\varkappa_n \sin\iota'_m \overset{\sin}{\cos}(\omega_n-\vartheta_m).
\end{aligned}\right.$$

Wir wollen hier noch einige für die Integration in den A-Gliedern wichtige Hilfsformeln geben. Dort treten η^2, $\sin^2 j$ sowie $\eta\eta' \overset{\sin}{\cos}(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) = \mp\eta\eta' \overset{\sin}{\cos}(\Pi-\Pi_1)$ auf, und wir werden an ihre Stelle die Ausdrücke (10) sowie ihre Quadrate und Produkte setzen und diese integrieren. Die betreffenden Integralformeln lauten:

(100)
$$\left\{\begin{aligned}
\int \eta^2 dv &= \varkappa^2 v + v\sum\varkappa_n^2 + 2\sum\frac{\varkappa\varkappa_n}{\varsigma-\varsigma_n}\sin(\omega-\omega_n) + 2\mathfrak{S}\frac{\varkappa_m\varkappa_n}{\varsigma_m-\varsigma_n}\sin(\omega_m-\omega_n)\\
\int \eta'^2 dv &= v\sum\varkappa_n'^2 + 2\mathfrak{S}\frac{\varkappa'_m\varkappa'_n}{\varsigma_m-\varsigma_n}\sin(\omega_m-\omega_n)\\
\int \eta\eta' \cos(\Pi-\Pi_1)dv &= v\sum\varkappa_n\varkappa'_n + \sum\frac{\varkappa\varkappa'_n}{\varsigma-\varsigma_n}\sin(\omega-\omega_n) + \mathfrak{S}\frac{\varkappa_m\varkappa'_n+\varkappa_n\varkappa'_m}{\varsigma_m-\varsigma_n}\sin(\omega_m-\omega_n)\\
\int \eta\eta' \sin(\Pi-\Pi_1)dv &= -\sum\frac{\varkappa\varkappa'_n}{\varsigma-\varsigma_n}\cos(\omega-\omega_n) - \mathfrak{S}\frac{\varkappa_m\varkappa'_n-\varkappa_n\varkappa'_m}{\varsigma_m-\varsigma_n}\cos(\omega_m-\omega_n)
\end{aligned}\right.$$

www.libtool.com.cn

(101)
$$\begin{cases}
\int \sin^2 j\, dv = [\sin^2 \iota + \sum \sin^2 \iota_n]\, v - 2\sum \frac{\sin\iota \sin\iota_n}{\tau-\tau_n} \sin(\vartheta-\vartheta_n) - 2\mathfrak{S} \frac{\sin\iota_m \sin\iota_n}{\tau_m-\tau_n} \sin(\vartheta_m-\vartheta_n) \\
\int \sin^2 j'\, dv = v \sum \sin^2 \iota'_n - 2\mathfrak{S} \frac{\sin\iota'_m \sin\iota'_n}{\tau_m-\tau_n} \sin(\vartheta_m-\vartheta_n) \\
\int \sin j \sin j' \cos(\sigma-\sigma_1)\, dv = v\sum \sin\iota_n \sin\iota'_n - \sum \frac{\sin\iota \sin\iota'_n}{\tau-\tau_n} \sin(\vartheta-\vartheta_n) - \mathfrak{S} \frac{\sin\iota_m \sin\iota'_n + \sin\iota_n \sin\iota'_m}{\tau_m-\tau_n} \sin(\vartheta_m-\vartheta_n) \\
\int \sin j \sin j' \sin(\sigma-\sigma_1)\, dv = \sum \frac{\sin\iota \sin\iota'_n}{\tau-\tau_n} \cos(\vartheta-\vartheta_n) + \mathfrak{S} \frac{\sin\iota_m \sin\iota'_n - \sin\iota_n \sin\iota'_m}{\tau_m-\tau_n} \cos(\vartheta_m-\vartheta_n)
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\int \eta \sin j \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\Pi-\sigma)\, dv = \pm \frac{\varkappa \sin\iota}{\varsigma+\tau} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\omega-\vartheta) \pm \sum \frac{\varkappa_n \sin\iota}{\varsigma_n+\tau} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\omega_n-\vartheta) \pm \sum \frac{\varkappa \sin\iota_n}{\varsigma+\tau_n} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\omega-\vartheta_n) \\
\qquad \pm \sum \frac{\varkappa_n \sin\iota_n}{\varsigma_n+\tau_n} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\omega_n-\vartheta_n) \pm \mathfrak{S} \frac{\varkappa_m \sin\iota_n}{\varsigma_m+\tau_n} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\omega_m-\vartheta_n) \pm \mathfrak{S} \frac{\varkappa_n \sin\iota_m}{\varsigma_n+\tau_m} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\omega_n-\vartheta_m) \\
\int \eta' \sin j' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\Pi_1-\sigma_1)\, dv = \pm \sum \frac{\varkappa'_n \sin\iota'_n}{\varsigma_n+\tau_n} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\omega_n-\vartheta_n) \pm \mathfrak{S} \frac{\varkappa'_m \sin\iota'_n}{\varsigma_m+\tau_n} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\omega_m-\vartheta_n) \pm \mathfrak{S} \frac{\varkappa'_n \sin\iota'_m}{\varsigma_n+\tau_m} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\omega_n-\vartheta_m)
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\int \eta' \sin j \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\Pi_1-\sigma)\, dv = \pm \sum \frac{\varkappa'_n \sin\iota}{\varsigma_n+\tau} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\omega_n-\vartheta) \pm \sum \frac{\varkappa'_n \sin\iota_n}{\varsigma_n+\tau_n} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\omega_n-\vartheta_n) \pm \mathfrak{S} \frac{\varkappa'_m \sin\iota_n}{\varsigma_m+\tau_n} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\omega_m-\vartheta_n) \\
\qquad \pm \mathfrak{S} \frac{\varkappa'_n \sin\iota_m}{\varsigma_n+\tau_m} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\omega_n-\vartheta_m) \\
\int \eta \sin j' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\Pi-\sigma_1)\, dv = \pm \sum \frac{\varkappa \sin\iota'_n}{\varsigma+\tau_n} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\omega-\vartheta_n) \pm \sum \frac{\varkappa_n \sin\iota'_n}{\varsigma_n+\tau_n} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\omega_n-\vartheta_n) \pm \mathfrak{S} \frac{\varkappa_m \sin\iota'_n}{\varsigma_m+\tau_n} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\omega_m-\vartheta_n) \\
\qquad \pm \mathfrak{S} \frac{\varkappa_n \sin\iota'_m}{\varsigma_n+\tau_m} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\omega_n-\vartheta_m).
\end{cases}$$

Für die Annahme einer elliptischen Jupiterbewegung ist in der Formel ausser $\varkappa$ selbst nur $n = 1$ in $\varkappa_n$, $\varkappa'_n$ etc. zu nehmen, und es fallen die mit den Symbolen $\mathfrak{S}$ bezeichneten Summen überall fort, so wird:

$$\int \eta^2\, dv = [\varkappa^2 + \varkappa_1^2]\, v + \frac{2\varkappa\varkappa_1}{\varsigma} \sin(\omega-\omega_1).$$

---

§ 2. Die Reihe der exargumentalen Glieder bis zum dritten Grade inclusive.

4) Wir beabsichtigten die exargumentalen Glieder aller der Formen mitzunehmen, welche durch einen kleinen Divisor vergrössert werden. Demnach müssten wir in R schon mit dem nullten Grade beginnen, in S und W dagegen mit dem ersten. Wir werden aber auch hier mit dem nullten Grade anfangen, obwohl er im Integral S rein erster Ordnung, also der exargumentale Teil in S v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ wird, in Hinsicht auf unsere Genauigkeitsgrenze.

www.libtool.com.cn

Wir beginnen wieder mit S. Die C- und D-Glieder sind hier:

$$\frac{dS}{dv} = -(a_1)\sin 2w - (a_2)\eta\sin(2w-\mathfrak{v}) - (a_3)\eta'\sin(2w-\mathfrak{v}_1) - (a_4)\eta\sin(4w-\mathfrak{v}) - (a_5)\eta'\sin(4w-\mathfrak{v}_1)$$
$$- (a_{14})\eta^2\sin(4w-2\mathfrak{v}) - (a_{15})\eta\eta'\sin(4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) - (a_{16})\eta'^2\sin(4w-2\mathfrak{v}_1) \text{ etc.}$$
$$- (a_{30})\sin^2 j\sin(4w-2\mathfrak{v}) - (a_{31})\sin j\sin j'\sin(4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) - (a_{32})\sin^2 j'(4w-2\mathfrak{v}_1) \text{ etc.}$$

Da aus den Gliedern zweiten Grades nur exargumentale dritten und höheren Grades entspringen, und wir hier die aus der Störungsfunktion herkommenden Teile dritten Grades, also solche v. d. Ord. m', schon vernachlässigen, so werden wir jetzt nur die C-Glieder der Differentialgleichung berücksichtigen. Die übrigen würden exargumentale Glieder dritten Grades v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ geben. Die Klammern sollen anzeigen, dass hier der dem Integral entsprechende Koefficient der Differentialgleichung gemeint ist; sie stehen als Abkürzung zur Vermeidung neuer Bezeichnungen. Integrieren wir nun nach Formel (92) und bedenken wir, dass wir den ersten Teil der Formeln schon im vorigen Kapitel behandelt haben, dass es also nur auf den exargumentalen Teil ankommt, und dass der Divisor $n(1-\mu_1)$ resp. $n(1-\mu_1)\pm k$ das Verschwinden der Klammern in den (a_s) bewirkt, so erhalten wir:

$$\text{pars } S_{1+2} = -2\mu a_1\int\sin 2w\frac{d\overline{V}}{dv}dv - 2\mu a_2\int\eta\sin(2w-\mathfrak{v})\frac{d\overline{V}}{dv}dv - 2\mu a_3\int\eta'\sin(2w-\mathfrak{v}_1)\frac{d\overline{V}}{dv}dv$$
$$- 4\mu a_4\int\eta\sin(4w-\mathfrak{v})\frac{d\overline{V}}{dv}dv - 4\mu a_5\int\eta'\sin(4w-\mathfrak{v}_1)\frac{d\overline{V}}{dv}dv$$

$$\text{pars } S_2 =$$
$$-2\mu a_{14}\int\eta^2\sin(4w-2\mathfrak{v})\frac{d\overline{V}}{dv}dv - 2\mu a_{15}\int\eta\eta'\sin(4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)\frac{d\overline{V}}{dv}dv - 2\mu a_{16}\int\eta'^2\sin(4w-2\mathfrak{v}_1)\frac{d\overline{V}}{dv}dv$$
$$-2\mu a_{30}\int\sin^2 j\sin(4w-2\mathfrak{v})\frac{d\overline{V}}{dv}dv - 2\mu a_{31}\int\sin j\sin j'\sin(4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)\frac{d\overline{V}}{dv}dv - 2\mu a_{32}\int\sin^2 j'\sin(4w-2\mathfrak{v}_1)\frac{d\overline{V}}{dv}dv.$$

Setzt man nun für $\frac{d\overline{V}}{dv}$ den in Formel (39) gegebenen Ansatz ein, so folgt, wenn man sofort die Reihen wieder zu charakteristischen und elementaren Gliedern komponiert und dann integriert:

$$\text{pars } S = \frac{\mu a_1\gamma_2}{1-\varsigma}\eta\cos\mathfrak{v} + \frac{\mu a_1\gamma_2}{1+2\delta_1}\eta\cos(4w-\mathfrak{v}) + \frac{\mu a_1\gamma_2}{1-\varsigma_1}\eta'\cos\mathfrak{v}_1 + \frac{\mu a_1\gamma_2}{1+2\delta_1}\eta'\cos(4w-\mathfrak{v}_1)$$
$$+\frac{2\mu a_4\gamma_2}{1+\delta_1}\eta^2\cos 2w + \frac{2\mu a_5\gamma_2}{1+\delta_1}\eta\eta'\cos(2w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) + \frac{2\mu a_4\gamma_2}{1+\delta_1}\eta\eta'\cos(2w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) + \frac{2\mu a_5\gamma_2}{1+\delta_1}\eta'^2\cos 2w$$

www.libtool.com.cn

$$+\frac{\mu a_1\gamma_{14}}{1-\delta_1}\eta^2\cos(2w-2v) \quad +\frac{\mu\alpha_2\gamma_2}{2\delta_1}\eta^2\cos(4w-2v) \quad +\frac{\mu(a_1\gamma_{14}+2a_4\gamma_2)}{1+3\delta_1}\eta^2\cos(6w-2v)$$
$$+\frac{\mu a_1\gamma_{15}}{1-\delta_1}\eta\eta'\cos(2w-v-v_1)+\frac{\mu(\alpha_2\gamma_3+\alpha_3\gamma_2)}{2\delta_1}\eta\eta'\cos(4w-v-v_1)+\frac{\mu(a_1\gamma_{15}+2(a_4\gamma_3+a_5\gamma_2))}{1+3\delta_1}\eta\eta'\cos(6w-v-v_1)$$
$$+\frac{\mu a_1\gamma_{16}}{1-\delta_1}\eta'^2\cos(2w-2v_1) \quad +\frac{\mu\alpha_3\gamma_3}{2\delta_1}\eta'^2\cos(4w-2v_1) \quad +\frac{\mu(a_1\gamma_{16}+2a_5\gamma_3)}{1+3\delta_1}\eta'^2\cos(6w-2v_1)$$

$$+\frac{\mu a_1\gamma_{30}}{1-\delta_1}\sin^2 j\cos(2w-2v) \quad +\frac{\mu a_1\gamma_{30}}{1+3\delta_1}\sin^2 j\cos(6w-2v)$$
$$+\frac{\mu a_1\gamma_{31}}{1-\delta_1}\sin j\sin j'\cos(2w-v-v_1)+\frac{\mu a_1\gamma_{31}}{1+3\delta_1}\sin j\sin j'\cos(6w-v-v_1)$$
$$+\frac{\mu a_1\gamma_{32}}{1-\delta_1}\sin^2 j'\cos(2w-2v_1) \quad +\frac{\mu a_1\gamma_{32}}{1+3\delta_1}\sin^2 j'\cos(6w-2v_1).$$

Ehe wir jedoch die Glieder dritten Grades zusammenstellen, wollen wir bedenken, dass solche noch aus den exargumentalen Gliedern zweiten Grades v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^3}$ entstehen. Wenden wir zur Ermittlung dieser Terme noch einmal die partielle Integration auf die Differentialgleichung für S an, so folgt:

$$\text{pars}\,S_3 = -\frac{2\mu^2\alpha_2\gamma_2}{\delta_1}\int\eta^2\sin(4w-2v)\frac{d\overline{V}}{dv}dv-2\frac{\mu^2(\alpha_2\gamma_3+\alpha_3\gamma_2)}{\delta_1}\int\eta\eta'\sin(4w-v-v_1)\frac{d\overline{V}}{dv}dv$$
$$-2\frac{\mu^2\alpha_3\gamma_3}{\delta_1}\int\eta'^2\sin(4w-2v_1)\frac{d\overline{V}}{dv}dv.$$

Integriert man diesen und den vorigen Teil und vereinigt die zusammengehörigen Glieder, so kann man S_3 folgendermassen schreiben:

(102)
$$\begin{aligned}S_3 = {} & \alpha_{40}\eta^3\cos(2w-v) && +\alpha_{56}\eta^3\cos(6w-3v)\\ & +\alpha_{41}\eta^2\eta'\cos(2w-2v+v_1) && +\alpha_{57}\eta^2\eta'\cos(6w-2v-v_1)\\ & +\alpha_{42}\eta^2\eta'\cos(2w-v_1) && +\alpha_{58}\eta\eta'^2\cos(6w-v-2v_1)\\ & +\alpha_{43}\eta\eta'^2\cos(2w-v) && +\alpha_{59}\eta'^3\cos(6w-3v_1)\\ & +\alpha_{44}\eta\eta'^2\cos(2w+v-2v_1) && \\ & +\alpha_{45}\eta'^3\cos(2w-v_1) && \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & +\alpha_{64}\eta\sin^2 j\cos(2w-2v+v) && +\alpha_{90}\eta\sin^2 j\cos(6w-2v-v)\\ & +\alpha_{65}\eta'\sin^2 j\cos(2w-2v+v_1) && +\alpha_{91}\eta'\sin^2 j\cos(6w-2v-v_1)\\ & +\alpha_{66}\eta\sin j\sin j'\cos(2w-v-v_1+v) && +\alpha_{92}\eta\sin j\sin j'\cos(6w-v-v_1-v)\\ & +\alpha_{67}\eta'\sin j\sin j'\cos(2w-v-v_1+v_1) && +\alpha_{93}\eta'\sin j\sin j'\cos(6w-v-v_1-v_1)\\ & +\alpha_{68}\eta\sin^2 j'\cos(2w-2v_1+v) && +\alpha_{94}\eta\sin^2 j'\cos(6w-2v_1-v)\\ & +\alpha_{69}\eta'\sin^2 j'\cos(2w-2v_1+v_1) && +\alpha_{95}\eta'\sin^2 j'\cos(6w-2v_1-v_1).\end{aligned}$$

www.libtool.com.cn

Die Koefficienten werden:

$$(103)\quad \alpha_{40} = \frac{\mu(\alpha_{14}\gamma_2 - \alpha_2\gamma_{14})}{\delta_1} + \frac{\mu^2\alpha_2\gamma_2^2}{\delta_1^2} \qquad \alpha_{43} = \frac{\mu(\alpha_{15}\gamma_2 - \alpha_2\gamma_{15})}{\delta_1} + \frac{\mu^2(\alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2)\gamma_2}{\delta_1^2}$$

$$\alpha_{41} = \frac{\mu(\alpha_{14}\gamma_3 - \alpha_3\gamma_{14})}{\delta_1} + \frac{\mu^2\alpha_2\gamma_2\gamma_3}{\delta_1^2} \qquad \alpha_{44} = \frac{\mu(\alpha_{15}\gamma_3 - \alpha_3\gamma_{15})}{\delta_1} + \frac{\mu^2\alpha_3\gamma_2\gamma_3}{\delta_1^2}$$

$$\alpha_{42} = \frac{\mu(\alpha_{15}\gamma_2 - \alpha_2\gamma_{15})}{\delta_1} + \frac{\mu^2(\alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2)\gamma_2}{\delta_1^2} \qquad \alpha_{45} = \frac{\mu(\alpha_{16}\gamma_3 - \alpha_3\gamma_{16})}{\delta_1} + \frac{\mu^2\alpha_3\gamma_3^2}{\delta_1^2}$$

$$\alpha_{56} = \frac{\mu(\alpha_{14}\gamma_2 + \alpha_2\gamma_{14})}{3\delta_1} + \frac{\mu^2\alpha_2\gamma_2^2}{3\delta_1^2}$$

$$\alpha_{57} = \frac{\mu(\alpha_{15}\gamma_2 + \alpha_2\gamma_{15} + \alpha_{14}\gamma_3 + \alpha_3\gamma_{14})}{3\delta_1} + \frac{\mu^2(2\alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2)\gamma_2}{3\delta_1^2}$$

$$\alpha_{58} = \frac{\mu(\alpha_{16}\gamma_2 + \alpha_2\gamma_{16} + \alpha_{15}\gamma_3 + \alpha_3\gamma_{15})}{3\delta_1} + \frac{\mu^2(\alpha_2\gamma_3 + 2\alpha_3\gamma_2)\gamma_2}{3\delta_1^2}$$

$$\alpha_{59} = \frac{\mu(\alpha_{16}\gamma_3 + \alpha_3\gamma_{16})}{3\delta_1} + \frac{\mu^2\alpha_3\gamma_3^2}{3\delta_1^2}$$

$$\alpha_{64} = \frac{\mu(\alpha_{20}\gamma_2 - \alpha_2\gamma_{20})}{\delta_1} \qquad \alpha_{90} = \frac{\mu(\alpha_{20}\gamma_2 + \alpha_2\gamma_{20})}{3\delta_1}$$

$$\alpha_{65} = \frac{\mu(\alpha_{20}\gamma_3 - \alpha_3\gamma_{20})}{\delta_1} \qquad \alpha_{91} = \frac{\mu(\alpha_{20}\gamma_3 + \alpha_3\gamma_{20})}{3\delta_1}$$

$$\alpha_{66} = \frac{\mu(\alpha_{21}\gamma_2 - \alpha_2\gamma_{21})}{\delta_1} \qquad \alpha_{92} = \frac{\mu(\alpha_{21}\gamma_2 + \alpha_2\gamma_{21})}{3\delta_1}$$

$$\alpha_{67} = \frac{\mu(\alpha_{21}\gamma_3 - \alpha_3\gamma_{21})}{\delta_1} \qquad \alpha_{93} = \frac{\mu(\alpha_{21}\gamma_3 + \alpha_3\gamma_{21})}{3\delta_1}$$

$$\alpha_{68} = \frac{\mu(\alpha_{22}\gamma_2 - \alpha_2\gamma_{22})}{\delta_1} \qquad \alpha_{94} = \frac{\mu(\alpha_{22}\gamma_2 + \alpha_2\gamma_{22})}{3\delta_1}$$

$$\alpha_{69} = \frac{\mu(\alpha_{22}\gamma_3 - \alpha_3\gamma_{22})}{\delta_1} \qquad \alpha_{95} = \frac{\mu(\alpha_{22}\gamma_3 + \alpha_3\gamma_{22})}{3\delta_1}\,.$$

Zu den Koefficienten in S_1 und S_2 kommen nach der vorigen Formel noch die folgenden Zusätze hinzu:

$$(104)\qquad \text{pars}\,a_1 = \frac{\mu a_1\gamma_2}{1-\varsigma} \qquad \text{pars}\,a_4 = \frac{\mu a_1\gamma_2}{1+2\delta_1}$$

$$\text{pars}\,a_2 = \frac{\mu a_1\gamma_3}{1-\varsigma_1} \qquad \text{pars}\,a_5 = \frac{\mu a_1\gamma_3}{1+2\delta_1}$$

www.libtool.com.cn

(105)
$$\begin{array}{llll}
\text{pars } a_7 = \frac{2\mu a_4\gamma_2}{1+\delta_1} & \text{pars } a_{11} = \frac{\mu a_1\gamma_{14}}{1-\delta_1} & \text{pars } \alpha_{14} = \frac{\mu \alpha_2\gamma_2}{2\delta_1} & \text{pars } a_{17} = \frac{\mu(a_1\gamma_{14}+2a_4\gamma_2)}{1+3\delta_1} \\
\text{pars } a_8 = \frac{2\mu a_5\gamma_2}{1+\delta_1} & \text{pars } a_{12} = \frac{\mu a_1\gamma_{15}}{1-\delta_1} & \text{pars } \alpha_{15} = \frac{\mu(\alpha_2\gamma_3+\alpha_3\gamma_2)}{2\delta_1} & \text{pars } a_{18} = \frac{\mu(a_1\gamma_{15}+2a_4\gamma_3+2a_5\gamma_2)}{1+3\delta_1} \\
\text{pars } a_9 = \frac{2\mu a_4\gamma_3}{1+\delta_1} & \text{pars } a_{13} = \frac{\mu a_1\gamma_{16}}{1-\delta_1} & \text{pars } \alpha_{16} = \frac{\mu \alpha_3\gamma_3}{2\delta_1} & \text{pars } a_{19} = \frac{\mu(a_1\gamma_{16}+2a_5\gamma_3)}{1+3\delta_1} \\
\text{pars } a_{10} = \frac{2\mu a_5\gamma_3}{1+\delta_1} & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{pars } a_{27} = \frac{\mu a_1\gamma_{30}}{1-\delta_1} & \text{pars } a_{33} = \frac{\mu a_1\gamma_{30}}{1+3\delta_1} \\
\text{pars } a_{28} = \frac{\mu a_1\gamma_{31}}{1-\delta_1} & \text{pars } a_{34} = \frac{\mu a_1\gamma_{31}}{1+3\delta_1} \\
\text{pars } a_{29} = \frac{\mu a_1\gamma_{32}}{1-\delta_1} & \text{pars } a_{35} = \frac{\mu a_1\gamma_{32}}{1+3\delta_1}.
\end{array}$$

Damit wären die Koefficienten in S, von den A-Gliedern abgesehen, vollständig und mit der vorgeschriebenen Genauigkeit ermittelt.

---

5) Die Ermittlung der exargumentalen Zusätze in R ist bedeutend umständlicher wegen der Differentialgleichung zweiter Ordnung, und weil in R_0 ein Glied v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ auftritt, also hier die exargumentalen Glieder bis zum dritten Grade und der vierten Ordnung geführt werden müssen. Nach den Formeln für die Variation der Parameter lauten die beiden particulären Integrale, indem man nach (91) partiell integriert und nur den exargumentalen Teil berücksichtigt und in den C-Gliedern $b^{-1}_{2\cdot1\cdot0}$ und $b^{-1}_{2\cdot0\cdot1}$ nur das Glied v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ mitnimmt:

(106)
$$\begin{aligned}
\left.\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \end{matrix}\right\} = {} & \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{2+\delta_1}\int \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w+v)\frac{d\overline{V}}{dv}dv \pm \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{\delta_1}\int \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-v)\frac{d\overline{V}}{dv}dv \\
& + \frac{2\mu\alpha_2}{1+\delta_1}\int \eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-\mathrm{v}+v)\frac{d\overline{V}}{dv}dv \mp \frac{2\mu\alpha_2}{1-\delta_1}\int \eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-\mathrm{v}-v)\frac{d\overline{V}}{dv}dv \\
& + \frac{2\mu\alpha_3}{1+\delta_1}\int \eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-\mathrm{v}_1+v)\frac{d\overline{V}}{dv}dv \mp \frac{2\mu\alpha_3}{1-\delta_1}\int \eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-\mathrm{v}_1-v)\frac{d\overline{V}}{dv}dv \\
& + \frac{\mu b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}}{1+\delta_1}\int \eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(4w-\mathrm{v}+v)\frac{d\overline{V}}{dv}dv \pm \frac{\mu b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}}{\delta_1}\int \eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(4w-\mathrm{v}-v)\frac{d\overline{V}}{dv}dv \\
& + \frac{\mu b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}}{1+\delta_1}\int \eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(4w-\mathrm{v}_1+v)\frac{d\overline{V}}{dv}dv \pm \frac{\mu b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}}{\delta_1}\int \eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(4w-\mathrm{v}_1-v)\frac{d\overline{V}}{dv}dv.
\end{aligned}$$

www.libtool.com.cn

Für R_3 folgt:

$$(107)\qquad \left.\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \end{matrix}\right\} = \pm\frac{\mu b_{2,2,0}}{\delta_1}\int \eta^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv$$

$$+\frac{\mu b^{-2}_{2,2,0}}{\delta_1}\int \eta^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-2\mathfrak{v}+v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv \qquad \pm\frac{\mu b^{-2}_{6,2,0}}{\delta_1}\int \eta^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(6w-2\mathfrak{v}-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv$$

$$\pm\frac{\mu b^{+1}_{2,1,1}}{\delta_1}\int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv$$

$$+\frac{\mu b^{-2}_{2,1,1}}{\delta_1}\int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1+v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv \pm\frac{\mu b^{-2}_{6,1,1}}{\delta_1}\int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(6w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv$$

$$\pm\frac{\mu b^{-1}_{2,1,1}}{\delta_1}\int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv$$

$$+\frac{\mu b^{-2}_{2,0,2}}{\delta_1}\int \eta'^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-2\mathfrak{v}_1+v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv \qquad \pm\frac{\mu b^{-2}_{6,0,2}}{\delta_1}\int \eta'^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(6w-2\mathfrak{v}_1-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv$$

$$\pm\frac{\mu b_{2,0,2}}{\delta_1}\int \eta'^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv$$

$$\pm\frac{\mu \overline{b}_{2,2,0}}{\delta_1}\int \sin^2 j \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv$$

$$+\frac{\mu \overline{b}^{-2}_{2,2,0}}{\delta_1}\int \sin^2 j \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-2\mathfrak{v}+v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv \qquad \pm\frac{\mu \overline{b}^{-2}_{6,2,0}}{\delta_1}\int \sin^2 j \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(6w-2\mathfrak{v}-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv$$

$$\pm\frac{\mu \overline{b}^{+1}_{2,1,1}}{\delta_1}\int \sin j \sin j' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv$$

$$+\frac{\mu \overline{b}^{-2}_{2,1,1}}{\delta_1}\int \sin j \sin j' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1+v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv \pm\frac{\mu \overline{b}^{-2}_{6,1,1}}{\delta_1}\int \sin j \sin j' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(6w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv$$

$$\pm\frac{\mu \overline{b}^{-1}_{2,1,1}}{\delta_1}\int \sin j \sin j' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv$$

$$+\frac{\mu \overline{b}^{-2}_{2,0,2}}{\delta_1}\int \sin^2 j' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-2\mathfrak{v}_1+v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv \qquad \pm\frac{\mu \overline{b}^{-2}_{6,0,2}}{\delta_1}\int \sin^2 j' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(6w-2\mathfrak{v}_1-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv$$

$$\pm\frac{\mu \overline{b}_{2,0,2}}{\delta_1}\int \sin^2 j' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-v)\frac{d\overline{V}_1}{dy}\,dv.$$

In den Variationsgleichungen für R_3 haben wir diejenigen Teile der Integrale, welche keine kleinen Divisoren haben, fortgelassen. Der Fehler wird v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ im Integral, ebenso gross wird der aus der Vernachlässigung der C-Glieder entspringende Fehler. Es ist dies gerechtfertigt, da wir auch die aus der Störungsfunktion kommenden Glieder dritten Grades nicht mitnehmen,

www.libtool.com.cn

und diese werden schon v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$. Ebenso können wir die C-Glieder ersten Grades fortlassen, insoweit sie mit $\frac{d\overline{V}_2}{dv}$ Glieder dritten Grades geben. Setzen wir dann für $\frac{d\overline{V}}{dv}$ den bekannten Ansatz ein und multiplizieren wir aus, so bekommen wir:

$$(108)\qquad \left.\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_2}{2(2+\delta_1)} \int \eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\mathfrak{v}+v)\,dv \pm \frac{\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_2}{2\delta_1} \int \eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\mathfrak{v}-v)\,dv$$
$$+ \frac{\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_2}{2(2+\delta_1)} \int \eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\mathfrak{v}_1+v)\,dv \pm \frac{\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_2}{2\delta_1} \int \eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\mathfrak{v}_1-v)\,dv.$$

Für den charakteristischen Teil ersten und zweiten Grades folgt:

$$(109)\left.\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_2}{2(2+\delta_1)} \int \eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (4w-\mathfrak{v}+v)\,dv) \qquad \pm \frac{\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_2}{2\delta_1} \int \eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (4w-\mathfrak{v}-v)\,dv$$
$$+ \frac{\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_2}{2(2+\delta_1)} \int \eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (4w-\mathfrak{v}_1+v)\,dv \qquad \pm \frac{\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_2}{2\delta_1} \int \eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (4w-\mathfrak{v}_1-v)\,dv$$
$$+ \frac{\mu b^{-1}_{4\cdot 1\cdot 0}\gamma_2}{2(1+\delta_1)} \int \eta^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (2w+v)\,dv \qquad \pm \frac{\mu b^{-1}_{4\cdot 1\cdot 0}\gamma_2}{2\delta_1} \int \eta^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (2w-v)\,dv$$
$$+ \frac{\mu b^{-1}_{4\cdot 0\cdot 1}\gamma_2}{2(1+\delta_1)} \int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (2w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1+v)\,dv \pm \frac{\mu b^{-1}_{4\cdot 0\cdot 1}\gamma_2}{2\delta_1} \int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (2w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1-v)\,dv$$
$$+ \frac{\mu b^{-1}_{4\cdot 1\cdot 0}\gamma_2}{2(1+\delta_1)} \int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (2w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1+v)\,dv \pm \frac{\mu b^{-1}_{4\cdot 1\cdot 0}\gamma_2}{2\delta_1} \int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (2w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1-v)\,dv$$
$$+ \frac{\mu b^{-1}_{4\cdot 0\cdot 1}\gamma_2}{2(1+\delta_1)} \int \eta'^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (2w+v)\,dv \qquad \pm \frac{\mu b^{-1}_{4\cdot 0\cdot 1}\gamma_2}{2\delta_1} \int \eta'^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (2w-v)\,dv$$
$$\pm \frac{\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_{14}}{2(2+\delta_1)} \int \eta^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (2w-2\mathfrak{v}-v)\,dv \qquad + \frac{\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_{14}}{2\delta_1} \int \eta^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (2w-2\mathfrak{v}+v)\,dv$$
$$\pm \frac{\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_{15}}{2(2+\delta_1)} \int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (2w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1-v)\,dv + \frac{\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_{15}}{2\delta_1} \int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (2w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1+v)\,dv$$
$$\pm \frac{\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_{16}}{2(2+\delta_1)} \int \eta'^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (2w-2\mathfrak{v}_1-v)\,dv \qquad + \frac{\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_{16}}{2\delta_1} \int \eta'^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (2w-2\mathfrak{v}_1+v)\,dv$$

$$+ \frac{\mu \alpha_2\gamma_2}{1+\delta_1} \int \eta^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (4w-2\mathfrak{v}+v)\,dv \qquad \mp \frac{\mu \alpha_2\gamma_2}{1-\delta_1} \int \eta^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (4w-2\mathfrak{v}-v)\,dv$$
$$+ \frac{\mu(\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3)}{1+\delta_1} \int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1+v)\,dv \mp \frac{\mu(\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3)}{1-\delta_1} \int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1-v)\,dv$$
$$+ \frac{\mu \alpha_3\gamma_3}{1+\delta_1} \int \eta'^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (4w-2\mathfrak{v}_1+v)\,dv \qquad \mp \frac{\mu \alpha_3\gamma_3}{1-\delta_1} \int \eta'^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (4w-2\mathfrak{v}_1-v)\,dv$$

www.libtool.com.cn

$$\mp\left[\frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{14}}{2(2+\delta_1)}+\frac{\mu b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}\gamma_2}{2(1+\delta_1)}\right]\int\eta^2\frac{\cos}{\sin}(6w-2v+v)\,dv \qquad \pm\left[\frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{14}}{2\delta_1}+\frac{\mu b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}\gamma_2}{2\delta_1}\right]\int\eta^2\frac{\cos}{\sin}(6w-2v-v)\,dv$$

$$\mp\left[\frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{15}}{2(2+\delta_1)}+\frac{\mu(b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}\gamma_3+b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}\gamma_2)}{2(1+\delta_1)}\right]\int\eta\eta'\frac{\cos}{\sin}(6w-v-v_1+v)\,dv \pm\left[\frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{15}}{2\delta_1}+\frac{\mu(b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}\gamma_3+b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}\gamma_2)}{2\delta_1}\right]\int\eta\eta'\frac{\cos}{\sin}(6w-v-v_1-v)\,dv$$

$$\mp\left[\frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{16}}{2(2+\delta_1)}+\frac{\mu b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}\gamma_3}{2(1+\delta_1)}\right]\int\eta'^2\frac{\cos}{\sin}(6w-2v_1+v)\,dv \qquad \pm\left[\frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{16}}{2\delta_1}+\frac{\mu b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}\gamma_3}{2\delta_1}\right]\int\eta'^2\frac{\cos}{\sin}(6w-2v_1-v)\,dv$$

Und für die A-Glieder erhält man:

$$(110)\quad \left.\begin{matrix}g_1\\g_2\end{matrix}\right\} = -\frac{2\delta_1\mu\alpha_2\gamma_2}{1-\delta_1^2}\int\eta^2\frac{\cos}{\sin}v\,dv+\left[\frac{\mu\alpha_2\gamma_3}{1+\delta_1}-\frac{\mu\alpha_3\gamma_2}{1-\delta_1}\right]\int\eta\eta'\frac{\cos}{\sin}(\Pi-\Pi_1+v)\,dv$$
$$\pm\left[\frac{\mu\alpha_3\gamma_2}{1+\delta_1}-\frac{\mu\alpha_2\gamma_3}{1-\delta_1}\right]\int\eta\eta'\frac{\cos}{\sin}(\Pi-\Pi_1-v)\,dv-\frac{2\delta_1\mu\alpha_3\gamma_3}{1-\delta_1^2}\int\eta'^2\frac{\cos}{\sin}v\,dv.$$

Aus der Neigung kommen noch folgende Glieder:

$$(111)\quad \left.\begin{matrix}g_1\\g_2\end{matrix}\right\} =$$

$$\pm\frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{20}}{2(2+\delta_1)}\int\sin^2j\frac{\cos}{\sin}(2w-2\mathfrak{v}-v)\,dv\pm\frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{21}}{2(2+\delta_1)}\int\sin j\sin j'\frac{\cos}{\sin}(2w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1-v)\,dv\pm\frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{22}}{2(2+\delta_1)}\int\sin^2j'\frac{\cos}{\sin}(2w-2\mathfrak{v}_1-v)\,dv$$

$$-\frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{20}}{2\delta_1}\int\sin^2j\frac{\cos}{\sin}(2w-2\mathfrak{v}+v)\,dv+\frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{21}}{2\delta_1}\int\sin j\sin j'\frac{\cos}{\sin}(2w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1+v)\,dv+\frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{22}}{2\delta_1}\int\sin^2j'\frac{\cos}{\sin}(2w-2\mathfrak{v}_1+v)\,dv$$

$$+\frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{20}}{2(2+\delta_1)}\int\sin^2j\frac{\cos}{\sin}(6w-2\mathfrak{v}+v)\,dv+\frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{21}}{2(2+\delta_1)}\int\sin j\sin j'\frac{\cos}{\sin}(6w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1+v)\,dv+\frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{22}}{2(2+\delta_1)}\int\sin^2j'\frac{\cos}{\sin}(6w-2\mathfrak{v}_1+v)\,dv$$

$$\pm\frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{20}}{2\delta_1}\int\sin^2j\frac{\cos}{\sin}(6w-2\mathfrak{v}-v)\,dv\pm\frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{21}}{2\delta_1}\int\sin j\sin j'\frac{\cos}{\sin}(6w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1-v)\,dv\pm\frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{22}}{2\delta_1}\int\sin^2j'\frac{\cos}{\sin}(6w-2\mathfrak{v}_1-v)\,dv$$

Integriert man nun Formel (109), (110), (111) mit Hilfe der linearen Divisoren und setzt das Integral nach

$$R = g_1\sin v-g_2\cos v$$

zusammen, so erhält man folgende exargumentalen Zusätze zweiter Ordnung für die β_k:

$$(112)\quad \text{pars}\,\beta_4 = -\frac{(2+3\delta_1)\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2}{4\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)},\qquad \text{pars}\,\beta_5 = -\frac{(2+3\delta_1)\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3}{4\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)},$$

$$\text{pars}\,\beta_7 = -\frac{(2+3\delta_1)\mu b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}\gamma_2}{2\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)}\qquad \text{pars}\,\beta_{11} = \frac{2\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{14}}{\delta_1^2(4-\delta_1^2)}\qquad \text{pars}\,\beta_{14} = -\frac{6\delta_1\mu\alpha_2\gamma_2}{1-4\delta_1^2}$$

$$\text{pars}\,\beta_8 = -\frac{(2+3\delta_1)\mu b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}\gamma_2}{2\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)}\qquad \text{pars}\,\beta_{12} = \frac{2\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{15}}{\delta_1^2(4-\delta_1^2)}\qquad \text{pars}\,\beta_{15} = -\frac{6\delta_1\mu(\alpha_2\gamma_3+\alpha_3\gamma_2)}{1-4\delta_1^2}$$

$$\text{pars}\,\beta_9 = -\frac{(2+3\delta_1)\mu b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}\gamma_3}{2\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)}\qquad \text{pars}\,\beta_{13} = \frac{2\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{16}}{\delta_1^2(4-\delta_1^2)}\qquad \text{pars}\,\beta_{16} = -\frac{6\delta_1\mu\alpha_3\gamma_3}{1-4\delta_1^2}$$

$$\text{pars}\,\beta_{10} = -\frac{(2+3\delta_1)\mu b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}\gamma_3}{2\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)}$$

www.libtool.com.cn

$$\text{pars}\,\beta_{17} = -\frac{(2+5\delta_1)\,\mu\, b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}\,\gamma_2}{6\delta_1^2(1+\delta_1)(2+3\delta_1)} - \frac{2(1+2\delta_1)\,\mu\, b_{2\cdot0\cdot0}\,\gamma_{14}}{3\delta_1^2(2+\delta_1)(2+3\delta_1)}$$

$$\text{pars}\,\beta_{18} = -\frac{(2+5\delta_1)\,\mu\,[b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}\,\gamma_2 + b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}\,\gamma_3]}{6\delta_1^2(1+\delta_1)(2+3\delta_1)} - \frac{2(1+2\delta_1)\,\mu\, b_{2\cdot0\cdot0}\,\gamma_{15}}{3\delta_1^2(2+\delta_1)(2+3\delta_1)}$$

$$\text{pars}\,\beta_{19} = -\frac{(2+5\delta_1)\,\mu\, b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}\,\gamma_3}{6\delta_1^2(1+\delta_1)(2+3\delta_1)} - \frac{2(1+2\delta_1)\,\mu\, b_{2\cdot0\cdot0}\,\gamma_{16}}{3\delta_1^2(2+\delta_1)(2+3\delta_1)}$$

$$\text{pars}\,\beta_{27} = \frac{2\mu\, b_{2\cdot0\cdot0}\,\gamma_{30}}{\delta_1^2(4-\delta_1^2)} \qquad \text{pars}\,\beta_{28} = \frac{2\mu\, b_{2\cdot0\cdot0}\,\gamma_{31}}{\delta_1^2(4-\delta_1^2)} \qquad \text{pars}\,\beta_{29} = \frac{2\mu\, b_{2\cdot0\cdot0}\,\gamma_{32}}{\delta_1^2(4-\delta_1^2)}$$

$$\text{pars}\,\beta_{33} = -\frac{2(1+2\delta_1)\,\mu\, b_{2\cdot0\cdot0}\,\gamma_{30}}{3\delta_1^2(2+\delta_1)(2+3\delta_1)} \qquad \text{pars}\,\beta_{34} = -\frac{2(1+2\delta_1)\,\mu\, b_{2\cdot0\cdot0}\,\gamma_{31}}{3\delta_1^2(2+\delta_1)(2+3\delta_1)} \qquad \text{pars}\,\beta_{35} = -\frac{2(1+2\delta_1)\,\mu\, b_{2\cdot0\cdot0}\,\gamma_{33}}{3\delta_1^2(2+\delta_1)(2+3\delta_1)}$$

Die Integration in (110) wollen wir nachher bei der Berechnung des γ ausführen. Vergleicht man (108) mit der Integration der Differentialgleichung für (ϱ) im vorigen Kapitel (Formel 62), so sieht man, dass zu den Koefficienten exargumentale Zusätze hinzutreten, und dass wir sie schreiben können:

(113)
$$b_1 = b^{+1}_{0\cdot1\cdot0} + \frac{\mu\, b_{2\cdot0\cdot0}\,\gamma_2}{\delta_1} \qquad b_2 = b^{+1}_{0\cdot1\cdot0} + \frac{\mu\, b_{2\cdot0\cdot0}\,\gamma_2}{2+\delta_1}$$

$$b_3 = b^{+1}_{0\cdot0\cdot1} + \frac{\mu\, b_{2\cdot0\cdot0}\,\gamma_3}{\delta_1} \qquad b_4 = b^{+1}_{0\cdot0\cdot1} + \frac{\mu\, b_{2\cdot0\cdot0}\,\gamma_3}{2+\delta_1}.$$

Dann erhalten wir nach Formel (63):

(114) $$(\varrho) = \frac{\varkappa}{2}\left[\frac{b_1}{\varsigma} + \frac{b_2}{2-\varsigma}\right]\cos(v-\omega) + \sum\left\{\frac{\varkappa_n}{2}\left[\frac{b_1}{\varsigma_n} + \frac{b_2}{2-\varsigma_n}\right] + \frac{\varkappa'_n}{2}\left[\frac{b_3}{\varsigma_n} + \frac{b_4}{2-\varsigma_n}\right]\right\}\cos(v-\omega_n)$$

und durch Vergleichung mit

(64) $$(\varrho) = \eta\cos(v-\Pi) = \varkappa\cos(v-\omega) + \sum\varkappa_n\cos(v-\omega_n)$$

ergeben sich folgende strengen Werte für die $\varkappa_n$ und ς:

(114a) $$2\varsigma = b_1 + \frac{\varsigma b_2}{2-\varsigma}, \qquad \left[2\varsigma_n - b_1 - \frac{\varsigma_n b_2}{2-\varsigma_n}\right]\varkappa_n = \left[b_3 - \frac{\varsigma_n b_4}{2-\varsigma_n}\right]\varkappa'_n.$$

Genähert ist:

$$\varsigma = \frac{b_1}{2}, \qquad \varkappa_n = \frac{b_3\,\varkappa'_n}{2(\varsigma_n - \varsigma)}.$$

Bekannt aus der Theorie der grossen Planeten ist ς'_n und $\varkappa'_n$, und es ist

(114b)
$$\varsigma_n = \mu_3\,\varsigma'_n - c + \mu_3\,c'$$
$$\Gamma_n = \Gamma'_n + \varsigma'_n B$$
$$\omega_n = \Gamma_n + \varsigma_n v.$$

www.libtool.com.cn

Damit ist (ϱ) erledigt, da es erst wieder Zusätze aus dem dritten Grade erhält und wir diese fortlassen wollen.

Die Integration von (110) soll nachher zugleich mit der Berechnung von a_0 und b_0, soweit es zweiten Grades ist, und der von γ erfolgen.

Ehe wir jedoch zur Ermittlung der exargumentalen Glieder dritten Grades schreiten, wollen wir bedenken, dass in (109) aus den exargumentalen Gliedern ersten Grades und zweiter Ordnung wieder solche zweiten und dritten Grades und dritter Ordnung entstehen, die wir auch mitnehmen müssen, und ebenso aus den exargumentalen Gliedern zweiten Grades solche dritten Grades und dritter Ordnung. Wenden wir also auf (109) nochmals die partielle Integration an gemäss Formel (91), setzen $\frac{d\overline{V}_1}{dv}$ gleich in periodischer Form an und multiplizieren dies aus, womit wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
(115)\quad \left.\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \end{matrix}\right\} = {} & \frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2^2}{2(1+\delta_1)(2+\delta_1)}\int \eta^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w+v)\,dv \qquad \pm\frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2^2}{2\delta_1^2}\int \eta^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-v)\,dv \\
& + \frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2\gamma_3}{2(1+\delta_1)(2+\delta_1)}\int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1+v)\,dv \pm\frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2\gamma_3}{2\delta_1^2}\int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1-v)\,dv \\
& + \frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2\gamma_3}{2(1+\delta_1)(2+\delta_1)}\int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1+v)\,dv \pm\frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2\gamma_3}{2\delta_1^2}\int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1-v)\,dv \\
& + \frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3^2}{2(1+\delta_1)(2+\delta_1)}\int \eta'^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w+v)\,dv \qquad \pm\frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3^2}{2\delta_1^2}\int \eta'^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-v)\,dv \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \text{ etc. (analog für } 6w).
\end{aligned}
$$

Soweit jedoch Glieder dritten Grades entstehen, wollen wir $\frac{d\overline{V}}{dv}$ selbst in den Integralen belassen und nur die Teile mit einem kleinen Divisor berücksichtigen. Dann folgt aus (109) und (111):

$$
\begin{aligned}
(116)\quad \left.\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \end{matrix}\right\} = {} & \pm\frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2}{\delta_1^2}\int \eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(4w-\mathrm{v}-v)\frac{d\overline{V}_2}{dv}\,dv \qquad \pm\frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3}{\delta_1^2}\int \eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(4w-\mathrm{v}_1-v)\frac{d\overline{V}_2}{dv}\,dv \\
& \pm\frac{\mu^2 b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}\gamma_2}{\delta_1^2}\int \eta^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv \qquad \pm\frac{\mu^2 b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}\gamma_2}{\delta_1^2}\int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv \\
& \pm\frac{\mu^2 b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}\gamma_3}{\delta_1^2}\int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv \pm\frac{\mu^2 b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}\gamma_3}{\delta_1^2}\int \eta'^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv \\
& +\frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{14}}{\delta_1^2}\int \eta^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-2\mathrm{v}+v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv \qquad \pm\frac{\mu^2[b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{14}+b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}\gamma_2]}{\delta_1^2}\int \eta^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(6w-2\mathrm{v}-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv \\
& +\frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{15}}{\delta_1^2}\int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1+v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv \pm\frac{\mu^2[b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{15}+b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}\gamma_3+b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}\gamma_2]}{\delta_1^2}\int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv \\
& +\frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{16}}{\delta_1^2}\int \eta'^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-2\mathrm{v}_1+v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv \qquad \pm\frac{\mu^2[b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{16}+b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}\gamma_3]}{\delta_1^2}\int \eta'^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(6w-2\mathrm{v}_1-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv
\end{aligned}
$$

www.libtool.com.cn

$$+\frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{20}}{\delta_1^2}\int \sin^2 j \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-2v+v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv \qquad \pm\frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{20}}{\delta_1^2}\int \sin^2 j \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(6w-2v_1-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv$$

$$+\frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{21}}{\delta_1^2}\int \sin j \sin j' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-v-v_1+v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv \pm\frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{21}}{\delta_1^2}\int \sin j \sin j' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(6w-v-v_1-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv$$

$$+\frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{22}}{\delta_1^2}\int \sin^2 j' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-2v_1+v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv \qquad \pm\frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{22}}{\delta_1^2}\int \sin^2 j' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(6w-2v_1-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv$$

Wendet man auf (115) nun noch einmal die partielle Integration an, so wird man jetzt nur noch Glieder dritten Grades und schon vierter Ordnung erhalten. Auch diese sollen noch berücksichtigt werden. Dann sind die exargumentalen Glieder erschöpft, denn eine weitere Anwendung der partiellen Integration liefert bereits Glieder vierten Grades, welche wir vernachlässigen. Schreiben wir wieder nur die durch δ_1 vergrösserten Teile des Integrals hin:

$$(117)\quad \left.\begin{matrix} g_1\\ g_2\end{matrix}\right\} = \pm\frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2^2}{\delta_1^2}\int \eta^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv \pm\frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2\gamma_3}{\delta_1^2}\int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv$$

$$\pm\frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2\gamma_3}{\delta_1^2}\int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv \pm\frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3^2}{\delta_1^2}\int \eta'^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-v)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv$$

. . . . . etc. (analog für $6w$).

Integrieren wir nun (115) und setzen das Integral zusammen, so erhalten wir noch folgende Zusätze dritter Ordnung zu den Gliedern zweiten Grades:

$$(118)\quad \text{pars}\,\beta_7 = -\frac{(4+8\delta_1+5\delta_1^2)\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2^2}{2\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)^2} \qquad \text{pars}\,\beta_{17} = -\frac{(4+12\delta_1+11\delta_1^2)\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2^2}{6\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)(2+3\delta_1)}$$

$$\text{pars}\,\beta_8 = -\frac{(4+8\delta_1+5\delta_1^2)\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2\gamma_3}{2\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)^2} \qquad \text{pars}\,\beta_{18} = -\frac{(4+12\delta_1+11\delta_1^2)\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2\gamma_3}{3\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)(2+3\delta_1)}$$

$$\text{pars}\,\beta_9 = -\frac{(4+8\delta_1+5\delta_1^2)\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2\gamma_3}{2\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)^2} \qquad \text{pars}\,\beta_{19} = -\frac{(4+12\delta_1+11\delta_1^2)\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3^2}{6\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)(2+3\delta_1)}$$

$$\text{pars}\,\beta_{10} = -\frac{(4+8\delta_1+5\delta_1^2)\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3^2}{2\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)^2}$$

Dann haben wir in den Formeln (58), (80), (112), (118) die definitiven Werte der β_s nullten, ersten und zweiten Grades, soweit sie zu charakteristischen Argumenten gehören, mit der vorgeschriebenen Genauigkeit ermittelt.

Um die Glieder dritten Grades zu erhalten, brauchen wir nur für $\frac{d\overline{V}}{dv}$ den Ansatz in den Gleichungen (106), (107), (116), (117) einzusetzen, dann auszumultiplizieren unter Berücksichtigung der D-Glieder. Darauf ist die Integration auszuführen und das Integral zusammenzustellen nach der Formel:

$$R_s = g_1 \sin v - g_2 \cos v.$$

www.libtool.com.cn

Diese recht mühsamen und interesselosen Rechnungen sollen hier nicht angeführt werden, da sie keine Schwierigkeit bieten. Die Resultate für die Glieder dritten Grades werden lauten, wenn wir noch die C-Glieder aus S_3 in R_3 mitnehmen, die aus R_2 kommenden exargumentalen Teile in $T_e R_3$ dagegen vernachlässigen, was einem Fehler v. d. Ord. $\frac{m'^3}{\delta_1}$ gleichkommt:

(119) $R_3 =$

$$
\begin{array}{llll}
2\alpha_{40}\eta^3\cos(2w-v) & +\beta_{46}\eta^3\cos(4w-v) & +\beta_{52}\eta^3\cos(4w-3v) & +2\alpha_{56}\eta^3\cos(6w-3v)\\
+2\alpha_{41}\eta^2\eta'\cos(2w-2v+v_1) & +\beta_{47}\eta^2\eta'\cos(4w-2v+v_1) & +\beta_{53}\eta^2\eta'\cos(4w-2v-v_1) & +2\alpha_{57}\eta^2\eta'\cos(6w-2v-v_1)\\
+2\alpha_{42}\eta^2\eta'\cos(2w-v_1) & +\beta_{48}\eta^2\eta'\cos(4w-v_1) & +\beta_{54}\eta\eta'^2\cos(4w-v-2v_1) & +2\alpha_{58}\eta\eta'^2\cos(6w-v-2v_1)\\
+2\alpha_{43}\eta\eta'^2\cos(2w-v) & +\beta_{49}\eta\eta'^2\cos(4w-v) & +\beta_{55}\eta'^3\cos(4w-3v_1) & +2\alpha_{59}\eta'^3\cos(6w-3v_1)\\
+2\alpha_{44}\eta\eta'^2\cos(2w+v-2v_1) & +\beta_{50}\eta\eta'^2\cos(4w+v-2v_1) & & \\
+2\alpha_{45}\eta'^3\cos(2w-v_1) & +\beta_{51}\eta'^3\cos(4w-v_1) & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
+\beta_{60}\eta^3\cos(8w-3v) & +2\alpha_{64}\eta\sin^2 j\cos(2w-2v+v) & +\beta_{70}\eta\sin^2 j\cos(4w-2v+v)\\
+\beta_{61}\eta^2\eta'\cos(8w-2v-v_1) & +2\alpha_{65}\eta'\sin^2 j\cos(2w-2v+v_1) & +\beta_{71}\eta'\sin^2 j\cos(4w-2v+v_1)\\
+\beta_{62}\eta\eta'^2\cos(8w-v-2v_1) & +2\alpha_{66}\eta\sin j\sin j'\cos(2w-v-v_1+v) & +\beta_{72}\eta\sin j\sin j'\cos(4w-v-v_1+v)\\
+\beta_{63}\eta'^3\cos(8w-3v_1) & +2\alpha_{67}\eta'\sin j\sin j'\cos(2w-v-v_1+v_1) & +\beta_{73}\eta'\sin j\sin j'\cos(4w-v-v_1+v_1)\\
 & +2\alpha_{68}\eta\sin^2 j'\cos(2w-2v_1+v) & +\beta_{74}\eta\sin^2 j'\cos(4w-2v_1+v)\\
 & +2\alpha_{69}\eta'\sin^2 j'\cos(2w-2v_1+v_1) & +\beta_{75}\eta'\sin^2 j'\cos(4w-2v_1+v_1)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
+\beta_{76}\eta\sin^2 j\cos(4w-2v-v) & +\beta_{82}\eta\sin^2 j\cos(4w-v) & +\beta_{80}\eta\sin j\sin j'\cos(4w-v+v_1-v)\\
+\beta_{77}\eta'\sin^2 j\cos(4w-2v-v_1) & +\beta_{83}\eta'\sin^2 j\cos(4w-v_1) & +\beta_{87}\eta'\sin j\sin j'\cos(4w-v+v_1-v_1)\\
+\beta_{78}\eta\sin j\sin j'\cos(4w-v-v_1-v) & +\beta_{84}\eta\sin j\sin j'\cos(4w+v-v_1-v) & +\beta_{88}\eta\sin^2 j'\cos(4w-v)\\
+\beta_{79}\eta'\sin j\sin j'\cos(4w-v-v_1-v_1) & +\beta_{85}\eta'\sin j\sin j'\cos(4w+v-v_1-v_1) & +\beta_{89}\eta'\sin^2 j'\cos(4w-v_1)\\
+\beta_{80}\eta\sin^2 j'\cos(4w-2v_1-v) & & \\
+\beta_{81}\eta'\sin^2 j'\cos(4w-2v_1-v_1) & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
+2\alpha_{90}\eta\sin^2 j\cos(6w-2v-v) & +\beta_{96}\eta\sin^2 j\cos(8w-2v-v)\\
+2\alpha_{91}\eta'\sin^2 j\cos(6w-2v-v_1) & +\beta_{97}\eta'\sin^2 j\cos(8w-2v-v_1)\\
+2\alpha_{92}\eta\sin j\sin j'\cos(6w-v-v_1-v) & +\beta_{98}\eta\sin j\sin j'\cos(8w-v-v_1-v)\\
+2\alpha_{93}\eta'\sin j\sin j'\cos(6w-v-v_1-v_1) & +\beta_{99}\eta'\sin j\sin j'\cos(8w-v-v_1-v_1)\\
+2\alpha_{94}\eta\sin^2 j'\cos(6w-2v_1-v) & +\beta_{100}\eta\sin^2 j'\cos(8w-2v_1-v)\\
+2\alpha_{95}\eta'\sin^2 j'\cos(6w-2v_1-v_1) & +\beta_{101}\eta'\sin^2 j'\cos(8w-2v_1-v_1)
\end{array}
$$

Die Werte der Koefficienten sind folgende:

(120)
$$\beta_{46} = -\frac{\mu(b_{2\cdot2\cdot0}+b^{-2}_{6\cdot2\cdot0})\gamma_2}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2[2(\delta_1 b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}+\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2)\gamma_2+\delta_1 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{14}]\gamma_2}{4\delta_1^4}$$

$$\beta_{47} = -\frac{\mu(b^{-1}_{2\cdot1\cdot1}\gamma_2+b^{-2}_{6\cdot2\cdot0}\gamma_2)}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2[2(\delta_1 b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}+\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2)\gamma_2+\delta_1 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{14}]\gamma_2}{4\delta_1^4}$$

www.libtool.com.cn

(120)
$$\beta_{48} = -\frac{\mu(b^{+1}_{2\cdot1\cdot1}+b^{-2}_{6\cdot1\cdot1})\gamma_2+\mu b_{2\cdot2\cdot0}\gamma_3}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2[2(\delta_1 b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}+\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3)\gamma_2+(2\delta_1 b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}+\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2)\gamma_3+\delta_1 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{15}]\gamma_2}{4\delta_1^4}$$

$$\beta_{49} = -\frac{\mu(b^{-1}_{2\cdot1\cdot1}+b^{-2}_{6\cdot1\cdot1})\gamma_3+\mu b_{2\cdot0\cdot2}\gamma_2}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2[2(\delta_1 b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}+\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3)\gamma_2+(2\delta_1 b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}+\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2)\gamma_3+\delta_1 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{15}]\gamma_3}{4\delta_1^4}$$

$$\beta_{50} = -\frac{\mu(b^{+1}_{2\cdot1\cdot1}\gamma_3+b^{-2}_{6\cdot0\cdot2}\gamma_2)}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2[2(\delta_1 b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}+\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3)\gamma_3+\delta_1 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{16}]\gamma_2}{4\delta_1^4}$$

$$\beta_{51} = -\frac{\mu(b_{2\cdot0\cdot2}+b^{-2}_{6\cdot0\cdot2})\gamma_3}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2[2(\delta_1 b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}+\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3)\gamma_3+\delta_1 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{16}]\gamma_3}{4\delta_1^4}$$

$$\beta_{52} = \frac{\mu b^{-2}_{2\cdot2\cdot0}\gamma_3}{4\delta_1^2} + \frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2\gamma_{14}}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{53} = \frac{\mu(b^{-2}_{2\cdot1\cdot1}\gamma_2+b^{-2}_{2\cdot2\cdot0}\gamma_3)}{4\delta_1^2} + \frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}(\gamma_2\gamma_{15}+\gamma_3\gamma_{14})}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{54} = \frac{\mu(b^{-2}_{2\cdot0\cdot2}\gamma_2+b^{-2}_{2\cdot1\cdot1}\gamma_3)}{4\delta_1^2} + \frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}(\gamma_2\gamma_{16}+\gamma_3\gamma_{15})}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{55} = \frac{\mu b^{-2}_{2\cdot0\cdot2}\gamma_3}{4\delta_1^2} + \frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3\gamma_{16}}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{60} = -\frac{\mu[b^{-2}_{6\cdot2\cdot0}\gamma_2+b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}\gamma_{14}]}{8\delta_1^2} - \frac{\mu^2[(\delta_1 b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}+\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2)\gamma_2+2\delta_1 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{14}]\gamma_2}{8\delta_1^4}$$

$$\beta_{61} = -\frac{\mu[b^{-2}_{6\cdot1\cdot1}\gamma_2+b^{-2}_{6\cdot2\cdot0}\gamma_3+b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}\gamma_{14}+b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}\gamma_{15}]}{8\delta_1^2} - \frac{\mu^2[2(\delta_1 b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}+\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2)\gamma_2\gamma_3+(\delta_1 b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}+\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3)\gamma_2^2+2\delta_1(\gamma_2\gamma_{15}+\gamma_3\gamma_{14})b_{2\cdot0}}{8\delta_1^4}$$

$$\beta_{62} = -\frac{\mu[b^{-2}_{6\cdot0\cdot2}\gamma_2+b^{-2}_{6\cdot1\cdot1}\gamma_3+b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}\gamma_{15}+b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}\gamma_{16}]}{8\delta_1^2} - \frac{\mu^2[2(\delta_1 b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}+\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3)\gamma_2\gamma_3+(\delta_1 b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}+\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2)\gamma_3^2+2\delta_1(\gamma_2\gamma_{16}+\gamma_3\gamma_{15})b_{2\cdot0}}{8\delta_1^4}$$

$$\beta_{63} = -\frac{\mu[b^{-2}_{6\cdot0\cdot2}\gamma_3+b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}\gamma_{16}]}{8\delta_1^2} - \frac{\mu^2[(\delta_1 b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}+\mu b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3)\gamma_3+2\delta_1 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_{16}]\gamma_3}{8\delta_1^4}$$

$$\beta_{70} = -\frac{\mu\bar{b}^{-2}_{6\cdot2\cdot0}\gamma_2}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2\gamma_{30}}{4\delta_1^3} \qquad \beta_{76} = \frac{\mu\bar{b}^{-2}_{2\cdot2\cdot0}\gamma_2}{4\delta_1^2} + \frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2\gamma_{30}}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{71} = -\frac{\mu\bar{b}^{-2}_{6\cdot2\cdot0}\gamma_3}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3\gamma_{30}}{4\delta_1^3} \qquad \beta_{77} = \frac{\mu\bar{b}^{-2}_{2\cdot2\cdot0}\gamma_3}{4\delta_1^2} + \frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3\gamma_{30}}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{72} = -\frac{\mu\bar{b}^{-2}_{6\cdot1\cdot1}\gamma_2}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2\gamma_{31}}{4\delta_1^3} \qquad \beta_{78} = \frac{\mu\bar{b}^{-2}_{2\cdot1\cdot1}\gamma_2}{4\delta_1^2} + \frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2\gamma_{31}}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{73} = -\frac{\mu\bar{b}^{-2}_{6\cdot1\cdot1}\gamma_3}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3\gamma_{31}}{4\delta_1^3} \qquad \beta_{79} = \frac{\mu\bar{b}^{-2}_{2\cdot1\cdot1}\gamma_3}{4\delta_1^2} + \frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3\gamma_{31}}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{74} = -\frac{\mu\bar{b}^{-2}_{6\cdot0\cdot2}\gamma_2}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2\gamma_{32}}{4\delta_1^3} \qquad \beta_{80} = \frac{\mu\bar{b}^{-2}_{2\cdot0\cdot2}\gamma_2}{4\delta_1^2} + \frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2\gamma_{32}}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{75} = -\frac{\mu\bar{b}^{-2}_{6\cdot0\cdot2}\gamma_3}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3\gamma_{32}}{4\delta_1^3} \qquad \beta_{81} = \frac{\mu\bar{b}^{-2}_{2\cdot0\cdot2}\gamma_3}{4\delta_1^2} + \frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3\gamma_{32}}{4\delta_1^3}$$

www.libtool.com.cn

(120)
$$\beta_{96} = -\frac{\mu[\overline{b}^{-2}_{6\cdot2\cdot0}\gamma_2 + b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}\gamma_{30}]}{8\delta_1^2} - \frac{2\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2\gamma_{30}}{8\delta_1^3} \qquad \beta_{82} = -\frac{\mu\overline{b}_{2\cdot2\cdot0}\gamma_2}{4\delta_1^2}$$

$$\beta_{97} = -\frac{\mu[\overline{b}^{-2}_{6\cdot2\cdot0}\gamma_3 + b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}\gamma_{30}]}{8\delta_1^2} - \frac{2\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3\gamma_{30}}{8\delta_1^3} \qquad \beta_{83} = -\frac{\mu\overline{b}_{2\cdot2\cdot0}\gamma_3}{4\delta_1^2}$$

$$\beta_{98} = -\frac{\mu[\overline{b}^{-2}_{6\cdot1\cdot1}\gamma_2 + b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}\gamma_{31}]}{8\delta_1^2} - \frac{2\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2\gamma_{31}}{8\delta_1^3} \qquad \beta_{84} = -\frac{\mu\overline{b}^{+1}_{2\cdot1\cdot1}\gamma_2}{4\delta_1^2}$$

$$\beta_{99} = -\frac{\mu[\overline{b}^{-2}_{6\cdot1\cdot1}\gamma_3 + b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}\gamma_{31}]}{8\delta_1^2} - \frac{2\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3\gamma_{31}}{8\delta_1^3} \qquad \beta_{85} = -\frac{\mu\overline{b}^{+1}_{2\cdot1\cdot1}\gamma_3}{4\delta_1^2}$$

$$\beta_{100} = -\frac{\mu[\overline{b}^{-2}_{6\cdot0\cdot2}\gamma_2 + b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}\gamma_{32}]}{8\delta_1^2} - \frac{2\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_2\gamma_{32}}{8\delta_1^3} \qquad \beta_{86} = -\frac{\mu\overline{b}^{-1}_{2\cdot1\cdot1}\gamma_2}{4\delta_1^2}$$

$$\beta_{101} = -\frac{\mu[\overline{b}^{-2}_{6\cdot0\cdot2}\gamma_3 + b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}\gamma_{32}]}{8\delta_1^2} - \frac{2\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}\gamma_3\gamma_{32}}{8\delta_1^3} \qquad \beta_{87} = -\frac{\mu\overline{b}^{-1}_{2\cdot1\cdot1}\gamma_3}{4\delta_1^2}$$

$$\beta_{88} = -\frac{\mu\overline{b}_{2\cdot0\cdot2}\gamma_2}{4\delta_1^2}$$

$$\beta_{89} = -\frac{\mu\overline{b}_{2\cdot0\cdot2}\gamma_3}{4\delta_1^2}.$$

Wie man aus diesen Gliedern ersieht, ist die Reihe der exargumentalen Teile eine endliche innerhalb der einzelnen Grade. Während in R_1 nur die Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ auftritt, — die γ_h in $\frac{d\overline{V}}{dv}$ vorläufig v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ angenommen, — kommen in R_2 schon vor $\frac{m'^2}{\delta_1^2} + \frac{m'^3}{\delta_1^5}$, und in R_3 $\frac{m'^2}{\delta_1^2} + \frac{m'^3}{\delta_1^5} + \frac{m'^4}{\delta_1^7}$. Es entspricht dies ganz unserer Voraussetzung auf pag. 65. Der Fehler, der entsteht durch Vernachlässigung der Teile des Integrals, welche keinen kleinen Divisor haben, wird demnach in R_3 v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1} + \frac{m'^3}{\delta_1^2} + \frac{m'^4}{\delta_1^3}$ und ist in Anbetracht dessen, dass die aus der Störungsfunktion kommenden Glieder v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ schon vernachlässigt wurden, vollständig gerechtfertigt. Die C-Glieder waren in R_2 v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$, und ihre exargumentalen Zusätze zu R_3 würden demnach v. d. Ord. $\frac{m'^3}{\delta_1^7}$ werden. Ihre Vernachlässigung ist also ebenfalls gerechtfertigt. Die Reihe der exargumentalen Glieder hat Herr Ludendorff in Bezug auf den ersten und zweiten Grad mit derselben Genauigkeit hergestellt, wenngleich auch die Formeln in etwas anderer Gestalt erscheinen, bedingt durch das von ihm angewandte Integrationsverfahren.

Würde man die Reihe der exargumentalen Glieder in R weiter fortsetzen wollen, so käme man bereits auf den vierten Grad und zu Gliedern v. d. Ord.

www.libtool.com.cn

$\frac{m'^2}{\delta_1^2}+\cdots+\frac{m'^5}{\delta_1^5}$. Es ist für mittlere Excentricitäten $\varkappa^2 = m'$, also wird der Fehler für den Grenzwert des δ_1 v. d. Ord. der Excentricität, was durch die hier im Divisor auftretenden grösseren Zahlenfaktoren etwas günstiger wird. Im Grenzfalle von δ_1 tritt also die langsame Konvergenz der Reihe schon störend hervor. Für die Zwecke abgekürzter Tafeln dürfte die Mitnahme der exargumentalen Teile dritten Grades hier vollständig ausreichen, für eine strenge Darstellung des Planetenortes jedoch kaum. Für charakteristische Planeten, wo $\delta_1^2 \gtrless m'$ ist, wird der Fehler kleiner als $\frac{m'^2}{\delta_1}$. Hier ist die Vernachlässigung vollkommen gerechtfertigt, ja sogar schon die der Glieder dritten Grades bei Excentricitäten bis zu 6^0.

Ausserdem ist zu bedenken, dass die exargumentalen Glieder höherer als zweiter Ordnung in R_2 nur in den D-Gliedern auftreten, dass also diese gefährlichen Glieder in V nicht weiter vergrössert werden, und dass die exargumentalen C-Glieder dritten Grades v. d. Ord. $\frac{m'^3}{\delta_1^2}$ sind.

---

6) Um die exargumentalen Glieder aus $W = K + V$ zu erhalten, benutzen wir folgenden Ansatz, den man ganz entsprechend dem für S erhält:

$$K_1 = 2\mu\gamma_1 \int \cos 2w \frac{d\overline{V}_1}{dv}\, dv + 3\mu\beta_1^2 \int \cos 4w \frac{d\overline{V}_1}{dv}\, dv. \tag{121}$$

$$\begin{aligned} K_2 = {} & 2\mu\gamma_1 \int \cos 2w \frac{d\overline{V}_2}{dv}\, dv + 3\mu\beta_1^2 \int \cos 4w \frac{d\overline{V}_2}{dv}\, dv \\ & + 4\mu\gamma_4 \int \eta \cos(4w - \mathrm{v}) \frac{d\overline{V}_1}{dv} dv + 4\mu\gamma_5 \int \eta' \cos(4w - \mathrm{v}_1) \frac{d\overline{V}_1}{dv} dv + 2\mu\gamma_6 \int \eta \cos(2w + \mathrm{v}) \frac{d\overline{V}_1}{dv} dv. \end{aligned} \tag{122}$$

In dem Glied mit β_1^2 ist δ_1 im Nenner gegen die Einheit vernachlässigt. Der Fehler im Integral ist v. d. Ord. $\frac{m'^3}{\delta_1^2}$. Die aus (121) und (122) entstehenden exargumentalen Glieder dritten Grades sind fortzulassen, weil ein kleiner Divisor nicht auftritt, und sie v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ werden. Andrerseits vernachlässigen wir in K die aus der Störungsfunktion kommenden Glieder dritten Grades und v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$. Wir werden demnach exargumentale Glieder dritten Grades nur in V zu bilden haben. Es ist:

$$V_2 = \frac{2\mu\gamma_2}{\delta_1} \int \eta \cos(2w - \mathrm{v}) \frac{d\overline{V}_1}{dv}\, dv + \frac{2\mu\gamma_3}{\delta_1} \int \eta' \cos(2w - \mathrm{v}_1) \frac{d\overline{V}_1}{dv}\, dv. \tag{123}$$

www.libtool.com.cn

$$(124)\qquad V_2 = \frac{2\mu\gamma_2}{\delta_1}\int \eta\cos(2w-\mathrm{v})\frac{d\overline{V}_2}{dv}\,dv + \frac{2\mu\gamma_3}{\delta_1}\int \eta'\cos(2w-\mathrm{v}_1)\frac{d\overline{V}_2}{dv}\,dv.$$

Setzt man für $\frac{d\overline{V}}{dv}$ den Ansatz (39) in (121) und (123) ein und multipliziert die periodischen Aggregate aus, so erhält man folgende Terme:

$$\begin{aligned}(121a)\qquad K_1 = {} & \mu\gamma_1\gamma_2\int \eta\cos(4w-\mathrm{v})\,dv + \mu\gamma_1\gamma_3\int \eta'\cos(4w-\mathrm{v}_1)\,dv\\ & + \tfrac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_2\int \eta\cos(2w+\mathrm{v})\,dv + \tfrac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_3\int \eta'\cos(2w+\mathrm{v}_1)\,dv\\ & + \tfrac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_2\int \eta\cos(6w-\mathrm{v})\,dv + \tfrac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_3\int \eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1)\,dv\\ & + \mu\gamma_1\gamma_2\int \eta\cos\mathrm{v}\,dv \qquad + \mu\gamma_1\gamma_3\int \eta'\cos\mathrm{v}_1\,dv\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(123a)\quad V_2 = {} & \frac{\mu\gamma_2^2}{\delta_1}\int \eta^2\cos(4w-2\mathrm{v})\,dv + \frac{2\mu\gamma_2\gamma_3}{\delta_1}\int \eta\eta'\cos(4w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\,dv + \frac{\mu\gamma_3^2}{\delta_1}\int \eta'^2\cos(4w-2\mathrm{v}_1)\,dv\\ & + \frac{\mu\gamma_2^2}{\delta_1}\int \eta^2\,dv \qquad + \frac{2\mu\gamma_2\gamma_3}{\delta_1}\int \eta\eta'\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\,dv \qquad + \frac{\mu\gamma_3^2}{\delta_1}\int \eta'^2\,dv.\end{aligned}$$

Wenden wir auf gewisse Glieder in (121a) und (123a) nochmals die partielle Integration an:

$$(125)\quad K_2 = 4\mu^2\gamma_1\gamma_2\int \eta\cos(4w-\mathrm{v})\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv + 4\mu^2\gamma_1\gamma_3\int \eta'\cos(4w-\mathrm{v}_1)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv.$$

Hier haben wir δ_1 im Nenner gegen die Einheit vernachlässigt. Der Fehler ist v. d. Ord. $\frac{m'^3}{\delta_1^2}$, also die Vernachlässigung vollkommen gerechtfertigt, da im Integral kein kleiner Divisor hinzutritt.

$$\begin{aligned}(126)\quad V_3 = {} & \frac{2\mu^2\gamma_2^2}{\delta_1^2}\int \eta^2\cos(4w-2\mathrm{v})\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv + \frac{4\mu^2\gamma_2\gamma_3}{\delta_1^2}\int \eta\eta'\cos(4w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv\\ & + \frac{2\mu^2\gamma_3^2}{\delta_1^2}\int \eta'^2\cos(4w-2\mathrm{v}_1)\frac{d\overline{V}_1}{dv}\,dv.\end{aligned}$$

Wir werden demnach aus (125) und (126) Glieder zweiten resp. dritten Grades und dritter Ordnung bekommen. Die andern Glieder in (121a) haben wir nicht berücksichtigt, denn sie geben Glieder zweiten Grades und v. d. Ord. $\frac{m'^4}{\delta_1^4}$ im Integral von K, d. h. für den Grenzwert von δ_1 v. d. Ord. $\frac{m'^3}{\delta_1}$. Man erhält nun durch Einführung des Ansatzes, Ausmultiplizieren und gewöhnliche Integration folgende Zusätze ersten und zweiten Grades in W aus den Formeln (121a), (122), (123a), (125), (124), (126), indem man die A-Glieder vorläufig noch fortlässt:

www.libtool.com.cn

(127) In K_1 und K_2,

$$\text{pars } W^{+1}_{0\cdot1\cdot0} = \frac{\mu\gamma_1\gamma_2}{1-\varsigma} \quad \text{pars } \gamma_4 = \frac{\mu\gamma_1\gamma_2}{1+2\delta_1} \quad \text{pars } \gamma_6 = \frac{\frac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_2}{2+\delta_1} \quad \text{pars } W^{-1}_{6\cdot1\cdot0} = \frac{\frac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_2}{2+3\delta_1}$$

$$\text{pars } W^{+1}_{0\cdot0\cdot1} = \frac{\mu\gamma_1\gamma_3}{1-\varsigma} \quad \text{pars } \gamma_5 = \frac{\mu\gamma_1\gamma_3}{1+2\delta_1} \quad \text{pars } W^{+1}_{2\cdot0\cdot1} = \frac{\frac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_3}{2+\delta_1} \quad \text{pars } W^{-1}_{6\cdot0\cdot1} = \frac{\frac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_3}{2+3\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_7 = \frac{2\mu(\gamma_4+\mu\gamma_1\gamma_3)\gamma_2}{1+\delta_1} \qquad \text{pars } \gamma_9 = \frac{2\mu(\gamma_4+\mu\gamma_1\gamma_3)\gamma_3}{1+\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_8 = \frac{2\mu(\gamma_5+\mu\gamma_1\gamma_3)\gamma_2}{1+\delta_1} \qquad \text{pars } \gamma_{10} = \frac{2\mu(\gamma_5+\mu\gamma_1\gamma_3)\gamma_3}{1+\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{11} = -\frac{\mu\gamma_1\gamma_{14}}{1-\delta_1} \qquad \text{pars } \gamma_{17} = \frac{\mu\gamma_1\gamma_{14}+2\mu(\gamma_4+\mu\gamma_1\gamma_2)\gamma_2}{1+3\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{12} = -\frac{\mu\gamma_1\gamma_{15}}{1-\delta_1} \qquad \text{pars } \gamma_{18} = \frac{\mu\gamma_1\gamma_{15}+2\mu(\gamma_4+\mu\gamma_1\gamma_2)\gamma_3+2\mu(\gamma_5+\mu\gamma_1\gamma_3)\gamma_2}{1+3\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{13} = -\frac{\mu\gamma_1\gamma_{16}}{1-\delta_1} \qquad \text{pars } \gamma_{19} = \frac{\mu\gamma_1\gamma_{16}+2\mu(\gamma_5+\mu\gamma_1\gamma_3)\gamma_3}{1+3\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{21} = \frac{\mu\gamma_2\gamma_6}{2+2\delta_1} \qquad \text{pars } W^{-2}_{8\cdot2\cdot0} = \frac{\frac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_{14}}{2+4\delta_1} \qquad \text{pars } W^{-2}_{8\cdot0\cdot2} = \frac{\frac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_{16}}{2+4\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{22} = \frac{\mu\gamma_3\gamma_6}{2+2\delta_1} \qquad \text{pars } W^{-2}_{8\cdot1\cdot1} = \frac{\frac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_{15}}{2+4\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{27} = -\frac{\mu\gamma_1\gamma_{30}}{1-\delta_1} \qquad \text{pars } \gamma_{33} = \frac{\mu\gamma_1\gamma_{30}}{1+3\delta_1} \qquad \text{pars } \overline{W}^{-2}_{8\cdot2\cdot0} = \frac{\frac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_{30}}{2+4\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{28} = -\frac{\mu\gamma_1\gamma_{31}}{1-\delta_1} \qquad \text{pars } \gamma_{34} = \frac{\mu\gamma_1\gamma_{31}}{1+3\delta_1} \qquad \text{pars } \overline{W}^{-2}_{8\cdot1\cdot1} = \frac{\frac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_{31}}{2+4\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{29} = -\frac{\mu\gamma_1\gamma_{32}}{1-\delta_1} \qquad \text{pars } \gamma_{35} = \frac{\mu\gamma_1\gamma_{32}}{1+3\delta_1} \qquad \text{pars } \overline{W}^{-2}_{8\cdot0\cdot2} = \frac{\frac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_{32}}{2+4\delta_1}$$

in V_2,

$$\text{pars } \gamma'_{14} = \frac{\mu\gamma_2^2}{2\delta_1^2} \qquad \text{pars } \gamma'_{15} = \frac{\mu\gamma_2\gamma_3}{\delta_1^2} \qquad \text{pars } \gamma'_{16} = \frac{\mu\gamma_3^2}{2\delta_1^2}.$$

Damit haben wir für die Koefficienten in K_1 und K_2 sowie V_1 und V_2 die definitiven Werte erhalten. Ehe wir die exargumentalen Teile dritten Grades in K und V hinschreiben, wollen wir bedenken, dass durch die Gestalt der Differentialgleichung auch sehr grosse Glieder entstehen. Wir vernachlässigen ja die Glieder dritten Grades, soweit sie aus der Störungsfunktion kommen, d. h. Glieder v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ in der Differentialgleichung. Demnach könnten wir die hier in Frage kommenden Glieder auch vernachlässigen, da sie in K_2 v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ sind und in V_2 v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1^2}$ resp. $\frac{m'^2}{\delta_1^3}$. Wir wollen sie trotzdem berück-

www.libtool.com.cn

sichtigen, da sie in gewisser Hinsicht eine etwas andere Stellung einnehmen als die aus der Störungsfunktion kommenden Teile dritten Grades; denn sie entstehen schon aus Gliedern ersten und zweiten Grades und sind dadurch bedingt, dass die Differentialgleichungen selbst wieder keine geschlossenen Ausdrücke sind, sondern Reihen.

Zu diesem Zwecke geben wir der Differentialgleichung folgende Gestalt:

$$\frac{dK_3}{dv} = -2(\mathrm{R}_3)_{\mathrm{exarg.}} + 6\mathrm{R}_2\,\eta\cos\mathrm{v} - 3\eta^3 R_1 - 6R_1\eta^3\cos 2\mathrm{v}$$

$$\frac{dV_3}{dv} = (S_3 - 2R_3)_{\mathrm{exarg.}} + [6R_2 - 12R_1^2 - 24R_0R_2 + 6R_0S_2 + 6R_1S_1]\,\eta\cos\mathrm{v} - 3\eta^3 R_1 - 2R_1S_2 - 2R_2S_1 + 6R_1R_2.$$

Multiplizieren wir hier die periodischen Aggregate aus, berücksichtigen wir nur die C- und D-Glieder und integrieren diese Gleichungen sowie (124) und (126), welche die exargumentalen Glieder dritten Grades in V hervorrufen, so können wir dem Resultat folgende Form geben:

(128) $K_3 =$

$\gamma_{46}\eta^3\sin(4w-\mathrm{v})$ $+\gamma_{52}\eta^3\sin(4w-3\mathrm{v})$ $-2\beta_{60}\eta^3\sin(8w-3\mathrm{v})$
$-2\beta_{47}\eta^3\eta'\sin(4w-2\mathrm{v}+\mathrm{v}_1)$ $+\gamma_{53}\eta^3\eta'\sin(4w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$ $-2\beta_{61}\eta^3\eta'\sin(8w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$
$+\gamma_{48}\eta^2\eta'\sin(4w-\mathrm{v}_1)$ $+\gamma_{54}\eta\eta'^2\sin(4w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)$ $-2\beta_{62}\eta\eta'^2\sin(8w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)$
$-2\beta_{49}\eta\eta'^2\sin(4w-\mathrm{v})$ $+2\beta_{55}\eta'^3\sin(4w-3\mathrm{v}_1)$ $-2\beta_{63}\eta'^3\sin(8w-3\mathrm{v}_1)$
$+\gamma_{50}\eta\eta'^2\sin(4w+\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)$
$-2\beta_{51}\eta'^3\sin(4w-\mathrm{v}_1)$

$+\gamma_{70}\eta\sin^2 j\sin(4w-2\mathfrak{v}+\mathrm{v})$ $+\gamma_{76}\eta\sin^2 j\sin(4w-2\mathfrak{v}-\mathrm{v})$
$-2\beta_{71}\eta'\sin^2 j\sin(4w-2\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1)$ $+2\beta_{77}\eta'\sin^2 j\sin(4w-2\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)$
$+\gamma_{72}\eta\sin j\sin j'\sin(4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v})$ $+\gamma_{78}\eta\sin j\sin j'\sin(4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v})$
$-2\beta_{73}\eta'\sin j\sin j'\sin(4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1)$ $+2\beta_{79}\eta'\sin j\sin j'\sin(4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)$
$+\gamma_{74}\eta\sin^2 j'\sin(4w-2\mathfrak{v}_1+\mathrm{v})$ $+\gamma_{80}\eta\sin^2 j'\sin(4w-2\mathfrak{v}_1-\mathrm{v})$
$-2\beta_{75}\eta'\sin^2 j'\sin(4w-2\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1)$ $+2\beta_{81}\eta'\sin^2 j'\sin(4w-2\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)$

$-2\beta_{82}\eta\sin^2 j\sin(4w-\mathrm{v})$ $-2\beta_{86}\eta\sin j\sin j'\sin(4w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v})$
$-2\beta_{83}\eta'\sin^2 j\sin(4w-\mathrm{v}_1)$ $-2\beta_{87}\eta'\sin j\sin j'\sin(4w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)$
$-2\beta_{84}\eta\sin j\sin j'\sin(4w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v})$ $-2\beta_{88}\eta\sin^2 j'\sin(4w-\mathrm{v})$
$-2\beta_{85}\eta'\sin j\sin j'\sin(4w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)$ $-2\beta_{89}\eta'\sin^2 j'\sin(4w-\mathrm{v}_1)$

$-2\beta_{96}\eta\sin^2 j\sin(8w-2\mathfrak{v}-\mathrm{v})$ $-2\beta_{99}\eta'\sin j\sin j'\sin(8w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)$
$-2\beta_{97}\eta'\sin^2 j\sin(8w-2\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)$ $-2\beta_{100}\eta\sin^2 j'\sin(8w-2\mathfrak{v}_1-\mathrm{v})$
$-2\beta_{98}\eta\sin j\sin j'\sin(8w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v})$ $-2\beta_{101}\eta'\sin^2 j'\sin(8w-2\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)$

www.libtool.com.cn

Hier ist:

$$(129)\quad \gamma_{46} = -3(\beta_4-\beta_{14}+\tfrac{2}{3}\beta_{46}) \qquad \gamma_{52} = 3(\beta_4-\beta_{14}+\tfrac{2}{3}\beta_{52}) \qquad \gamma_{70} = 3\beta_{30}-2\beta_{70}$$
$$\gamma_{48} = -3(\beta_5-\beta_{15}+\tfrac{2}{3}\beta_{48}) \qquad \gamma_{53} = 3(\beta_5-\beta_{15}+\tfrac{2}{3}\beta_{53}) \qquad \gamma_{72} = 3\beta_{31}-2\beta_{72}$$
$$\gamma_{50} = 3\beta_{16}-2\beta_{50} \qquad \gamma_{54} = -3\beta_{16}+2\beta_{54} \qquad \gamma_{74} = 3\beta_{32}-2\beta_{74}$$
$$\gamma_{76} = -3\beta_{30}+2\beta_{76} \qquad \gamma_{78} = -3\beta_{31}+2\beta_{78} \qquad \gamma_{80} = -3\beta_{32}+2\beta_{80}.$$

Dagegen wird:

$$(130)\quad V_3 =$$
$$\gamma_{40}\eta^3\sin(2w-\mathfrak{v}) \quad +\gamma_{56}\eta^3\sin(6w-3\mathfrak{v}) \quad +\gamma_{64}\eta\sin^2 j\sin(2w-2\mathfrak{v}+\mathfrak{v})$$
$$+\gamma_{41}\eta^3\eta'\sin(2w-2\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) \quad +\gamma_{57}\eta^3\eta'\sin(6w-2\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) \quad +\gamma_{65}\eta'\sin^2 j\sin(2w-2\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1)$$
$$+\gamma_{42}\eta^3\eta'\sin(2w-\mathfrak{v}_1) \quad +\gamma_{58}\eta\eta'^3\sin(6w-\mathfrak{v}-2\mathfrak{v}_1) \quad +\gamma_{66}\eta\sin j\sin j'\sin(2w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v})$$
$$+\gamma_{43}\eta\eta'^3\sin(2w-\mathfrak{v}) \quad +\gamma_{59}\eta'^3\sin(6w-3\mathfrak{v}_1) \quad +\gamma_{67}\eta'\sin j\sin j'\sin(2w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_1)$$
$$+\gamma_{44}\eta\eta'^3\sin(2w+\mathfrak{v}-2\mathfrak{v}_1) \quad +\gamma_{68}\eta\sin^2 j'\sin(2w-2\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v})$$
$$+\gamma_{45}\eta'^3\sin(2w-\mathfrak{v}_1) \quad +\gamma_{69}\eta'\sin^2 j'\sin(2w-2\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_1)$$

$$+\gamma_{102}\eta\sin^2 j\sin(2w-\mathfrak{v}) \quad +\gamma_{106}\eta\sin j\sin j'\sin(2w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}) \quad +\gamma_{90}\eta\sin^2 j\sin(6w-2\mathfrak{v}-\mathfrak{v})$$
$$+\gamma_{103}\eta'\sin^2 j\sin(2w-\mathfrak{v}_1) \quad +\gamma_{107}\eta'\sin j\sin j'\sin(2w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_1) \quad +\gamma_{91}\eta'\sin^2 j\sin(6w-2\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)$$
$$+\gamma_{104}\eta\sin j\sin j'\sin(2w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}) \quad +\gamma_{108}\eta\sin^2 j'\sin(2w-\mathfrak{v}) \quad +\gamma_{92}\eta\sin j\sin j'\sin(6w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v})$$
$$+\gamma_{105}\eta'\sin j\sin j'\sin(2w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_1) \quad +\gamma_{109}\eta'\sin^2 j'\sin(2w-\mathfrak{v}_1) \quad +\gamma_{93}\eta'\sin j\sin j'\sin(6w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_1)$$
$$+\gamma_{94}\eta\sin^2 j'\sin(6w-2\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v})$$
$$+\gamma_{95}\eta'\sin^2 j'\sin(6w-2\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_1).$$

Die Koefficienten werden hier:

$$(131)\quad \gamma_{40} = \frac{1}{\delta_1}\left[3(\beta_7+\beta_{11}-\alpha_{40})-3\beta_4(2\beta_2-\tfrac{1}{2}\alpha_2)-3\beta_1(2\beta_{14}-\tfrac{1}{2}\alpha_{14})-\beta_2(\alpha_{14}-3\beta_{14})-\alpha_2\beta_{14}+3\beta_4(\beta_7+\beta_{17})+\frac{\mu\gamma_2\gamma_{14}}{\delta_1}+\frac{\mu^2\gamma_2^2}{\delta_1^2}\right]$$

$$\gamma_{41} = \frac{1}{\delta_1}\left[3(\beta_9-\alpha_{41})-3\beta_4(2\beta_3-\tfrac{1}{2}\alpha_3)-\beta_3(\alpha_{14}-3\beta_{14})-\alpha_3\beta_{14}+3(\beta_4\beta_8+\beta_5\beta_{17})+\frac{\mu\gamma_3\gamma_{14}}{\delta_1}+\frac{\mu^2\gamma_2^2\gamma_3}{\delta_1^2}\right]$$

$$\gamma_{42} = \frac{1}{\delta_1}\left[3(\beta_8+\beta_{12}-\alpha_{42})-3\beta_5(2\beta_2-\tfrac{1}{2}\alpha_2)-3\beta_1(2\beta_{15}-\tfrac{1}{2}\alpha_{15})-\beta_2(\alpha_{15}-3\beta_{15})-\alpha_2\beta_{15}+3\beta_4(\beta_9+\beta_{18})+3\beta_5\beta_7+\frac{\mu\gamma_2\gamma_{15}}{\delta_1}+\frac{2\mu^2\gamma_2^2\gamma_3}{\delta_1^2}\right.$$

$$\gamma_{43} = \frac{1}{\delta_1}\left[3(\beta_{10}-\alpha_{43})-3\beta_5(2\beta_3-\tfrac{1}{2}\alpha_3)-\beta_3(\alpha_{15}-3\beta_{15})-\alpha_3\beta_{15}+3\beta_5(\beta_8+\beta_{18})+3\beta_4\beta_{10}+\frac{\mu\gamma_3\gamma_{15}}{\delta_1}+\frac{2\mu^2\gamma_2\gamma_3^2}{\delta_1^2}\right]$$

$$\gamma_{44} = \frac{1}{\delta_1}\left[3(\beta_{13}-\alpha_{44})-3\beta_1(2\beta_{16}-\tfrac{1}{2}\alpha_{16})-\beta_2(\alpha_{16}-3\beta_{16})-\alpha_2\beta_{16}+3\beta_5\beta_9+3\beta_4\beta_{19}+\frac{\mu\gamma_2\gamma_{16}}{\delta_1}+\frac{\mu^2\gamma_2\gamma_3^2}{\delta_1^2}\right]$$

$$\gamma_{45} = \frac{1}{\delta_1}\left[-3\alpha_{45}-\beta_3(\alpha_{16}-3\beta_{16})-\alpha_3\beta_{16}+3\beta_5(\beta_{10}+\beta_{19})+\frac{\mu\gamma_3\gamma_{16}}{\delta_1}+\frac{\mu^2\gamma_3^2}{\delta_1^2}\right]$$

$$\gamma_{56} = \frac{1}{3\delta_1}\left[3(\beta_{17}-\alpha_{56})-3\beta_4(2\beta_2-\tfrac{1}{2}\alpha_2)+3\beta_4\beta_{11}-3\beta_1(2\beta_{14}-\tfrac{1}{2}\alpha_{14})-\beta_2(\alpha_{14}-3\beta_{14})-\alpha_2\beta_{14}+\frac{\mu\gamma_2\gamma_{14}}{\delta_1}+\frac{\mu^2\gamma_2^2}{\delta_1^2}\right]$$

www.libtool.com.cn

(131) $$\gamma_{57} = \frac{1}{3\delta_1}\Big[3(\beta_{18}-\alpha_{57})-3\beta_4(2\beta_3-\tfrac{1}{2}\alpha_3)+3\beta_4\beta_{12}-3\beta_5(2\beta_2-\tfrac{1}{2}\alpha_2)+3\beta_5\beta_{11}-3\beta_1(2\beta_{15}-\tfrac{1}{2}\alpha_{15})-\beta_2(\alpha_{15}-3\beta_{15})$$
$$-\beta_3(\alpha_{14}-3\beta_{14})-\alpha_2\beta_{15}-\alpha_3\beta_{14}+\frac{\mu(\gamma_2\gamma_{15}+\gamma_3\gamma_{14})}{\delta_1}+\frac{3\mu^2\gamma_2^2\gamma_3}{\delta_1^2}\Big]$$

$$\gamma_{58} = \frac{1}{3\delta_1}\Big[3(\beta_{19}-\alpha_{58})-3\beta_5(2\beta_3-\tfrac{1}{2}\alpha_3)+3\beta_5\beta_{12}-3\beta_1(2\beta_{16}-\tfrac{1}{2}\alpha_{16})-\beta_2(\alpha_{16}-3\beta_{16})-\beta_3(\alpha_{15}-3\beta_{15})-\alpha_2\beta_{16}$$
$$-\alpha_3\beta_{15}+3\beta_4\beta_{13}+\frac{\mu(\gamma_2\gamma_{16}+\gamma_3\gamma_{15})}{\delta_1}+\frac{3\mu^2\gamma_2\gamma_3^2}{\delta_1^2}\Big]$$

$$\gamma_{59} = \frac{1}{3\delta_1}\Big[-3\alpha_{59}-\beta_3(\alpha_{16}-3\beta_{16})-\alpha_3\beta_{16}+3\beta_5\beta_{13}+\frac{\mu\gamma_3\gamma_{16}}{\delta_1}+\frac{\mu^2\gamma_3^2}{\delta_1^2}\Big]$$

$$\gamma_{64} = \frac{1}{\delta_1}\Big[3(\beta_{27}-\alpha_{64})-3\beta_1(2\beta_{30}-\tfrac{1}{2}\alpha_{30})-\beta_2(\alpha_{30}-3\beta_{30})-\alpha_2\beta_{30}+3\beta_4\beta_{33}+\frac{\mu\gamma_2\gamma_{30}}{\delta_1}\Big]$$

$$\gamma_{65} = \frac{1}{\delta_1}\Big[-3\alpha_{65}-\beta_3(\alpha_{30}-3\beta_{30})-\alpha_3\beta_{30}+3\beta_5\beta_{33}+\frac{\mu\gamma_3\gamma_{30}}{\delta_1}\Big]$$

$$\gamma_{66} = \frac{1}{\delta_1}\Big[3(\beta_{28}-\alpha_{66})-3\beta_1(2\beta_{31}-\tfrac{1}{2}\alpha_{31})-\beta_2(\alpha_{31}-3\beta_{31})-\alpha_2\beta_{31}+3\beta_4\beta_{34}+\frac{\mu\gamma_2\gamma_{31}}{\delta_1}\Big]$$

$$\gamma_{67} = \frac{1}{\delta_1}\Big[-3\alpha_{67}-\beta_3(\alpha_{31}-3\beta_{31})-\alpha_3\beta_{31}+3\beta_5\beta_{34}+\frac{\mu\gamma_3\gamma_{31}}{\delta_1}\Big]$$

$$\gamma_{68} = \frac{1}{\delta_1}\Big[3(\beta_{29}-\alpha_{68})-3\beta_1(2\beta_{32}-\tfrac{1}{2}\alpha_{32})-\beta_2(\alpha_{32}-3\beta_{32})-\alpha_2\beta_{32}+3\beta_4\beta_{35}+\frac{\mu\gamma_2\gamma_{32}}{\delta_1}\Big]$$

$$\gamma_{69} = \frac{1}{\delta_1}\Big[-3\alpha_{69}-\beta_3(\alpha_{32}-3\beta_{32})-\alpha_3\beta_{32}+3\beta_5\beta_{35}+\frac{\mu\gamma_3\gamma_{32}}{\delta_1}\Big]$$

$$\gamma_{90} = \frac{1}{3\delta_1}\Big[3(\beta_{33}-\alpha_{90})-3\beta_1(2\beta_{30}-\tfrac{1}{2}\alpha_{30})-\beta_2(\alpha_{30}-3\beta_{30})-\alpha_2\beta_{30}+3\beta_4\beta_{27}+\frac{\mu\gamma_2\gamma_{30}}{\delta_1}\Big]$$

$$\gamma_{91} = \frac{1}{3\delta_1}\Big[-3\alpha_{91}-\beta_3(\alpha_{30}-3\beta_{30})-\alpha_3\beta_{30}+3\beta_5\beta_{27}+\frac{\mu\gamma_3\gamma_{30}}{\delta_1}\Big]$$

$$\gamma_{92} = \frac{1}{3\delta_1}\Big[3(\beta_{34}-\alpha_{92})-3\beta_1(2\beta_{31}-\tfrac{1}{2}\alpha_{31})-\beta_2(\alpha_{31}-3\beta_{31})-\alpha_2\beta_{31}+3\beta_4\beta_{28}+\frac{\mu\gamma_2\gamma_{31}}{\delta_1}\Big]$$

$$\gamma_{93} = \frac{1}{3\delta_1}\Big[-3\alpha_{93}-\beta_3(\alpha_{31}-3\beta_{31})-\alpha_3\beta_{31}+3\beta_5\beta_{28}+\frac{\mu\gamma_3\gamma_{31}}{\delta_1}\Big]$$

$$\gamma_{94} = \frac{1}{3\delta_1}\Big[3(\beta_{35}-\alpha_{94})-3\beta_1(2\beta_{32}-\tfrac{1}{2}\alpha_{32})-\beta_2(\alpha_{32}-3\beta_{32})-\alpha_2\beta_{32}+3\beta_4\beta_{29}+\frac{\mu\gamma_2\gamma_{32}}{\delta_1}\Big]$$

$$\gamma_{95} = \frac{1}{3\delta_1}\Big[-3\alpha_{95}-\beta_3(\alpha_{32}-3\beta_{32})-\alpha_3\beta_{32}+3\beta_5\beta_{29}+\frac{\mu\gamma_3\gamma_{32}}{\delta_1}\Big]$$

$$\gamma_{102} = \frac{3}{\delta_1}(1+\beta_4)\beta_{28} \qquad \gamma_{103} = \frac{3\beta_5\beta_{28}}{\delta_1}$$

$$\gamma_{104} = \frac{3}{\delta_1}(\beta_{24}+\beta_4\beta_{25}) \qquad \gamma_{105} = \frac{3\beta_5\beta_{25}}{\delta_1} \qquad \gamma_{106} = \frac{3}{\delta_1}(\beta_{25}+\beta_4\beta_{24})$$

$$\gamma_{107} = \frac{3\beta_5\beta_{24}}{\delta_1} \qquad \gamma_{108} = \frac{3}{\delta_1}(1+\beta_4)\beta_{26} \qquad \gamma_{109} = \frac{3\beta_5\beta_{26}}{\delta_1}$$

www.libtool.com.cn

Somit hätten wir die definitiven Werte der Koefficienten dritten Grades in K und V erlangt und es gilt dann das auf pag. 64 und 65 Gesagte. Die Reihe der exargumentalen Glieder würde divergieren, wenn sie eine unendliche wäre, für den Grenzwert von δ_1, für $\delta_1 > \sqrt[3]{m'}$ schreitet sie dagegen nach Potenzen der Excentricität fort. Während in den Gliedern zweiten Grades in V die exargumentalen Teile v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^4}$ sind, sind sie im dritten Grade v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^4} + \frac{m'^3}{\delta_1^6}$. Im vierten Grade sind sie v. d. Ord. $\left(\frac{m'^2}{\delta_1^4} + \frac{m'^3}{\delta_1^6} + \frac{m'^4}{\delta_1^8}\right) \varkappa^4$. Also für mittlere Excentricitäten ($\varkappa^3 = m'$) und den Grenzwert des $\delta_1 = \sqrt[3]{m'^2}$ wird der durch Vernachlässigung der exargumentalen Glieder vierten Grades begangene Fehler zwischen den Grenzen $\frac{m'}{\delta_1}$ und $\frac{m'}{\delta_1^2}$ liegen. Der Fehler ist beträchtlich, und deswegen kann für die kritischen Planeten die Darstellung der Bewegung nur eine genäherte sein für endliche Zeiträume.

Bei charakteristischen Planeten wird der Fehler infolge Vernachlässigung der exargumentalen Glieder vierten Grades $> m'$ sein, und für Excentricitäten bis zu 6^0 ebenfalls $> m'$, wenn wir schon die exargumentalen Glieder vom dritten Grade fortlassen, denn hier fällt die Reihe rein nach Potenzen der Excentricität. Fassen wir dies zusammen mit dem über R_2 Gesagten, so ist der Schluss nicht unberechtigt, dass man für die Zwecke abgekürzter Tafeln bei charakteristischen Planeten ($\delta_1 > \sqrt[3]{m'}$) und mittleren Excentricitäten bis zu 10^0 nur die exargumentalen Teile dritten Grades in den C-Gliedern zu berücksichtigen braucht; bei Excentricitäten bis zu 5^0 und δ_1 erheblich $> \sqrt[3]{m'}$ wird man den dritten Grad gar nicht mitzunehmen brauchen. Bei kritischen Planeten $\sqrt[3]{m'} \geqq \delta_1 > \sqrt[3]{m'^2}$ ist die Mitnahme der exargumentalen Teile in den C- und D-Gliedern dritten Grades erforderlich, nur um den Planetenort genähert (innerhalb der Bogenminute) darzustellen. Eine strenge Darstellung der Bewegung dürfte sich in dem Grenzfalle des δ_1 mit Hilfe der partiellen Integration nicht mehr erreichen lassen und für kritische Planeten überhaupt nur mit bedeutenden Schwierigkeiten zu ermöglichen sein.

Zu bemerken ist noch, dass dies alles nur für endliche Zeiträume gilt, und dass wir hieraus nicht ohne weiteres auf eine Bewegung des betreffenden Planeten für mehr als 100 Jahre schliessen können. Streng kritische Planeten des Hecuba-Typus in unserem Sinne sind bis jetzt noch nicht entdeckt, dadurch wird die Wahrscheinlichkeit, die hier gegebene Methode überall anwenden zu können, fast zur Gewissheit.

Zur Feststellung dessen, inwieweit diese Schlüsse in der Praxis auch wirklich zutreffen, bedarf es selbstverständlich der numerischen Anwendung, und es wird im allgemeinen bei derartig kommensurablen Planeten erst bei der numerischen Rechnung festgestellt werden können, wie weit man zu gehen hat.

www.libtool.com.cn

Was die Ermittlung der Konstanten γ, γ_0, a_0 und b_0 betrifft, sowie der A-Glieder in S, R, V, so soll sie zusammen mit den Zusatzgliedern geleistet werden.

---

7) Die Ermittlung der exargumentalen Teile in $\mathfrak{Z}$ gestaltet sich wesentlich einfacher. Da $\mathfrak{Z}$ mindestens ersten Grades ist, so können nur exargumentale Glieder zweiter Ordnung im zweiten und dritten Grade auftreten, solche dritter Ordnung überhaupt nur im dritten Grade. Da die Differentialgleichung für $\mathfrak{Z}$ zweiter Ordnung ist, so müssen wir behufs Integration die Variation der Parameter anwenden. Die Entwicklungen gestalten sich analog denen für R und wir können daher sofort das Resultat hinschreiben.

$$(132)\quad \text{pars } \xi_4 = -\frac{(2+3\delta_1)\mu c_1\gamma_2}{2\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)} \qquad \text{pars } \xi_{15} = -\frac{(2+5\delta_1)\mu c_1\gamma_2}{6\delta_1^2(1+\delta_1)(2+3\delta_1)}$$

$$\text{pars } \xi_6 = -\frac{(2+3\delta_1)\mu c_1\gamma_3}{2\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)} \qquad \text{pars } \xi_{16} = -\frac{(2+5\delta_1)\mu c_1\gamma_3}{6\delta_1^2(1+\delta_1)(2+3\delta_1)}$$

$$\text{pars } \xi_8 = -\frac{(2+3\delta_1)\mu c_2\gamma_2}{2\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)} \qquad \text{pars } \xi_{17} = -\frac{(2+5\delta_1)\mu c_2\gamma_2}{6\delta_1^2(1+\delta_1)(2+3\delta_1)}$$

$$\text{pars } \xi_{10} = -\frac{(2+3\delta_1)\mu c_2\gamma_3}{2\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)} \qquad \text{pars } \xi_{18} = -\frac{(2+5\delta_1)\mu c_2\gamma_3}{6\delta_1^2(1+\delta_1)(2+3\delta_1)}$$

(133) $\mathfrak{Z}_3 =$

$$\begin{aligned}
&\xi_{20}\eta^3 \sin j \sin(4w-\mathfrak{v}) && +\xi_{24}\eta^2 \sin j' \sin(4w-\mathfrak{v}_1) && +\xi_{28}\eta^3 \sin j \sin(4w+\mathfrak{v}-2\mathfrak{v})\\
&+\xi_{21}\eta\eta' \sin j \sin(4w-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && +\xi_{25}\eta\eta' \sin j' \sin(4w-\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && +\xi_{29}\eta\eta' \sin j \sin(4w+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)\\
&+\xi_{22}\eta\eta' \sin j \sin(4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) && +\xi_{26}\eta\eta' \sin j' \sin(4w-\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) && +\xi_{30}\eta'^2 \sin j \sin(4w+\mathfrak{v}-2\mathfrak{v}_1)\\
&+\xi_{23}\eta'^2 \sin j \sin(4w-\mathfrak{v}) && +\xi_{27}\eta'^2 \sin j' \sin(4w-\mathfrak{v}_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\xi_{31}\eta^3 \sin j' \sin(4w+\mathfrak{v}_1-2\mathfrak{v}_1) && +\xi_{34}\eta^2 \sin j \sin(4w-\mathfrak{v}-2\mathfrak{v}) && +\xi_{37}\eta^3 \sin j' \sin(4w-\mathfrak{v}_1-2\mathfrak{v})\\
&+\xi_{32}\eta\eta' \sin j' \sin(4w+\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && +\xi_{35}\eta\eta' \sin j \sin(4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && +\xi_{38}\eta\eta' \sin j' \sin(4w-\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)\\
&+\xi_{33}\eta'^2 \sin j' \sin(4w+\mathfrak{v}_1-2\mathfrak{v}_1) && +\xi_{36}\eta'^2 \sin j \sin(4w-\mathfrak{v}-2\mathfrak{v}_1) && +\xi_{39}\eta'^2 \sin j' \sin(4w-\mathfrak{v}_1-2\mathfrak{v}_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\xi_{40}\eta^3 \sin j \sin(8w-\mathfrak{v}-2\mathfrak{v}) && +\xi_{43}\eta^3 \sin j' \sin(8w-\mathfrak{v}_1-2\mathfrak{v}) && +\xi_{46}\sin^2 j \sin(8w-3\mathfrak{v})\\
&+\xi_{41}\eta\eta' \sin j \sin(8w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && +\xi_{44}\eta\eta' \sin j' \sin(8w-\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && +\xi_{47}\sin^2 j \sin j' \sin(8w-2\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)\\
&+\xi_{42}\eta'^2 \sin j \sin(8w-\mathfrak{v}-2\mathfrak{v}_1) && +\xi_{45}\eta'^2 \sin j' \sin(8w-\mathfrak{v}_1-2\mathfrak{v}_1) && +\xi_{48}\sin j \sin^2 j' \sin(8w-\mathfrak{v}-2\mathfrak{v}_1)\\
& && && +\xi_{49}\sin^2 j' \sin(8w-3\mathfrak{v}_1).
\end{aligned}$$

Die Koefficienten haben folgende Werte:

$$(134)\quad \xi_{20} = -\frac{\mu(c_4+c_{15})\gamma_2}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_1\gamma_2^2}{2\delta_1^3} \qquad \xi_{22} = -\frac{\mu(c_6\gamma_2+c_{15}\gamma_3)}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_1\gamma_2\gamma_3}{2\delta_1^3}$$

$$\xi_{21} = -\frac{\mu(c_4\gamma_3+c_{16}\gamma_2)}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_1\gamma_2\gamma_3}{2\delta_1^3} \qquad \xi_{23} = -\frac{\mu(c_6+c_{16})\gamma_3}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_1\gamma_3^2}{2\delta_1^3}$$

www.libtool.com.cn

(134) $\xi_{24} = -\frac{\mu(c_6+c_{17})\gamma_2}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_2\gamma_2^2}{2\delta_1^3}$ $\qquad \xi_{26} = -\frac{\mu(c_{10}\gamma_2+c_{17}\gamma_3)}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_2\gamma_2\gamma_3}{2\delta_1^3}$

$\xi_{25} = -\frac{\mu(c_6\gamma_3+c_{18}\gamma_2)}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_2\gamma_2\gamma_3}{2\delta_1^3}$ $\qquad \xi_{27} = -\frac{\mu(c_{10}+c_{18})\gamma_3}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_2\gamma_3^2}{2\delta_1^3}$

$\xi_{28} = -\frac{\mu c_3\gamma_2}{4\delta_1^2}$ $\qquad \xi_{31} = -\frac{\mu c_7\gamma_2}{4\delta_1^2}$ $\qquad \xi_{34} = \frac{\mu c_{11}\gamma_2}{4\delta_1^2}$

$\xi_{29} = -\frac{\mu(c_3\gamma_3+c_5\gamma_2)}{4\delta_1^2}$ $\qquad \xi_{32} = -\frac{\mu(c_7\gamma_3+c_9\gamma_2)}{4\delta_1^2}$ $\qquad \xi_{35} = \frac{\mu(c_{11}\gamma_3+c_{13}\gamma_2)}{4\delta_1^2}$

$\xi_{30} = -\frac{\mu c_5\gamma_3}{4\delta_1^2}$ $\qquad \xi_{33} = -\frac{\mu c_9\gamma_3}{4\delta_1^2}$ $\qquad \xi_{36} = \frac{\mu c_{13}\gamma_3}{4\delta_1^2}$

$\xi_{37} = \frac{\mu c_{13}\gamma_3}{4\delta_1^2}$ $\qquad \xi_{38} = \frac{\mu(c_{13}\gamma_3+c_{14}\gamma_2)}{4\delta_1^2}$ $\qquad \xi_{39} = \frac{\mu c_{14}\gamma_3}{4\delta_1^2}.$

(135) $\xi_{40} = -\frac{\mu(c_1\gamma_{14}+c_{15}\gamma_2)}{8\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_1\gamma_2^2}{8\delta_1^3}$ $\qquad \xi_{43} = -\frac{\mu(c_2\gamma_{14}+c_{17}\gamma_2)}{8\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_2\gamma_2^2}{8\delta_1^3}$

$\xi_{41} = -\frac{\mu(c_1\gamma_{15}+c_{15}\gamma_3+c_{16}\gamma_2)}{8\delta_1^2} - \frac{2\mu^2 c_1\gamma_2\gamma_3}{8\delta_1^3}$ $\qquad \xi_{44} = -\frac{\mu(c_2\gamma_{15}+c_{17}\gamma_3+c_{18}\gamma_2)}{8\delta_1^2} - \frac{2\mu^2 c_2\gamma_2\gamma_3}{8\delta_1^3}$

$\xi_{42} = -\frac{\mu(c_1\gamma_{16}+c_{16}\gamma_2)}{8\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_1\gamma_3^2}{8\delta_1^3}$ $\qquad \xi_{45} = -\frac{\mu(c_2\gamma_{16}+c_{18}\gamma_2)}{8\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_2\gamma_3^2}{8\delta_1^3}$

$\xi_{46} = -\frac{\mu c_1\gamma_{30}}{8\delta_1^2}$ $\qquad \xi_{48} = -\frac{\mu(c_2\gamma_{31}+c_1\gamma_{32})}{8\delta_1^2}$

$\xi_{47} = -\frac{\mu(c_2\gamma_{30}+c_1\gamma_{31})}{8\delta_1^2}$ $\qquad \xi_{49} = -\frac{\mu c_2\gamma_{32}}{8\delta_1^2}.$

Ueber die Reihe der exargumentalen Glieder und ihre Konvergenz gilt das für R Gesagte. Hier werden jedoch alle Glieder um einen Grad erhöht, da β mindestens ersten Grades ist. Die Glieder dritten Grades wird man hier bei charakteristischen Planeten und mittleren Neigungen stets vernachlässigen dürfen, so lange es sich um abgekürzte Tafeln handelt. Sie müssen dagegen bei kritischen Planeten berücksichtigt werden. Die Glieder vierten Grades können stets fortgelassen werden, da sie in maximo werden $\left(\frac{m'}{\delta_1}+\frac{m'^2}{\delta_1^3}+\frac{m'^3}{\delta_1^5}+\frac{m'^4}{\delta_1^7}\right)\asymp(m')$ für Excentricitäten und Neigungen bis zu 10^0. Mithin wird für $\delta_1 > \sqrt[3]{m'^2}$ der Fehler innerhalb der Grenzen $\frac{m'}{\delta_1}$ und $\frac{m'^2}{\delta_1}$ liegen.

www.libtool.com.cn

§ 3. Berechnung der konstanten und secularen Glieder, sowie der Zusatzglieder ersten und zweiten Grades.

8) Die elementaren Glieder hatten wir, soweit sie von der Form B und ersten Grades sind, bereits vollständig behandelt [Formel (72), (73) für $(\frac{1}{\delta})$ und Formel (60), (113), (114) für (ϱ)]. Die aus dem dritten Grade hinzutretenden Zusätze wollten wir nicht berücksichtigen. Die Konstanten sind, soweit sie vom nullten Grade waren, ebenfalls behandelt [Formel (67) und (69)]. Es erübrigt jetzt noch die A-Glieder, welche mindestens zweiten Grades sind, zu ermitteln sowie die entstehenden konstanten Teile zweiten Grades. Ausserdem wollten wir die A-Glieder in V_2 während des Integrationsprozesses in seculare Form bringen, um das Auftreten eines Divisors m'^2 zu verhindern. Wir hatten die A-Glieder in den Differentialgleichungen hergestellt, ebenso ihre exargumentalen Zusätze, soweit solche berücksichtigt werden, und jetzt ist nur noch die Integration auszuführen. Hierbei muss wenigstens in S und V, wo kleine Divisoren v. d. Ord. m' auftreten, die Variabilität von η, Π etc. berücksichtigt werden, und wir wollen diese Rechnung im Zusammenhange mit den Zusatzgliedern durchführen.

Es war nach (76):

$$T_e S_2 = \int q_7 \sin j \sin j' \sin(\sigma - \sigma_1)\, dv. \tag{136}$$

Nach Formel (101) wird dies aber:

$$T_e S_2 = \sum \frac{q_7}{\tau - \tau_n} \sin\iota \sin\iota'_n \cos(\vartheta - \vartheta_n) + \mathfrak{S} \frac{q_7}{\tau_m - \tau_n} [\sin\iota_m \sin\iota'_n - \sin\iota_n \sin\iota'_m] \cos(\vartheta_m - \vartheta_n). \tag{137}$$

Ein konstanter Teil entsteht hieraus nicht. $\frac{q_7}{\tau_k - \tau_l}$ ist v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$.

In der Differentialgleichung für R erhalten die A-Glieder keine kleinen Divisoren, und wir können dort η, Π etc. als konstant ansehen. Wendet man auf die Formel (78) die Variation der Parameter an und vereinigt die entstehenden Glieder mit den aus Formel (110) hervorgehenden exargumentalen Teilen, so folgt, wie man leicht ausrechnen kann:

$$\left.\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \end{matrix}\right\} = [b_{0\cdot 2\cdot 0} - 2\delta_1 \mu\alpha_2\gamma_2] \int \eta^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} v\, dv + \left[\frac{b^{+1}_{0\cdot 1\cdot 1}}{2} + \frac{\mu\alpha_2\gamma_3}{1+\delta_1} - \frac{\mu\alpha_3\gamma_2}{1-\delta_1}\right] \int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\Pi - \Pi_1 + v)\, dv$$
$$\pm \left[\frac{b^{+1}_{0\cdot 1\cdot 1}}{2} + \frac{\mu\alpha_2\gamma_2}{1+\delta_1} - \frac{\mu\alpha_3\gamma_3}{1-\delta_1}\right] \int \eta\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\Pi - \Pi_1 - v)\, dv + [b_{0\cdot 0\cdot 2} - 2\delta_1 \mu\alpha_3\gamma_3] \int \eta'^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} v\, dv$$
$$+ \bar{b}_{0\cdot 2\cdot 0} \int \sin^2 j \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} v\, dv + \frac{\bar{b}^{+1}_{0\cdot 1\cdot 1}}{2} \int \sin j \sin j' \left[\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\sigma - \sigma_1 + v) \pm \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\sigma - \sigma_1 - v)\right] dv + \bar{b}_{0\cdot 0\cdot 2} \int \sin^2 j' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} v\, dv, \tag{138}$$

wo nur δ_1^2 gegen die Einheit im Nenner vernachlässigt ist, mit einem Fehler v. d. Ord. $m'^2 \asymp \delta_1$ im Integral. Wendet man hierauf die Formel (101) an und

www.libtool.com.cn

berücksichtigt nur den entstehenden konstanten Teil, so folgt für das Integral selbst:

$$\text{(139)}\quad \text{pars const. } R_2 = [b_{0\cdot 2\cdot 0} - 2\delta_1 \mu \alpha_2 \gamma_2](\varkappa^2 + \sum \varkappa_n^2) + [b^{+1}_{0\cdot 1\cdot 1} - 2\delta_1 \mu(\alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2)] \sum \varkappa_n \varkappa_n' + [b_{0\cdot 0\cdot 2} - 2\delta_1 \mu \alpha_3 \gamma_3] \sum \varkappa_n'^2 + \overline{b}_{0\cdot 2\cdot 0}(\sin^2 \iota + \sum \sin^2 \iota_n) + \overline{b}^{+1}_{0\cdot 0\cdot 1} \sum \sin \iota_n \sin \iota_n' + \overline{b}_{0\cdot 0\cdot 2} \sum \sin^2 \iota_n'.$$

Wie aus Formel (137) hervorgeht, kommen aus $T_0 S_2$ nur periodische Zusätze in $T_0 R_2$ hinein. Was den elementaren Teil betrifft, so wollten wir nur die Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$ resp. m' und $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ berücksichtigen. Deswegen können wir (138) in Hinsicht auf Formel (101) schreiben:

$$\text{(140)}\quad \left.\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \end{matrix}\right\} = \left[b_{0\cdot 2\cdot 0} \sum \varkappa \varkappa_n + \frac{b^{+1}_{0\cdot 1\cdot 1}}{2} \sum \varkappa \varkappa_n'\right] \int \left[\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(\omega - \omega_n + v) \pm \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(\omega - \omega_n - v)\right] dv + \left[b_{0\cdot 2\cdot 0} \mathbf{S} \varkappa_m \varkappa_n + \frac{b^{+1}_{0\cdot 1\cdot 1}}{2} \mathbf{S}(\varkappa_m \varkappa_n' + \varkappa_n \varkappa_m') + b_{0\cdot 0\cdot 2} \mathbf{S} \varkappa_m' \varkappa_n'\right] \int \left[\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(\omega_m - \omega_n + v) \pm \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(\omega_m - \omega_n - v)\right] dv.$$

Bei dem Neigungsteil von $T_0 R_2$ ist noch das aus $2 T_0 S_2$ kommende A-Glied zu berücksichtigen. Wir können demnach mit Hilfe der bekannten Formeln für $\sin^2 j$ etc. die Differentialgleichung (78) genau genug für die A-Glieder schreiben:

$$\text{(141)}\quad T_0\left(\frac{d^2 R_2}{dv^2} + R_2\right) = \sum \left[-2\mathfrak{p}_6 \sin \iota \sin \iota_n - \left(\mathfrak{p}_7 - \frac{2\mathfrak{q}_7}{\tau - \tau_n}\right) \sin \iota \sin \iota_n'\right] \cos(\vartheta - \vartheta_n) + S\left[-2\mathfrak{p}_6 \sin \iota_m \sin \iota_n - \left(\mathfrak{p}_7 - \frac{2\mathfrak{q}_7}{\tau_m - \tau_n}\right) \sin \iota_m \sin \iota_n' - \left(\mathfrak{p}_7 + \frac{2\mathfrak{q}_7}{\tau_m - \tau_n}\right) \sin \iota_n \sin \iota_m' - 2\mathfrak{p}_6 \sin \iota_m' \sin \iota_n'\right] \cos(\vartheta_m - \vartheta_n).$$

Integriert man nun (140) und (141) und vernachlässigt die ς_n und τ_n im Nenner der Einheit gegenüber, so folgt:

$$\text{(142)}\quad T_0 R_2 = \sum \overline{b}_{\text{I}.n} \cos(\omega - \omega_n) + \mathbf{S} \overline{b}_{\text{II}.m.n} \cos(\omega_m - \omega_n) + \sum \overline{b}_{\text{III}.n} \cos(\vartheta - \vartheta_n) + \mathbf{S} \overline{b}_{\text{IV}.m.n} \cos(\vartheta_m - \vartheta_n),$$

wo über die Summenbezeichnung auf pag. 71 das Nähere gesagt war. Hier ist hinreichend genau:

$$\text{(143)}\quad \begin{aligned} \overline{b}_{\text{I}.n} &= [(-2\mathfrak{p}_3 + \mathfrak{q}_1 + \alpha_2^2)\varkappa_n + (-\mathfrak{p}_4 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}_2 + \alpha_2\alpha_3)\varkappa_n'] \varkappa \\ \overline{b}_{\text{II}.m.n} &= [(-2\mathfrak{p}_3 + \mathfrak{q}_1 + \alpha_2^2)\varkappa_n + (-\mathfrak{p}_4 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}_2 + \alpha_2\alpha_3)\varkappa_n'] \varkappa_m + [(-\mathfrak{p}_4 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}_2 + \alpha_2\alpha_3)\varkappa_n + (-2\mathfrak{p}_5 + \alpha_3^2)\varkappa_n'] \varkappa_m' \\ \overline{b}_{\text{III}.n} &= \left[-2\mathfrak{p}_6 \sin \iota_n + \left(-\mathfrak{p}_7 + \frac{2\mathfrak{q}_7}{\tau - \tau_n}\right) \sin \iota_n'\right] \sin \iota \\ \overline{b}_{\text{IV}.m.n} &= \left[-2\mathfrak{p}_6 \sin \iota_n + \left(-\mathfrak{p}_7 + \frac{2\mathfrak{q}_7}{\tau_m - \tau_n}\right) \sin \iota_n'\right] \sin \iota_m + \left[\left(-\mathfrak{p}_7 - \frac{2\mathfrak{q}_7}{\tau_m - \tau_n}\right) \sin \iota_n - 2\mathfrak{p}_6 \sin \iota_n'\right] \sin \iota_m'. \end{aligned}$$

Demnach ist durch (142) und (143) $T_0 R_2$ definitiv gegeben unter Berücksichtigung der Glieder v. d. Ord. m' resp. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ und $\frac{m'}{\delta_1}$, wie wir es beabsichtigt

www.libtool.com.cn

hatten. In (139) ist der konstante Teil von R_2 gegeben und zwar auch die Glieder v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ mit eingeschlossen. Zu diesem Werte kommt jedoch noch ein Teil aus den Zusatzgliedern, bedingt durch die Form der Differentialgleichung, welcher zusammen mit den Zusatzgliedern ermittelt werden soll.

Jetzt wollen wir den konstanten Teil sowie die A-Glieder in $T_*\left(\frac{dV_2}{dv}\right)$ herleiten. Wir wollen bedenken, dass wir für den konstanten Teil auch Glieder v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ mitnehmen. Nach Formel (81) war:

$$T_* V_2 = T_{0\cdot 2\cdot 0}\int \eta^2\,dv + T^{+1}_{0\cdot 1\cdot 1}\int \eta\eta'\cos(\Pi-\Pi_1)\,dv + T_{0\cdot 0\cdot 2}\int \eta'^2\,dv + \overline{T}_{0\cdot 2\cdot 0}\int \sin^2 j\,dv + \overline{T}^{+1}_{0\cdot 1\cdot 1}\int \sin j \sin j'\cos(\sigma-\sigma_1)\,dv + \overline{T}_{0\cdot 0\cdot 2}\int \sin^2 j'\,dv.$$

Die Koefficienten wollen wir aber noch genauer geben, als es in Formel (82) geschehen, da wir $T_* R_2$ incl. der exargumentalen Glieder ermittelt haben, ebenso kommen nach (123a) einige exargumentale Glieder hinzu. Nach Formel (100) und (101) lautet das Integral, wenn wir uns alle diese Zusätze hinzugefügt denken, für den secularen Teil:

$$(144)\quad T_* V_2 = [T_{0\cdot 2\cdot 0}(\varkappa^2+\sum\varkappa_n^2) + T^{+1}_{0\cdot 1\cdot 1}\sum \varkappa_n\varkappa_n' + T_{0\cdot 0\cdot 2}\sum\varkappa_n'^2]\,v + [\overline{T}_{0\cdot 2\cdot 0}(\sin^2\iota+\sum\sin^2\iota_n) + \overline{T}^{+1}_{0\cdot 1\cdot 1}\sum\sin\iota_n\sin\iota_n' + \overline{T}_{0\cdot 0\cdot 2}\sum\sin^2\iota_n']\,v.$$

In den T-Koefficienten haben wir uns den exargumentalen Teil aus (123a), sowie $T_* S_2$ und $T_* R_2$ einschl. des exargumentalen Teiles enthalten zu denken, und zwar sind alle Glieder bis auf Grössen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ mitgenommen. Dies ist für den konstanten Teil notwendig. Nun wollten wir diesen konstanten Teil zerlegen in $c_0+\gamma+\gamma_0$, wo c_0 rein v. d. Ord. der Masse ist, und γ_0 erst durch die Integration aus $\frac{dV}{dv}$ entsteht, also aus der Integration von (123a) herrührt. Zerlegen wir die Konstante in dieser Weise, so folgt, gleich in definitiver Form geschrieben:

$$(145)\qquad \gamma_0 = \frac{\mu\gamma_2^2}{\delta_1}(\varkappa^2+\sum\varkappa_n^2) + \frac{2\mu\gamma_2\gamma_3}{\delta_1}\sum\varkappa_n\varkappa_n' + \frac{\mu\gamma_3^2}{\delta_1}\sum\varkappa_n'^2.$$

$$(146)\qquad \text{pars}\,\gamma = \xi_1(\varkappa^2+\sum\varkappa_n^2) + \xi_2\sum\varkappa_n\varkappa_n' + \xi_3\sum\varkappa_n'^2 + \xi_4(\sin^2\iota+\sum\sin^2\iota_n) + \xi_5\sum\sin\iota_n\sin\iota_n' + \xi_6\sum\sin^2\iota_n'.$$

Die Koefficienten sind hier:

$$(147)\quad \xi_1 = -\alpha_2(\alpha_2-\tfrac{3}{2}\beta_1) - \beta_2(\alpha_2+6\beta_1-\tfrac{3}{2}\beta_2) + \tfrac{3}{2}\beta_4^2 + 3\beta_1\beta_7$$
$$\xi_2 = -2\alpha_3(\alpha_2-\tfrac{3}{4}\beta_1) - \beta_3(\alpha_3-\tfrac{3}{2}\beta_3) - \beta_3(\alpha_2+6\beta_1-\tfrac{3}{2}\beta_2) + 3\beta_4\beta_5 + 3\beta_1(\beta_8+\beta_9)$$
$$\xi_3 = -\alpha_3^2 - \beta_3(\alpha_3-\tfrac{3}{2}\beta_3) + \tfrac{3}{2}\beta_5^2 + 3\beta_1\beta_{10}$$
$$\xi_4 = 3\beta_1\beta_{23}, \qquad \xi_5 = 3\beta_1(\beta_{24}+\beta_{25}), \qquad \xi_6 = 3\beta_1\beta_{26}.$$

www.libtool.com.cn

Aus der Bedingung: $c_0 = 0 = a_0 - 2b_0$ folgt:

$$\text{(148)} \qquad \begin{aligned} \text{pars}\, a_0 &= x_1(\varkappa^2 + \sum \varkappa_n^2) + x_2 \sum \varkappa_n \varkappa_n' + x_3 \sum \varkappa_n'^2 \\ &\quad + x_4(\sin^2 \iota + \sum \sin^2 \iota_n) + x_5 \sum \sin \iota_n \sin \iota_n' + x_6 \sum \sin^2 \iota_n' \\ \text{pars}\, b_0 &= \tfrac{1}{2} a_0, \end{aligned}$$

wo:

$$\begin{aligned} \text{(149)}\quad x_1 &= -2p_2 + p_0^{(0)} + q_1 + a_1 + \alpha_2(q_1 - 2p_2) + \beta_1(q_7 + a_7) + \beta_2(q_2 - \tfrac{3}{2} a_1) \\ &\quad + \beta_4(q_4 + a_4 - \tfrac{3}{2} S_{4\cdot 0\cdot 0} + 6R_{4\cdot 0\cdot 0}) + \beta_7(q_1 + a_1) - 4\delta_1 \mu \alpha_2 \gamma_2 \\ x_2 &= -2p_4 + q_2 + a_2 - 2\alpha_2 p_3 + \alpha_3(q_1 - 2p_2) + \beta_1(q_8 + q_9 + a_8 + a_9) + \beta_3 q_3 + \beta_8(q_2 - \tfrac{3}{2} a_1) \\ &\quad + \beta_4(q_5 + a_5) + \beta_5(q_4 + a_4 - \tfrac{3}{2} S_{4\cdot 0\cdot 0} + 6R_{4\cdot 0\cdot 0}) + (\beta_8 + \beta_9)(q_1 + a_1) - 4\delta_1 \mu(\alpha_2 \gamma_3 + \alpha_3 \gamma_2) \\ x_3 &= -2p_5 - 2\alpha_3 p_3 + \beta_1(q_{10} + a_{10}) + \beta_3 q_3 + \beta_5(q_5 + a_5) + \beta_{10}(q_1 + a_1) - 4\delta_1 \mu \alpha_3 \gamma_3 \\ x_4 &= -2p_6 + \beta_1(q_{23} + a_{23}) + \beta_{23}(q_1 + a_1) \\ x_5 &= -2p_7 + \beta_1(q_{24} + q_{25} + a_{24} + a_{25}) + (\beta_{24} + \beta_{25})(q_1 + a_1) \\ x_6 &= -2p_8 + \beta_1(q_{26} + a_{26}) + \beta_{26}(q_1 + a_1). \end{aligned}$$

Zu γ kommt noch, bedingt durch die Form der Differentialgleichung für W, ein Teil aus den Zusatzgliedern hinzu, der v. d. Ord. $\frac{m'^3}{\delta_1^3}$ resp. $\frac{m'^4}{\delta_1^4}$ ist. Die Werte für a_0, b_0, γ_0 sind dagegen definitive.

Wir müssen jetzt die Werte der A-Glieder ermitteln, und zwar kann dies gleich in definitiver Form geschehen, da die aus den Zusatzgliedern resultierenden Teile hierfür nicht in Betracht kommen. Formel (81) können wir unter Benutzung der bekannten Reihen und Fortlassung der konstanten Glieder, wenn nur die Glieder v. d. Ord. m', $\frac{m'}{\delta_1}$, $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ mitgenommen werden und die Formeln (137) und (142) für $T_a R_2$ benutzt werden, folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned} T_a V_2 &= \int \sum (2\overline{w}_1 \varkappa_n + \overline{w}_2 \varkappa_n') \varkappa \cos(\omega - \omega_n)\, dv \\ &\quad + \int \mathfrak{S} [(2\overline{w}_1 \varkappa_n + \overline{w}_2 \varkappa_n') \varkappa_m + (\overline{w}_2 \varkappa_n + 2\overline{w}_3 \varkappa_n') \varkappa_m'] \cos(\omega_m - \omega_n)\, dv \\ &\quad + \int \sum \left[2\overline{w}_4 \sin \iota_n + \left(\overline{w}_5 - \frac{3q_7}{\tau - \tau_n} \right) \sin \iota_n' \right] \sin \iota \cos(\vartheta - \vartheta_n)\, dv \\ &\quad + \int \mathfrak{S} \left\{ \left[2\overline{w}_4 \sin \iota_n + \left(\overline{w}_5 - \frac{3q_7}{\tau_m - \tau_n} \right) \sin \iota_n' \right] \sin \iota_m \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\overline{w}_5 + \frac{3q_7}{\tau_m - \tau_n} \right) \sin \iota_n + 2\overline{w}_6 \sin \iota_n' \right] \sin \iota_m' \right\} \cos(\vartheta_m - \vartheta_n)\, dv. \end{aligned}$$

Weiter führen wir eine abgekürzte Bezeichnung ein:

$$\begin{aligned} \text{(150)} \qquad T_a V_2 &= \int \sum \overline{\xi}_{5\cdot n} \cos(\omega - \omega_n)\, dv + \int \mathfrak{S} \overline{\xi}_{5\cdot m\cdot n} \cos(\omega_m - \omega_n)\, dv \\ &\quad + \int \sum \overline{\xi}_{7\cdot n} \cos(\vartheta - \vartheta_n)\, dv + \int \mathfrak{S} \overline{\xi}_{8\cdot m\cdot n} \cos(\vartheta_m - \vartheta_n)\, dv. \end{aligned}$$

www.libtool.com.cn

Die Werte der Koefficienten sind:

$$(151)\quad \begin{aligned}
\overline{\xi}_{5\cdot n} &= [2\overline{w}_1 \varkappa_n + \overline{w}_2 \varkappa_n'] \varkappa \\
\overline{\xi}_{6\cdot m\cdot n} &= [2\overline{w}_1 \varkappa_n + \overline{w}_2 \varkappa_n'] \varkappa_m + [\overline{w}_2 \varkappa_n + \overline{w}_3 \varkappa_n'] \varkappa_m' \\
\overline{\xi}_{7\cdot n} &= \left[2\overline{w}_4 \sin \iota_n + \left(\overline{w}_5 - \frac{3q_7}{\tau - \tau_n}\right) \sin \iota_n'\right] \sin \iota \\
\overline{\xi}_{8\cdot m\cdot n} &= \left[2\overline{w}_4 \sin \iota_n + \left(\overline{w}_5 - \frac{3q_7}{\tau_m - \tau_n}\right) \sin \iota_n'\right] \sin \iota_m + \left[\left(\overline{w}_5 + \frac{3q_7}{\tau_m - \tau_n}\right) \sin \iota_n + 2\overline{w}_6 \sin \iota_n'\right] \sin \iota_m'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{w}_1 &= 2p_3 - q_1 - a_1 - p_0^{(0)} + \xi_1 + \frac{\mu \gamma_3^2}{\delta_1} & \overline{w}_4 &= 2p_6 + \xi_4 \\
\overline{w}_2 &= 2p_4 - q_2 - a_2 + \xi_2 + \frac{2\mu \gamma_3 \gamma_8}{\delta_1} & \overline{w}_5 &= 2p_7 + \xi_5 \\
\overline{w}_3 &= 2p_5 + \xi_3 + \frac{\mu \gamma_3^2}{\delta_1} & \overline{w}_6 &= 2p_8 + \xi_6.
\end{aligned}$$

Ehe wir an die Integration von (150) gehen, müssen wir diese Gleichung in seculare Form bringen. Zu diesem Zwecke nehmen wir die konstanten Teile aus den Cosinuszeichen heraus, da ja ist

$$\begin{aligned}
(\omega - \omega_n) &= (\varsigma - \varsigma_n) v + (\Gamma - \Gamma_n) \\
(\vartheta - \vartheta_n) &= -(\tau - \tau_n) v + (\Theta - \Theta_n).
\end{aligned}$$

$$(152)\quad \begin{aligned}
\xi_{1\cdot n} &= \overline{\xi}_{5\cdot n} \cos(\Gamma - \Gamma_n) & \xi_{5\cdot n} &= \overline{\xi}_{7\cdot n} \cos(\Theta - \Theta_n) \\
\xi_{2\cdot n} &= -\overline{\xi}_{5\cdot n} \sin(\Gamma - \Gamma_n) & \xi_{6\cdot n} &= \overline{\xi}_{7\cdot n} \sin(\Theta - \Theta_n) \\
\xi_{3\cdot m\cdot n} &= \overline{\xi}_{6\cdot m\cdot n} \cos(\Gamma_m - \Gamma_n) & \xi_{7\cdot m\cdot n} &= \overline{\xi}_{8\cdot m\cdot n} \cos(\Theta_m - \Theta_n) \\
\xi_{4\cdot m\cdot n} &= -\overline{\xi}_{6\cdot m\cdot n} \sin(\Gamma_m - \Gamma_n) & \xi_{8\cdot m\cdot n} &= \overline{\xi}_{8\cdot m\cdot n} \sin(\Theta_m - \Theta_n).
\end{aligned}$$

Dann geht (150) über in:

$$\begin{aligned}
T_0 V_2 = {} & \int \sum \xi_{1\cdot n} \cos(\varsigma - \varsigma_n) v\, dv + \int \sum \xi_{2\cdot n} \sin(\varsigma - \varsigma_n) v\, dv + \int \mathbf{S} \xi_{3\cdot m\cdot n} \cos(\varsigma_m - \varsigma_n) v\, dv \\
& + \int \mathbf{S} \xi_{4\cdot m\cdot n} \sin(\varsigma_m - \varsigma_n) v\, dv + \int \sum \xi_{5\cdot n} \cos(\tau - \tau_n) v\, dv + \int \sum \xi_{6\cdot n} \sin(\tau - \tau_n) v\, dv \\
& + \int \mathbf{S} \xi_{7\cdot m\cdot n} \cos(\tau_m - \tau_n) v\, dv + \int \mathbf{S} \xi_{8\cdot m\cdot n} \sin(\tau_m - \tau_n) v\, dv.
\end{aligned}$$

Wenden wir hierauf jetzt die bekannte Reihe für Sinus und Cosinus an und schreiben abkürzend unter Vernachlässigung der dritten Potenz:

$$(153)\quad \begin{aligned}
\overline{\gamma}_0 &= \sum \xi_{1\cdot n} + \xi_{5\cdot n} + \mathbf{S} \xi_{3\cdot m\cdot n} + \xi_{7\cdot m\cdot n} \\
\overline{g} &= \tfrac{1}{2} \sum (\varsigma - \varsigma_n) \xi_{2\cdot n} + (\tau - \tau_n) \xi_{6\cdot n} + \tfrac{1}{2} \mathbf{S} (\varsigma_m - \varsigma_n) \xi_{4\cdot m\cdot n} + (\tau_m - \tau_n) \xi_{8\cdot m\cdot n} \\
\overline{\mathfrak{g}} &= -\tfrac{1}{6} \sum (\varsigma - \varsigma_n)^2 \xi_{1\cdot n} + (\tau - \tau_n)^2 \xi_{5\cdot n} - \tfrac{1}{6} \mathbf{S} (\varsigma_m - \varsigma_n)^2 \xi_{3\cdot m\cdot n} + (\tau_m - \tau_n)^2 \xi_{7\cdot m\cdot n},
\end{aligned}$$

so geht die vorige Gleichung über in:

$$(154)\quad T_0 V_2 = \int \overline{\gamma}_0\, dv + 2 \int \overline{g} v\, dv + 3 \int \overline{\mathfrak{g}} v^2\, dv.$$

www.libtool.com.cn

Wie hieraus hervorgeht, tritt durch die Verwandlung in seculare Form noch ein konstantes Glied zweiten Grades auf. Nicht aber in der Differentialgleichung $\frac{dV_2}{dv}$, denn sonst hätten wir es mit μ_1 vereinigen müssen, vielmehr während des Integrationsprozesses, und ist dem γ_0 gleich zu achten. Integrieren wir nun, so erhalten wir als definitives Resultat:

$$T_a V_2 = (\gamma+\gamma_0+\overline{\gamma}_0+\overline{g}v+\overline{\mathfrak{g}}v^2)v. \tag{155}$$

Hätte man nach dem Integrationsprozesse $T_a V_2$ in seculare Form gebracht, so wäre, abgesehen von einer Konstanten, das Resultat dasselbe geworden. Das Auftreten dieser Konstanten bewirkt, dass wir das Element Λ anders erhalten.

$\overline{\gamma}_0$ ist v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ und zweiten Grades, $\overline{g}$ ist dagegen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ und zweiten Grades, also schon beträchtlich klein, $\overline{\mathfrak{g}}$ ist v. d. Ord. $\frac{m'^3}{\delta_1}$ und zweiten Grades und kann wohl meistens fortgelassen werden. In Fällen mittlerer Excentricitäten und charakteristischer Planeten wird man nur $\overline{\gamma}_0$ zu berücksichtigen haben.

Hätte man $T_a V_2$ in periodischer Form integriert und dann die trigonometrischen Funktionen in Potenzreihen entwickelt, so hätte man erhalten:

$$T_a V_2 = a+bv+cv^2+\cdots$$

$$nt+\Lambda = v+\sum B_a \sin nv+K+V = a+(1+b+cv+\cdots)v+\text{pars per.}$$

oder, da $v = nt$ gesetzt werden kann, abgesehen von periodischen Gliedern:

$$nt+\Lambda = a+(1+b+c't+\cdots)nt+\text{per. Glieder.}$$

Lassen wir also $T_a V_2$ ganz fort, so wird nicht nur Λ einen um a anderen Wert erhalten, sondern auch n wird um b anders und sich ausserdem proportional der Zeit ändern. Da wir vor der Integration die seculare Form herstellen und $T_a V_2$ berücksichtigen wollten, so erhielten wir nach (155):

$$T_a V_2 = bnt+c'nt^2+\cdots+\text{per. Glieder,}$$

wir werden also Λ ebenfalls um a anders erhalten, n dagegen richtig und fast konstant, sicher für den hier betrachteten endlichen Zeitraum, da wir nur höhere Potenzen der Zeit vernachlässigen, die merklich werdenden aber mitnehmen. Das Resultat wird einmal genauer, und dann ist das Auftreten von Gliedern von der nullten resp. $\left(\frac{1}{\delta_1}\right)$-ten Ordnung vermieden.

Da die A-Glieder in $\mathfrak{Z}_2$ keinen kleinen Divisor erhalten, so könnten wir sie fortlassen, und dies wird auch in den meisten Fällen gerechtfertigt sein. Es soll jedoch $T_a \mathfrak{Z}_2$ mit derselben Genauigkeit gegeben werden wie $T_a R_2$. Hier tritt

www.libtool.com.cn

der Sinus in der Differentialgleichung auf, demnach sind konstante Glieder ausgeschlossen; ebenso sind, wie früher erörtert, die exargumentalen Teile ohne Bedeutung. Der Wert für $T_s \mathfrak{Z}_s$ ist ohne Schwierigkeit aus Formel (89) zu ermitteln. Ich will hier nur das Resultat geben:

$$(156)\quad T_s \mathfrak{Z}_s = \bar{c}_{\mathrm{I}} \sin(\vartheta - \omega) + \sum \bar{c}_{\mathrm{II},m} \sin(\vartheta - \omega_m) + \sum \bar{c}_{\mathrm{III},m} \sin(\vartheta_m - \omega) + \sum \bar{c}_{\mathrm{IV},m} \sin(\vartheta_m - \omega_m) + \mathfrak{S} \bar{c}_{\mathrm{V},m,m} \sin(\vartheta_m - \omega_m) + \mathfrak{S} \bar{c}_{\mathrm{VI},m,m} \sin(\vartheta_m - \omega_m)$$

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{\mathrm{I}} &= -(\mathfrak{d}_3 + \tfrac{1}{2} q_1) \varkappa \sin \iota \\
\bar{c}_{\mathrm{II},m} &= -[(\mathfrak{d}_3 + \tfrac{1}{2} q_1) \varkappa_m + (\mathfrak{d}_4 + \tfrac{1}{2} q_2) \varkappa_m'] \sin \iota \\
\bar{c}_{\mathrm{III},m} &= -[(\mathfrak{d}_3 + \tfrac{1}{2} q_1) \sin \iota_m + \mathfrak{d}_5 \sin \iota_m'] \varkappa \\
\bar{c}_{\mathrm{IV},m} &= -[(\mathfrak{d}_3 + \tfrac{1}{2} q_1) \varkappa_m + (\mathfrak{d}_4 + \tfrac{1}{2} q_2) \varkappa_m'] \sin \iota_m - [\mathfrak{d}_5 \varkappa_m + \mathfrak{d}_6 \varkappa_m'] \sin \iota_m' \\
\bar{c}_{\mathrm{V},m,m} &= -[(\mathfrak{d}_3 + \tfrac{1}{2} q_1) \varkappa_m + (\mathfrak{d}_4 + \tfrac{1}{2} q_2) \varkappa_m'] \sin \iota_m - [\mathfrak{d}_5 \varkappa_m + \mathfrak{d}_6 \varkappa_m'] \sin \iota_m' \\
\bar{c}_{\mathrm{VI},m,m} &= -[(\mathfrak{d}_3 + \tfrac{1}{2} q_1) \sin \iota_m + \mathfrak{d}_5 \sin \iota_m'] \varkappa_m - [(\mathfrak{d}_4 + \tfrac{1}{2} q_2) \sin \iota_m + \mathfrak{d}_6 \sin \iota_m'] \varkappa_m',
\end{aligned}$$

wo hier wieder in den Divisoren die ς gegenüber der Einheit vernachlässigt sind.

---

9) Wir haben jetzt die aus der Veränderlichkeit der langperiodischen Funktionen η, Π, $\sin j$, σ etc. hervorgehenden Zusatzglieder aufzustellen. Wir wenden zu diesem Zwecke die am Anfange des Kapitels auseinandergesetzte Methode der partiellen Integration an und werden die ersten Differentialquotienten dieser Funktionen bei der Integration schon als konstant ansehen mit einer hinreichenden Genauigkeit. Diese Zusatzglieder werden wir nur dort ermitteln, wo die Terme im Integral einen kleinen Divisor von der Ordnung δ_1 erhalten. Wo der Divisor ς_m resp. τ_m auftritt, ist ja die Veränderlichkeit dieser Funktionen im vorigen Abschnitte von vornherein berücksichtigt worden.

Wir werden also Zusatzglieder in S nur bei den charakteristischen Gliedern der Form C erhalten. Es war:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dv} = &-[\alpha_2] \eta \sin(2w - \mathrm{v}) - [\alpha_3] \eta' \sin(2w - \mathrm{v}_1) \\
&- [\alpha_{14}] \eta^2 \sin(4w - 2\mathrm{v}) - [\alpha_{15}] \eta\eta' \sin(4w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) - [\alpha_{16}] \eta'^2 \sin(4w - 2\mathrm{v}_1) \\
&- [\alpha_{30}] \sin^2 j \sin(4w - 2\upsilon) - [\alpha_{31}] \sin j \sin j' \sin(4w - \upsilon - \upsilon_1) - [\alpha_{32}] \sin^2 j' \sin(4w - 2\upsilon_1).
\end{aligned}$$

Die Klammern der Koefficienten sollen anzeigen, dass hier die Divisoren und die exargumentalen Glieder zu unterdrücken sind, hier also die reinen Koefficienten der Differentialgleichung stehen.

Vorher soll jedoch untersucht werden, ob es gerechtfertigt ist, den Einfluss der aus der Veränderlichkeit von η, Π etc. resultierenden Glieder erst nach Ermittlung der exargumentalen Teile zu berücksichtigen. Gegeben:

$$\frac{dX}{dv} = a \eta \sin(2w - \mathrm{v}).$$

www.libtool.com.cn

Dann ist in bekannter Weise:

$$\text{(a)} \qquad X_1 = a\int^{\overline{V}=\text{const.}} \eta \sin(2w-\mathrm{v})\,dv + 2\mu\int a\int^{\overline{V}=\text{const.}} \eta\cos(2w-\mathrm{v})\frac{d\overline{V}}{dv}\,dv^2.$$

Betrachten wir nun η, Π im ersten Gliede als variabel, so ist nach den bekannten Formeln:

$$\text{(b)} \qquad X_1 = a\eta\cos\Pi\int^{\overline{V}=\text{const.}} \sin(2w-v)\,dv + a\eta\sin\Pi\int^{\overline{V}=\text{const.}} \cos(2w-v)\,dv$$
$$-a\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\iint^{\overline{V}=\text{const.}} \sin(2w-v)\,dv^2 - a\frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\iint^{\overline{V}=\text{const.}} \cos(2w-v)\,dv^2+\cdots$$

Bei Ermittelung des Doppelintegrals in (a) können wir einmal η und Π als konstant ansehen, da wir sonst den zweiten Differentialquotienten dieser Funktionen erhielten, und dieser soll unserer Voraussetzung nach null werden. Wir können den zweiten Teil in (a) schreiben, indem wir im zweiten Integrale nicht bloss $\overline{V}$, sondern auch η und Π als konstant ansehen und diese Integration sofort ausführen:

$$\text{(c)} \qquad \frac{2\mu a}{\delta_1}\int \eta\sin(2w-\mathrm{v})\frac{d\overline{V}}{dv}\,dv = \text{pars}\,X_1.$$

Wir wollen in diesem Integral erst mit $\overline{V}$ auch η und Π als variabel betrachten. Wir machen also zur Ermittlung von (c) folgende Annahme:

$$\text{(d)} \quad X_1 = a\int^{\overline{V}=\text{const.},\ \eta,\ \Pi\ \text{variabel}} \eta\sin(2w-\mathrm{v})\,dv \qquad +2\mu\int_{a}^{\eta,\ \Pi,\ \overline{V}=\text{const.}} {}^{\eta,\ \Pi,\ \overline{V}\ \text{variabel}}\int \eta\cos(2w-\mathrm{v})\frac{d\overline{V}}{dv}\,dv^2.$$

Es möge nun durch Multiplizieren mit $\frac{d\overline{V}}{dv}$ das zweite Glied in (d) folgende Form erhalten, während das erste jetzt als erledigt gilt:

$$X_2' = +\frac{\mu a\gamma}{\delta_1}\int \eta^2\sin(4w-2\mathrm{v})\,dv = \text{pars}\,X_1.$$

Dies können wir offenbar mit dem betreffenden Gliede zweiten Grades aus der Differentialgleichung vereinigen, welches lauten möge:

$$X_2 = a'\int \eta^2\sin(4w-2\mathrm{v})\,dv,$$

also

$$X_2 + X_2' = \left(a' + \frac{\mu a\gamma_2}{\delta_1}\right)\int \eta^2\sin(4w-2\mathrm{v})\,dv.$$

Lassen wir die hieraus entstehenden exargumentalen Glieder als von höherem Grade fort und integrieren, wobei jetzt η, Π als variabel anzusehen sind:

www.libtool.com.cn

$$X_2 + X_2' = -\frac{a' + \frac{\mu a \gamma_2}{\delta_1}}{2\delta_1}\eta^2 \cos(4w - 2v)$$

$$+\frac{a' + \frac{\mu a \gamma_2}{\delta_1}}{4\delta_1^2}\left[\frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv}\sin(4w-2v) + \frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv}\cos(4w-2v)\right]$$

Setzen wir $-\frac{a' + \frac{\mu a \gamma_2}{\delta_1}}{2\delta_1} = \alpha'$, so wird hiernach der Koefficient des Zusatzgliedes gleich $-\frac{\alpha'}{2\delta_1}$. Der Koefficient des Zusatzgliedes ersten Grades folgt unmittelbar aus (b), weil dort $\overline{V} =$ const. für das Doppelintegral ebenfalls gilt, also exargumentale Teile nicht mehr auftreten können. Mithin ergiebt sich:

»Bei Differentialgleichungen erster Ordnung wird der Koefficient der Zusatzglieder im Integral derselbe, wie der der Hauptglieder, nur dass das Quadrat des Divisors auftritt. Wir brauchen in den Zusatzgliedern also nicht noch einmal die exargumentalen Teile zu berechnen, insofern wir diese zuerst ermitteln und dann erst die aus der Variabilität von η, Π resultierenden Zusätze«.

Für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung gilt dies nur näherungsweise, wie wir nachher sehen werden.

Die Reihenfolge, in welcher wir die Ermittlung der exargumentalen Teile sowie der Zusatzglieder vornehmen, ist demnach berechtigt und wir brauchen auch in S_2 nicht weiter auf die Werte der Koefficienten zu achten; es bedeute demnach die Bezeichnung $[\alpha_k]$ hier nur, dass der Divisor zu unterdrücken ist, dass die exargumentalen Glieder dagegen schon darin enthalten seien. Wenden wir nun die zu Anfang des Kapitels gegebenen Integrationsformeln hierauf an und nehmen nur die zweiten Teile hier mit, aus welchen allein die Zusatzglieder folgen, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\text{pars } S = {} & +[\alpha_2]\left[\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\iint\sin(2w-v)\,dv^2 + \frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\iint\cos(2w-v)\,dv^2\right]+\cdots \\ & +[\alpha_{14}]\left[\frac{d\eta^2\cos 2\Pi}{dv}\iint\sin(4w-2v)\,dv^2 + \frac{d\eta^2\sin 2\Pi}{dv}\iint\cos(4w-2v)\,dv^2\right]+\cdots \\ & +[\alpha_{30}]\left[\frac{d\sin^2 j\cos 2\sigma}{dv}\iint\sin(4w-2v)\,dv^2 + \frac{d\sin^2 j\sin 2\sigma}{dv}\iint\cos(4w-2v)\,dv^2\right]+\cdots,\end{aligned}$$

wo wir die andern Glieder nicht hingeschrieben haben, da sie ganz analog sind. Führen wir die zweifache Integration aus und berücksichtigen wir den vorhin abgeleiteten Satz, so folgt:

$$\begin{aligned}\text{pars } S = {} & -\frac{\alpha_2}{\delta_1}\left[\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\sin(2w-v) + \frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\cos(2w-v)\right] \\ & -\frac{\alpha_2}{\delta_1}\left[\frac{d\eta'\cos\Pi_1}{dv}\sin(2w-v) + \frac{d\eta'\sin\Pi_1}{dv}\cos(2w-v)\right]\end{aligned}$$

www.libtool.com.cn

$$-\frac{\alpha_{14}}{2\delta_1}\left[\frac{d\eta^2\cos 2\Pi}{dv}\sin(4w-2v)+\frac{d\eta^2\sin 2\Pi}{dv}\cos(4w-2v)\right]$$
$$-\frac{\alpha_{15}}{2\delta_1}\left[\frac{d\eta\eta'\cos(\Pi+\Pi_1)}{dv}\sin(4w-2v)+\frac{d\eta\eta'\sin(\Pi+\Pi_1)}{dv}\cos(4w-2v)\right]$$
$$-\frac{\alpha_{16}}{2\delta_1}\left[\frac{d\eta'^2\cos 2\Pi_1}{dv}\sin(4w-2v)+\frac{d\eta'^2\sin 2\Pi_1}{dv}\cos(4w-2v)\right]$$
$$-\frac{\alpha_{30}}{2\delta_1}\left[\frac{d\sin^2 j\cos 2\sigma}{dv}\sin(4w-2v)+\frac{d\sin^2 j\sin 2\sigma}{dv}\cos(4w-2v)\right]$$
$$-\frac{\alpha_{31}}{2\delta_1}\left[\frac{d\sin j\sin j'\cos(\sigma+\sigma_1)}{dv}\sin(4w-2v)+\frac{d\sin j\sin j'\sin(\sigma+\sigma_1)}{dv}\cos(4w-2v)\right]$$
$$-\frac{\alpha_{32}}{2\delta_1}\left[\frac{d\sin^2 j'\cos 2\sigma_1}{dv}\sin(4w-2v)+\frac{d\sin^2 j'\sin 2\sigma_1}{dv}\cos(4w-2v)\right].$$

Benutzt man die zu Anfang des Kapitels, sowie in Brendel, Th. d. kl. Pl. gegebenen Differentialformeln dieser langperiodischen Functionen und multipliziert die periodischen Aggregate aus, so erhält man:

pars S =

$$-\frac{\alpha_2}{\delta_1}\varsigma\varkappa\cos(2w-v+\omega)-\frac{\alpha_2}{\delta_1}\sum\varsigma_n\varkappa_n\cos(2w-v+\omega_n)-\frac{\alpha_2}{\delta_1}\sum\varsigma_n\varkappa'_n\cos(2w-v+\omega_n)$$

$$-\frac{\varsigma}{\delta_1}\alpha_{14}\varkappa^2\cos(4w-2v+2\omega)-\alpha_{14}\sum\frac{\varsigma+\varsigma_n}{\delta_1}\varkappa\varkappa_n\cos(4w-2v+\omega+\omega_n)-\alpha_{14}\sum\frac{\varsigma_n}{\delta_1}\varkappa_n^2\cos(4w-2v+2\omega_n)$$
$$-\alpha_{14}\mathrm{S}\frac{\varsigma_m+\varsigma_n}{\delta_1}\varkappa_m\varkappa_n\cos(4w-2v+\omega_m+\omega_n)-\alpha_{15}\sum\frac{\varsigma+\varsigma_n}{2\delta_1}\varkappa\varkappa'_n\cos(4w-2v+\omega+\omega_n)$$
$$-\alpha_{15}\sum\frac{\varsigma_n}{\delta_1}\varkappa_n\varkappa'_n\cos(4w-2v+2\omega_n)-\alpha_{15}\mathrm{S}\frac{\varsigma_m+\varsigma_n}{2\delta_1}(\varkappa_m\varkappa'_n+\varkappa_n\varkappa'_m)\cos(4w-2v+\omega_m+\omega_n)$$
$$-\alpha_{16}\sum\frac{\varsigma_n}{\delta_1}\varkappa'^2_n\cos(4w-2v+2\omega_n)-\alpha_{16}\mathrm{S}\frac{\varsigma_m+\varsigma_n}{\delta_1}\varkappa'_m\varkappa'_n\cos(4w-2v+\omega_m+\omega_n)$$

$$+\alpha_{30}\frac{\tau}{\delta_1}\sin^2\iota\cos(4w-2v+2\vartheta)+\alpha_{30}\sum\frac{\tau+\tau_n}{\delta_1}\sin\iota\sin\iota_n\cos(4w-2v+\vartheta+\vartheta_n)+\alpha_{30}\sum\frac{\tau_n}{\delta_1}\sin^2\iota_n\cos(4w-2v+2\vartheta_n)$$
$$+\alpha_{30}\mathrm{S}\frac{\tau_m+\tau_n}{\delta_1}\sin\iota_m\sin\iota_n\cos(4w-2v+\vartheta_m+\vartheta_n)+\alpha_{31}\sum\frac{\tau+\tau_n}{2\delta_1}\sin\iota\sin\iota'_n\cos(4w-2v+\vartheta+\vartheta_n)$$
$$+\alpha_{31}\sum\frac{\tau_n}{\delta_1}\sin\iota_n\sin\iota'_n\cos(4w-2v+2\vartheta_n)+\alpha_{31}\mathrm{S}\frac{\tau_m+\tau_n}{2\delta_1}[\sin\iota_m\sin\iota'_n+\sin\iota_n\sin\iota'_m]\cos(4w-2v+\vartheta_m+\vartheta_n)$$
$$+\alpha_{32}\sum\frac{\tau_n}{\delta_1}\sin^2\iota'_n\cos(4w-2v+2\vartheta_n)+\alpha_{32}\mathrm{S}\frac{\tau_m+\tau_n}{\delta_1}\sin\iota'_m\sin\iota'_n\cos(4w-2v+\vartheta_m+\vartheta_n).$$

Es ist hier die Rechnung ausführlich wiedergegeben, um den Gang derselben besser veranschaulichen zu können. Wir wollen jetzt bezeichnen:

(157)
$$v-\omega = g \qquad v-\vartheta = h$$
$$v-\omega_n = g_n \qquad v-\vartheta_n = h_n.$$

www.libtool.com.cn

Dann schreiben sich die Zusatzglieder am besten in folgender Form, wo die Symbole $\sum_n$ und $\mathbf{S}_{m \cdot n}$ die zu Anfang des Kapitels erläuterte Bedeutung haben:

$$
\begin{aligned}
(158) \qquad \text{pars } S = {} & \bar{a}_1 \cos(2w-g) && + \sum \bar{a}_{2\cdot n} \cos(2w-g_n) \\
& + \bar{a}_{13} \cos(4w-2g) && + \bar{a}_{29} \cos(4w-2h) \\
& + \sum \bar{a}_{14\cdot n} \cos(4w-g-g_n) && + \sum \bar{a}_{30\cdot n} \cos(4w-h-h_n) \\
& + \sum \bar{a}_{15\cdot n} \cos(4w-2g_n) && + \sum \bar{a}_{31\cdot n} \cos(4w-2h_n) \\
& + \mathbf{S}\, \bar{a}_{16\cdot m\cdot n} \cos(4w-g_m-g_n) && + \mathbf{S}\, \bar{a}_{32\cdot m\cdot n} \cos(4w-h_m-h_n).
\end{aligned}
$$

Die Koefficienten haben folgende Bedeutung:

$$
\begin{aligned}
(159) \quad \bar{a}_1 &= -\frac{\varsigma}{\delta_1} \alpha_2 \varkappa, \qquad \bar{a}_{2\cdot n} = -\frac{\varsigma_n}{\delta_1} [\alpha_2 \varkappa_n + \alpha_3 \varkappa_n'] \\
\bar{a}_{13} &= -\frac{\varsigma}{\delta_1} \alpha_{14} \varkappa^2 \\
\bar{a}_{14\cdot n} &= -\frac{\varsigma+\varsigma_n}{\delta_1} \left[\alpha_{14} \varkappa_n + \frac{\alpha_{15}}{2} \varkappa_n'\right] \varkappa \\
\bar{a}_{15\cdot n} &= -\frac{\varsigma_n}{\delta_1} \left[\left(\alpha_{14} \varkappa_n + \frac{\alpha_{15}}{2} \varkappa_n'\right) \varkappa_n + \left(\frac{\alpha_{15}}{2} \varkappa_n + \alpha_{16} \varkappa_n'\right) \varkappa_n'\right] \\
\bar{a}_{16\cdot m\cdot n} &= -\frac{\varsigma_m+\varsigma_n}{\delta_1} \left[\left(\alpha_{14} \varkappa_n + \frac{\alpha_{15}}{2} \varkappa_n'\right) \varkappa_m + \left(\frac{\alpha_{15}}{2} \varkappa_n + \alpha_{16} \varkappa_n'\right) \varkappa_m'\right] \\
\bar{a}_{29} &= \frac{\tau}{\delta_1} \alpha_{30} \sin^2 \iota \\
\bar{a}_{30\cdot n} &= \frac{\tau+\tau_n}{\delta_1} \left[\alpha_{30} \sin \iota_n + \frac{\alpha_{31}}{2} \sin \iota_n'\right] \sin \iota \\
\bar{a}_{31\cdot n} &= \frac{\tau_n}{\delta_1} \left[\left(\alpha_{30} \sin \iota_n + \frac{\alpha_{31}}{2} \sin \iota_n'\right) \sin \iota_n + \left(\frac{\alpha_{31}}{2} \sin \iota_n + \alpha_{32} \sin \iota_n'\right) \sin \iota_n'\right] \\
\bar{a}_{32\cdot m\cdot n} &= \frac{\tau_m+\tau_n}{\delta_1} \left[\left(\alpha_{30} \sin \iota_n + \frac{\alpha_{31}}{2} \sin \iota_n'\right) \sin \iota_m + \left(\frac{\alpha_{31}}{2} \sin \iota_n + \alpha_{32} \sin \iota_n'\right) \sin \iota_m'\right].
\end{aligned}
$$

Diese Koefficienten sind, wie schon erwähnt, v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ und für den Grenzfall der charakteristischen Planeten, sowie für die kritischen $\lessgtr m'$.

---

10) Die Zusatzglieder in R sind bedeutend schwieriger zu ermitteln. Wir wollen diesmal jedoch die Rechnung nicht so ausführlich darlegen, da sie nach den vorigen Angaben leicht zu übersehen ist. Analog den Formeln (106) und (107) werden wir hier bekommen, indem wir nur die zweiten Teile der Formeln für die partielle Integration berücksichtigen, die allein die Zusatzglieder geben, und

www.libtool.com.cn

indem wir in den partikularen Integralen nur die Teile mitnehmen, welche kleine Divisoren erhalten:

$$g_1 = \tfrac{1}{2}\frac{[b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}]}{4\delta_1^2}\left[\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\cos(4w-2v)-\frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\sin(4w-2v)\right]+\cdots$$
$$+\tfrac{1}{2}\frac{[b_{2\cdot2\cdot0}]}{\delta_1^2}\frac{d\eta^2}{dv}\cos(2w-v)+\tfrac{1}{2}\frac{[b^{+1}_{2\cdot1\cdot1}]}{\delta_1^2}\left[\frac{d\eta\eta'\cos(\Pi-\Pi_1)}{dv}\cos(2w-v)+\frac{d\eta\eta'\sin(\Pi-\Pi_1)}{dv}\sin(2w-v)\right]$$
$$+\tfrac{1}{2}\frac{[b^{-1}_{2\cdot1\cdot1}]}{\delta_1^2}\left[\frac{d\eta\eta'\cos(\Pi-\Pi_1)}{dv}\cos(2w-v)-\frac{d\eta\eta'\sin(\Pi-\Pi_1)}{dv}\sin(2w-v)\right]+\cdots$$
$$+\tfrac{1}{2}\frac{[b^{-2}_{2\cdot2\cdot0}]}{\delta_1^2}\left[\frac{d\eta^2\cos 2\Pi}{dv}\cos(2w-v)-\frac{d\eta^2\sin 2\Pi}{dv}\sin(2w-v)\right]+\cdots$$
$$+\tfrac{1}{2}\frac{[b^{-2}_{6\cdot2\cdot0}]}{9\delta_1^2}\left[\frac{d\eta^2\cos 2\Pi}{dv}\cos(6w-3v)-\frac{d\eta^2\sin 2\Pi}{dv}\sin(6w-3v)\right]+\cdots$$
$$+\cdots\cdots\cdots$$

$$g_2 = -\tfrac{1}{2}\frac{[b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}]}{4\delta_1^2}\left[\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\sin(4w-2v)+\frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\cos(4w-2v)\right]+\cdots$$
$$-\tfrac{1}{2}\frac{[b_{2\cdot2\cdot0}]}{\delta_1^2}\frac{d\eta^2}{dv}\sin(2w-v)-\tfrac{1}{2}\frac{[b^{+1}_{2\cdot1\cdot1}]}{\delta_1^2}\left[\frac{d\eta\eta'\cos(\Pi-\Pi_1)}{dv}\sin(2w-v)-\frac{d\eta\eta'\sin(\Pi-\Pi_1)}{dv}\cos(2w-v)\right]$$
$$-\tfrac{1}{2}\frac{[b^{-1}_{2\cdot1\cdot1}]}{\delta_1^2}\left[\frac{d\eta\eta'\cos(\Pi-\Pi_1)}{dv}\sin(2w-v)+\frac{d\eta\eta'\sin(\Pi-\Pi_1)}{dv}\cos(2w-v)\right]+\cdots$$
$$+\tfrac{1}{2}\frac{[b^{-2}_{2\cdot2\cdot0}]}{\delta_1^2}\left[\frac{d\eta^2\cos 2\Pi}{dv}\sin(2w-v)+\frac{d\eta^2\sin 2\Pi}{dv}\cos(2w-v)\right]+\cdots$$
$$-\tfrac{1}{2}\frac{[b^{-2}_{6\cdot2\cdot0}]}{9\delta_1^2}\left[\frac{d\eta^2\cos 2\Pi}{dv}\sin(6w-3v)+\frac{d\eta^2\sin 2\Pi}{dv}\cos(6w-3v)\right]+\cdots$$
$$+\cdots\cdots\cdots$$

Die Vernachlässigung der Integral-Teile ohne kleinen Divisor giebt im Integral einen Fehler v. d. Ord. $m'^2+\frac{m'^3}{\delta_1}$, ist also gerechtfertigt. $[b_s]$ soll abkürzend anzeigen, dass der zugehörige exargumentale Teil mit einbegriffen ist, also:

$$[b_{2\cdot2\cdot0}] = b_{2\cdot2\cdot0}+\text{pars exarg. aus } R_{0+1}.$$

Wir dürfen so vorgehen, da die Differentialgleichungen für die Parameter g_1 und g_2 erster Ordnung sind, also für sie voriger Satz gilt. Man muss nun für die $\frac{d\eta\overset{\cos}{\sin}\Pi}{dv}$ etc. die im § 1 dieses Kapitels gegebenen periodischen Aggregate einführen, dann die Ausmultiplizierung bewerkstelligen und die Integrale vereinigen nach der Formel:

$$R = g_1\sin v - g_2\cos v.$$

www.libtool.com.cn

Wir wollen dies an einem Gliede zur Probe ausführen und daran einige Bemerkungen über die hierbei begangenen Vernachlässigungen knüpfen.

$$g_1 = \tfrac{1}{2}\frac{[b^{-2}_{2\cdot 2\cdot 0}]}{\delta_1^2}\left[\frac{d\eta^2\cos 2\Pi}{dv}\cos(2w-v) - \frac{d\eta^2\sin 2\Pi}{dv}\sin(2w-v)\right]$$

$$g_2 = \tfrac{1}{2}\frac{[b^{-2}_{2\cdot 2\cdot 0}]}{\delta_1^2}\left[\frac{d\eta^2\cos 2\Pi}{dv}\sin(2w-v) + \frac{d\eta^2\sin 2\Pi}{dv}\cos(2w-v)\right].$$

Mithin wird:

$$\text{pars } R_2 = -\frac{[b^{-2}_{2\cdot 2\cdot 0}]}{2\delta_1^2}\left[\frac{d\eta^2\cos 2\Pi}{dv}\sin(2w-2v) + \frac{d\eta^2\sin 2\Pi}{dv}\cos(2w-2v)\right].$$

Nun ist:

$$\frac{[b^{-2}_{2\cdot 2\cdot 0}]}{2\delta_1^2} = \frac{b^{-2}_{2\cdot 2\cdot 0}}{2\delta_1^2} + \frac{\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_{14}}{2\delta_1^3},$$

wie aus Formel (78) und (109) hervorgeht. Wir wollen nun versuchen, dies analog dem Ausdruck für S auf die Form zu bringen $\frac{\beta_k}{\text{Divisor}}$. In diesem Falle ist:

$$\beta_{11} = \frac{b^{-2}_{2\cdot 2\cdot 0}}{\delta_1(2-\delta_1)} + \frac{2\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_{14}}{\delta_1^2(4-\delta_1^2)} = \frac{b^{-2}_{2\cdot 2\cdot 0}}{2\delta_1}(1-\tfrac{1}{2}\delta_1)^{-1} + \frac{\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_{14}}{2\delta_1^2}(1-\tfrac{1}{4}\delta_1^2)^{-1}$$

oder

$$\beta_{11} = \frac{b^{-2}_{2\cdot 2\cdot 0}}{2\delta_1} + \frac{\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_{14}}{2\delta_1^2} + \frac{m'}{4} + \frac{m'^2}{16\delta_1}.$$

Da nun diese Glieder in den Zusätzen mit $\frac{\varsigma_n}{\delta_1}$, d. h. mit $\frac{m'}{\delta_1}$ multipliziert werden, so können wir in der That ganz wie in S verfahren, also auch schreiben $\frac{\beta_k}{\text{Divisor}} \times$ Zusatzglied mit einem Fehler $\frac{m'^2}{4\delta_1}$ resp. $\frac{m'^3}{16\delta_1^2}$. Dieser ist im Verhältnis zu den vorigen Vernachlässigungen erlaubt. Mit derselben Genauigkeit lässt sich dies auch für die andern Koefficienten nachweisen, was ich hier wohl nicht näher zu erörtern brauche.

Ohne auf weitere Einzelheiten dieser äusserst mühsamen und ermüdenden Entwicklungen einzugehen, die sich nebst den Controllrechnungen über 23 Folio-Seiten hinziehen, werde ich hier die Schlussresultate der Zusatzglieder in R geben. Ich will nur bemerken, dass die aus den D-Gliedern resultierenden Zusatzglieder in R berücksichtigt sind, und dass die C-Glieder aufgeführt sind, soweit sie aus

$$\text{pars}\frac{d^2R}{dv^2} + R = (2S)_{\text{Zusatz}}$$

herrühren. Es wird dann:

(160)
$$\text{pars } R_1 = 2\bar{a}_1\cos(2w-g) + 2\sum\bar{a}_{2\cdot n}\cos(2w-g_n) + \bar{b}_3\cos(4w-g) + \sum\bar{b}_{4\cdot n}\cos(4w-g_n)$$

www.libtool.com.cn

(160) $$\begin{aligned}\text{pars } R_2 = {} & \sum \bar{b}_{5\cdot n}\cos(2w+g-g_n) + \bar{b}_9\cos(2w-2g) + 2\bar{a}_{13}\cos(4w-2g)\\ & + \sum \bar{b}_{6\cdot n}\cos(2w-g+g_n) + \sum \bar{b}_{10\cdot n}\cos(2w-g-g_n) + 2\sum \bar{a}_{14\cdot n}\cos(4w-g-g_n)\\ & + \mathfrak{S}\bar{b}_{7\cdot m\cdot n}\cos(2w+g_m-g_n) + \sum \bar{b}_{11\cdot n}\cos(2w-2g_n) + 2\sum \bar{a}_{15\cdot n}\cos(4w-2g_n)\\ & + \mathfrak{S}\bar{b}_{8\cdot m\cdot n}\cos(2w-g_m+g_n) + \mathfrak{S}\bar{b}_{12\cdot m\cdot n}\cos(2w-g_m-g_n) + 2\mathfrak{S}\bar{a}_{16\cdot m\cdot n}\cos(4w-g_m-g_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \bar{b}_{17}\cos(6w-2g) + \sum \bar{b}_{21\cdot n}\cos(2w+h-h_n) + \bar{b}_{25}\cos(2w-2h)\\ & + \sum \bar{b}_{18\cdot n}\cos(6w-g-g_n) + \sum \bar{b}_{22\cdot n}\cos(2w-h+h_n) + \sum \bar{b}_{26\cdot n}\cos(2w-h-h_n)\\ & + \sum \bar{b}_{19\cdot n}\cos(6w-2g_n) + \mathfrak{S}\bar{b}_{23\cdot m\cdot n}(\cos 2w+h_m-h_n) + \sum \bar{b}_{27\cdot n}\cos(2w-2h_n)\\ & + \mathfrak{S}\bar{b}_{20\cdot m\cdot n}\cos(6w-g_m-g_n) + \mathfrak{S}\bar{b}_{24\cdot m\cdot n}\cos(2w-h_m+h_n) + \mathfrak{S}\bar{b}_{28\cdot m\cdot n}\cos(2w-h_m-h_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + 2\bar{a}_{29}\cos(4w-2h) + \bar{b}_{38}\cos(6w-2h)\\ & + 2\sum \bar{a}_{30\cdot n}\cos(4w-h-h_n) + \sum \bar{b}_{34\cdot n}\cos(6w-h-h_n)\\ & + 2\sum \bar{a}_{31\cdot n}\cos(4w-2h_n) + \sum \bar{b}_{35\cdot n}\cos(6w-2h_n)\\ & + 2\mathfrak{S}\bar{a}_{32\cdot m\cdot n}\cos(4w-h_m-h_n) + \mathfrak{S}\bar{b}_{36\cdot m\cdot n}\cos(6w-h_m-h_n)\end{aligned}$$

Die Werte der Koefficienten sind:

(161) $$\bar{b}_3 = -\frac{\varsigma}{2\delta_1}\beta_4\varkappa \qquad \bar{b}_{4\cdot n} = -\frac{\varsigma_n}{2\delta_1}[\beta_4\varkappa_n+\beta_5\varkappa_n']$$

$$\bar{b}_{5\cdot n} = \frac{\varsigma-\varsigma_n}{\delta_1}(\beta_7\varkappa_n+\beta_8\varkappa_n')\varkappa \qquad \bar{b}_{7\cdot m\cdot n} = \frac{\varsigma_m-\varsigma_n}{\delta_1}[(\beta_7\varkappa_n+\beta_8\varkappa_n')\varkappa_m+(\beta_9\varkappa_n+\beta_{10}\varkappa_n')\varkappa_m']$$

$$\bar{b}_{6\cdot n} = -\frac{\varsigma-\varsigma_n}{\delta_1}(\beta_7\varkappa_n+\beta_9\varkappa_n')\varkappa \qquad \bar{b}_{8\cdot m\cdot n} = -\frac{\varsigma_m-\varsigma_n}{\delta_1}[(\beta_7\varkappa_n+\beta_9\varkappa_n')\varkappa_m+(\beta_8\varkappa_n+\beta_{10}\varkappa_n')\varkappa_m']$$

$$\bar{b}_9 = -\frac{2\varsigma}{\delta_1}\beta_{11}\varkappa^2 \qquad \bar{b}_{11\cdot n} = -2\frac{\varsigma_n}{\delta_1}\left[\left(\beta_{11}\varkappa_n+\frac{\beta_{12}}{2}\varkappa_n'\right)\varkappa_n+\left(\frac{\beta_{12}}{2}\varkappa_n+\beta_{13}\varkappa_n'\right)\varkappa_n'\right]$$

$$\bar{b}_{10\cdot n} = -2\frac{\varsigma+\varsigma_n}{\delta_1}\left(\beta_{11}\varkappa_n+\frac{\beta_{12}}{2}\varkappa_n'\right)\varkappa \qquad \bar{b}_{12\cdot m\cdot n} = -2\frac{\varsigma_m+\varsigma_n}{\delta_1}\left[\left(\beta_{11}\varkappa_n+\frac{\beta_{12}}{2}\varkappa_n'\right)\varkappa_m+\left(\frac{\beta_{12}}{2}\varkappa_n+\beta_{13}\varkappa_n'\right)\varkappa_m'\right]$$

$$\bar{b}_{17} = -\frac{2\varsigma}{3\delta_1}\beta_{17}\varkappa^2 \qquad \bar{b}_{19\cdot n} = -\frac{2}{3}\frac{\varsigma_n}{\delta_1}\left[\left(\beta_{17}\varkappa_n+\frac{\beta_{18}}{2}\varkappa_n'\right)\varkappa_n+\left(\frac{\beta_{18}}{2}\varkappa_n+\beta_{19}\varkappa_n'\right)\varkappa_n'\right]$$

$$\bar{b}_{18\cdot n} = -\frac{2}{3}\frac{\varsigma+\varsigma_n}{\delta_1}\left(\beta_{17}\varkappa_n+\frac{\beta_{18}}{2}\varkappa_n'\right)\varkappa \qquad \bar{b}_{20\cdot m\cdot n} = -\frac{2}{3}\frac{\varsigma_m+\varsigma_n}{\delta_1}\left[\left(\beta_{17}\varkappa_n+\frac{\beta_{18}}{2}\varkappa_n'\right)\varkappa_m+\left(\frac{\beta_{18}}{2}\varkappa_n+\beta_{19}\varkappa_n'\right)\varkappa_m'\right]$$

$$\bar{b}_{21\cdot n} = -\frac{\tau-\tau_n}{\delta_1}(\beta_{23}\sin\iota_n+\beta_{24}\sin\iota_n')\sin\iota \qquad \bar{b}_{23\cdot m\cdot n} = -\frac{\tau_m-\tau_n}{\delta_1}[(\beta_{23}\sin\iota_n+\beta_{24}\sin\iota_n')\sin\iota_m+(\beta_{25}\sin\iota_n+\beta_{26}\sin\iota_n')\sin\iota_m']$$

$$\bar{b}_{22\cdot n} = \frac{\tau-\tau_n}{\delta_1}(\beta_{23}\sin\iota_n+\beta_{25}\sin\iota_n')\sin\iota \qquad \bar{b}_{24\cdot m\cdot n} = \frac{\tau_m-\tau_n}{\delta_1}[(\beta_{23}\sin\iota_n+\beta_{25}\sin\iota_n')\sin\iota_m+(\beta_{24}\sin\iota_n+\beta_{26}\sin\iota_n')\sin\iota_m']$$

$$\bar{b}_{25} = \frac{2\tau}{\delta_1}\beta_{27}\sin^2\iota \qquad \bar{b}_{27\cdot n} = \frac{2\tau_n}{\delta_1}\left[\left(\beta_{27}\sin\iota_n+\frac{\beta_{28}}{2}\sin\iota_n'\right)\sin\iota_n+\left(\frac{\beta_{28}}{2}\sin\iota_n+\beta_{29}\sin\iota_n'\right)\sin\iota_n'\right]$$

$$\bar{b}_{26\cdot n} = 2\frac{\tau+\tau_n}{\delta_1}\left(\beta_{27}\sin\iota_n+\frac{\beta_{28}}{2}\sin\iota_n'\right)\sin\iota \qquad \bar{b}_{28\cdot m\cdot n} = 2\frac{\tau_m+\tau_n}{\delta_1}\left[\left(\beta_{27}\sin\iota_n+\frac{\beta_{28}}{2}\sin\iota_n'\right)\sin\iota_m+\left(\frac{\beta_{28}}{2}\sin\iota_n+\beta_{29}\sin\iota_n'\right)\sin\iota_m'\right]$$

www.libtool.com.cn

$$\bar{b}_{33} = \frac{2\tau}{3\delta_1}\beta_{33}\sin^2\iota \qquad \bar{b}_{35\cdot n} = \tfrac{2}{3}\frac{\tau_n}{\delta_1}\left[\left(\beta_{33}\sin\iota_n+\frac{\beta_{34}}{2}\sin\iota'_n\right)\sin\iota_n+\left(\frac{\beta_{34}}{2}\sin\iota_n+\beta_{35}\sin\iota'_n\right)\sin\iota'_n\right]$$

$$\bar{b}_{34\cdot n} = \tfrac{1}{3}\frac{\tau+\tau_n}{\delta_1}\left(\beta_{33}\sin\iota_n+\frac{\beta_{34}}{2}\sin\iota'_n\right)\sin\iota \qquad \bar{b}_{36\cdot m\cdot n} = \tfrac{2}{3}\frac{\tau_m+\tau_n}{\delta_1}\left[\left(\beta_{33}\sin\iota_n+\frac{\beta_{34}}{2}\sin\iota'_n\right)\sin\iota_m+\left(\frac{\beta_{34}}{2}\sin\iota_n+\beta_{35}\sin\iota'_n\right)\sin\iota'_m\right].$$

Die Glieder sind hier alle von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$, abgesehen von den exargumentalen Teilen. Die Reihe der exargumentalen Glieder ist die gleiche wie in R_1 und R_2, nur dass hier der Faktor $\frac{m'}{\delta_1}$ noch hinzutritt und die Konvergenz etwas erhöht. Wir wollen nun noch in R_2 den aus gewissen Zusatzgliedern resultierenden konstanten Teil berücksichtigen, denn für die A-Glieder kommen diese wegen ihrer Kleinheit nicht in Betracht. Wir nehmen nur mit

$$\text{pars}\,\frac{d^2R}{dv^2}+R = (S_1^2)_{\text{Zusatz}} = \tfrac{1}{2}\bar{a}_1^2+\tfrac{1}{2}\sum\bar{a}_{2\cdot n}^2,$$

also hinreichend genau

(162) $$\text{pars const.}\,R_2 = \tfrac{1}{2}\bar{a}_1^2+\tfrac{1}{2}\sum\bar{a}_{2\cdot n}^2.$$

Diese Glieder sind v. d. Ord. $\frac{m'^4}{\delta_1^4}$ und wohl stets zu vernachlässigen.

---

11) Wir haben jetzt die Zusatzglieder in K und V zu ermitteln. Wir werden hier nur für V neue Zusatzglieder aufzustellen haben, da nur dies einen kleinen Divisor erhält. In K brauchen wir nur die aus $2R$ kommenden Zusätze der Form D mitzunehmen und zwar unter Vernachlässigung des jetzt entstehenden Divisors. Ausserdem wollen wir noch einige Glieder v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ mitnehmen und müssen auch die Funktion Ξ berücksichtigen, d. h. die aus der Mittelpunktsgleichung entspringenden Zusatzglieder. Zu dem Zwecke schreiben wir:

$$\frac{dK}{dv} = -2\,(R)_{\text{Zusatz}}+(6R_1-2S_1)_{\text{Zusatz}}\,\eta\cos\mathrm{v}-\frac{d\Xi}{dv},$$

wir setzen hier:

$$\eta\cos\mathrm{v} = \mathfrak{x}\cos g+\sum\mathfrak{x}_n\cos g_n.$$

Ferner ist nach Br. Formel (228b) und (253b):

$$\Xi = 2\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\cos v+2\frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\sin v-\tfrac{3}{8}\frac{d\eta^2\cos 2\Pi}{dv}\cos 2v-\tfrac{3}{8}\frac{d\eta^2\sin 2\Pi}{dv}\sin 2v.$$

Mit Hülfe dieser Formeln, sowie der zu Anfang des Kapitels gegebenen Relation erhalten wir, wenn wir ausmultiplizieren, integrieren und in den Divi-

www.libtool.com.cn

soren die δ_1 gegen die Einheit vernachlässigen $\left(\text{Fehler } \frac{m'^2}{\delta_1}\right)$:

$$(163)\quad \text{pars}[K_1+K_2] = -2\varsigma\varkappa\sin g - 2\sum \varsigma_n \varkappa_n \sin g_n$$
$$+\tfrac{3}{4}\varsigma\varkappa^2\sin 2g + \tfrac{3}{4}\sum(\varsigma+\varsigma_n)\varkappa\varkappa_n\sin(g+g_n) + \tfrac{3}{4}\sum \varsigma_n\varkappa_n^2\sin 2g_n + \tfrac{3}{4}\mathfrak{S}(\varsigma_m+\varsigma_n)\varkappa_m\varkappa_n\sin(g_m+g_n)$$
$$-2\bar{b}_3\sin(4w-g) - 2\sum \bar{b}_{4\cdot n}\sin(4w-g_n)$$

$$+5\sum(\bar{a}_1\varkappa+\bar{a}_{2\cdot n}\varkappa_n)\sin 2w \quad +\bar{\gamma}_9\sin(2w-2g) \quad -2\bar{b}_{17}\sin(6w-2g)$$
$$+\sum\bar{\gamma}_{5\cdot n}\sin(2w+g-g_n) \quad +\sum\bar{\gamma}_{10\cdot n}\sin(2w-g-g_n) \quad -2\sum\bar{b}_{18\cdot n}\sin(6w-g-g_n)$$
$$+\sum\bar{\gamma}_{6\cdot n}\sin(2w-g+g_n) \quad +\sum\bar{\gamma}_{11\cdot n}\sin(2w-2g_n) \quad -2\sum\bar{b}_{19\cdot n}\sin(6w-2g_n)$$
$$+\mathfrak{S}\bar{\gamma}_{7\cdot m\cdot n}\sin(2w+g_m-g_n) \quad +\mathfrak{S}\bar{\gamma}_{12\cdot m\cdot n}\sin(2w-g_m-g_n) \quad -2\mathfrak{S}\bar{b}_{20\cdot m\cdot n}\sin(6w-g_m-g_n)$$
$$+\mathfrak{S}\bar{\gamma}_{8\cdot m\cdot n}\sin(2w-g_m+g_n)$$

$$-2\sum\bar{b}_{21\cdot n}\sin(2w+h-h_n) \quad +2\bar{b}_{25}\sin(2w-2h) \quad -2\bar{b}_{23}\sin(6w-2h)$$
$$-2\sum\bar{b}_{22\cdot n}\sin(2w-h+h_n) \quad +2\sum\bar{b}_{26\cdot n}\sin(2w-h-h_n) \quad -2\sum\bar{b}_{24\cdot n}\sin(6w-h-h_n)$$
$$-2\mathfrak{S}\bar{b}_{28\cdot m\cdot n}\sin(2w+h_m-h_n) + 2\sum\bar{b}_{27\cdot n}\sin(2w-2h_n) \quad -2\sum\bar{b}_{25\cdot n}\sin(6w-2h_n)$$
$$-2\mathfrak{S}\bar{b}_{24\cdot m\cdot n}\sin(2w-h_m+h_n) + 2\mathfrak{S}\bar{b}_{28\cdot m\cdot n}\sin(2w-h_m-h_n) - 2\mathfrak{S}\bar{b}_{36\cdot m\cdot n}\sin(6w-h_m-h_n).$$

Hier ist:

$$(164)\quad \begin{aligned}
\bar{\gamma}_{5\cdot n} &= -[2\bar{b}_{5\cdot n}-5\bar{a}_{2\cdot n}\varkappa] & \bar{\gamma}_9 &= 2\bar{b}_9-5\bar{a}_1\varkappa\\
\bar{\gamma}_{6\cdot n} &= -[2\bar{b}_{6\cdot n}-5\bar{a}_1\varkappa_n] & \bar{\gamma}_{10\cdot n} &= 2\bar{b}_{10\cdot n}-5(\bar{a}_1\varkappa_n+\bar{a}_{2\cdot n}\varkappa)\\
\bar{\gamma}_{7\cdot m\cdot n} &= -[2\bar{b}_{7\cdot m\cdot n}-5\bar{a}_{2\cdot n}\varkappa_m] & \bar{\gamma}_{11\cdot n} &= 2\bar{b}_{11\cdot n}-5\bar{a}_{2\cdot n}\varkappa_n\\
\bar{\gamma}_{8\cdot m\cdot n} &= -[2\bar{b}_{8\cdot m\cdot n}-5\bar{a}_{2\cdot m}\varkappa_n] & \bar{\gamma}_{12\cdot m\cdot n} &= 2\bar{b}_{12\cdot m\cdot n}-5(\bar{a}_{2\cdot n}\varkappa_m+\bar{a}_{2\cdot m}\varkappa_n).
\end{aligned}$$

Um die Zusatzglieder in V zu berechnen, soweit sie durch die Differentialgleichungen aus solchen niederen Grades oder aus S und R entstehen, wollen wir setzen:

$$\frac{dV}{dv} = [S-2R]+6R_0[R_2]+(6[R_1]-24R_0[R_1]+6R_0[S_1])\,\eta\cos v.$$

Die eckigen Klammern zeigen an, dass in den betreffenden Funktionen hier nur die Zusatzglieder mitzunehmen sind. Ausserdem werden aus den C-Gliedern selbst noch neue Zusatzglieder entstehen, die mit Hülfe der bekannten Formeln zu rechnen sind aus

$$V = \frac{\gamma_2}{\delta_1^2}\left[\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\cos(2w-v)-\frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\sin(2w-v)\right]+\cdots$$
$$+\frac{[\gamma_{14}]}{4\delta_1^2}\left[\frac{d\eta^2\cos 2\Pi}{dv}\cos(4w-2v)-\frac{d\eta^2\sin 2\Pi}{dv}\sin(4w-2v)\right]+\cdots$$
$$+\frac{\gamma_{30}}{4\delta_1^2}\left[\frac{d\sin^2 j\cos 2\sigma}{dv}\cos(4w-2v)-\frac{d\sin^2 j\sin 2\sigma}{dv}\sin(4w-2v)\right]+\cdots.$$

www.libtool.com.cn

Rechnet man diese, sowie die vorige Gleichung durch, so wird man zu folgendem Resultate gelangen:

$$
\begin{aligned}
(165)\qquad \operatorname{pars}[V_1+V_2] = {} & \frac{\bar\gamma_1}{\delta_1}\sin(2w-g) && +\sum\frac{\bar\gamma_{2\cdot n}}{\delta_1}\sin(2w-g_n)\ ^{1})\\
& +\bar\gamma_{13}\sin(4w-2g) && +\bar\gamma_{29}\sin(4w-2h)\\
& +\sum\bar\gamma_{14\cdot n}\sin(4w-g-g_n) && +\sum\bar\gamma_{30\cdot n}\sin(4w-h-h_n)\\
& +\sum\bar\gamma_{15\cdot n}\sin(4w-2g_n) && +\sum\bar\gamma_{31\cdot n}\sin(4w-2h_n)\\
& +\mathrm{S}\bar\gamma_{16\cdot m\cdot n}\sin(4w-g_m-g_n) && +\mathrm{S}\bar\gamma_{32\cdot m\cdot n}\sin(4w-h_m-h_n)
\end{aligned}
$$

Die Werthe der Koefficienten sind:

$$
(166)\qquad \bar\gamma_1 = \frac{\varsigma}{\delta_1}[3\alpha_2-\gamma_2-\tfrac{3}{2}\beta_1\beta_4]\varkappa
$$

$$
\bar\gamma_{2\cdot n} = \frac{\varsigma_n}{\delta_1}[(3\alpha_2-\gamma_2-\tfrac{3}{2}\beta_1\beta_4)\varkappa_n+(3\alpha_3-\gamma_3-\tfrac{3}{2}\beta_1\beta_5)\varkappa_n']
$$

$$
\bar\gamma_{13} = \frac{1}{2\delta_1}[-2\varsigma\varkappa^2\gamma_{14}'-3\bar a_{13}+3\beta_1(\bar b_9+\bar b_{17})+\tfrac{3}{2}\varkappa(2\bar b_3-7\beta_1\bar a_1)]
$$

$$
\bar\gamma_{14\cdot n} = \frac{1}{2\delta_1}\left[-2(\varsigma+\varsigma_n)\left(\gamma_{14}'\varkappa_n+\gamma_{15}'\frac{\varkappa_n'}{2}\right)\varkappa-3\bar a_{14\cdot n}+\tfrac{3}{2}\varkappa(2\bar b_{4\cdot n}-7\beta_1\bar a_{2\cdot n})+\tfrac{3}{2}\varkappa_n(2\bar b_3-7\beta_1\bar a_1)+3\beta_1(\bar b_{10\cdot n}+\bar b_{18\cdot n})\right]
$$

$$
\bar\gamma_{15\cdot n} = \frac{1}{2\delta_1}\left[-2\varsigma_n\left\{\left(\gamma_{14}'\varkappa_n+\frac{\gamma_{15}'}{2}\varkappa_n'\right)\varkappa_n+\left(\frac{\gamma_{15}'}{2}\varkappa_n+\gamma_{16}'\varkappa_n'\right)\varkappa_n'\right\}-3\bar a_{15\cdot n}+\tfrac{3}{2}\varkappa_n(2\bar b_{4\cdot n}-7\beta_1\bar a_{2\cdot n})+3\beta_1(\bar b_{11\cdot n}+\bar b_{19\cdot n})\right]
$$

$$
\begin{aligned}
\bar\gamma_{16\cdot m\cdot n} = \frac{1}{2\delta_1}\Big[&-2(\varsigma_m+\varsigma_n)\left\{\left(\gamma_{14}'\varkappa+\frac{\gamma_{15}'}{2}\varkappa_n'\right)\varkappa_m+\left(\frac{\gamma_{15}'}{2}\varkappa_n+\gamma_{16}'\varkappa_n'\right)\varkappa_m'\right\}-3\bar a_{16\cdot m\cdot n}+\tfrac{3}{2}\varkappa_m(2\bar b_{4\cdot n}-7\beta_1\bar a_{2\cdot n})\\
&+\tfrac{3}{2}\varkappa_n(2\bar b_{4\cdot m}-7\beta_1\bar a_{2\cdot m})+3\beta_1(\bar b_{12\cdot m\cdot n}+\bar b_{20\cdot m\cdot n})\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\bar\gamma_{29} = \frac{1}{2\delta_1}[2\tau\sin^2\iota\gamma_{30}'-3\bar a_{29}+3\beta_1(\bar b_{25}+\bar b_{33})]
$$

$$
\bar\gamma_{30\cdot n} = \frac{1}{2\delta_1}\left[2(\tau+\tau_n)\left(\gamma_{30}'\sin\iota_n+\frac{\gamma_{31}'}{2}\sin\iota_n'\right)\sin\iota-3\bar a_{30\cdot n}+3\beta_1(\bar b_{26\cdot n}+\bar b_{34\cdot n})\right]
$$

$$
\bar\gamma_{31\cdot n} = \frac{1}{2\delta_1}\left[2\tau_n\left\{\left(\gamma_{30}'\sin\iota_n+\frac{\gamma_{31}'}{2}\sin\iota_n'\right)\sin\iota_n+\left(\frac{\gamma_{31}'}{2}\sin\iota_n+\gamma_{32}'\sin\iota_n'\right)\sin\iota_n'\right\}-3\bar a_{31\cdot n}+3\beta_1(\bar b_{27\cdot n}+\bar b_{35\cdot n})\right]
$$

$$
\bar\gamma_{32\cdot m\cdot n} = \frac{1}{2\delta_1}\left[2(\tau_m+\tau_n)\left\{\left(\gamma_{30}'\sin\iota_n+\frac{\gamma_{31}'}{2}\sin\iota_n'\right)\sin\iota_m+\left(\frac{\gamma_{31}'}{2}\sin\iota_n+\gamma_{32}'\sin\iota_n'\right)\sin\iota_m'\right\}-3\bar a_{32\cdot m\cdot n}+3\beta_1(\bar b_{28\cdot m\cdot n}+\bar b_{36\cdot m\cdot n})\right]
$$

---

1) Bei der numerischen Anwendung auf (108) Hecuba hatte es sich als notwendig erwiesen, in den C-Gliedern ersten Grades in W bei der Berechnung der Zusatzteile aus η, Π insofern weiterzugehen, als dass auch der erste Differentialquotient als variabel betrachtet wird, dass man also die dritte Potenz der Masse hier noch berücksichtigen muss. Das Resultat ist:

$$
(165a)\qquad \operatorname{pars} V = \frac{\bar{\bar\gamma}_1}{\delta_1}\sin(2w-g)+\sum\frac{\bar{\bar\gamma}_{2\cdot n}}{\delta_1}\sin(2w-g_n)
$$

$$
(166a)\qquad \bar{\bar\gamma}_1 = \frac{\varsigma^2}{\delta_1^2}[\gamma_2-3\alpha_2]\varkappa,\quad \bar{\bar\gamma}_{2\cdot n} = \frac{\varsigma_n^2}{\delta_1^2}[(\gamma_2-3\alpha_2)\varkappa_n+(\gamma_3-3\alpha_3)\varkappa_n'].
$$

www.libtool.com.cn

Ferner haben wir den bei der Bestimmung von γ erwähnten Zusatzteil noch zu ermitteln. Er geht ebenfalls aus der Differentialgleichung für $\frac{dV}{dv}$ hervor, und es ist sein Wert folgender:

$$\text{(167)} \qquad \text{pars}\,\gamma = \bar{\xi}_1 \varkappa^2 + \sum \bar{\xi}_{2\cdot n} \varkappa_n^2 + \sum \bar{\xi}_{3\cdot n} \varkappa_n \varkappa_n' + \sum \bar{\xi}_{4\cdot n} \varkappa_n'^2.$$

Hier ist:

$$\text{(168)} \quad \begin{aligned}
\bar{\xi}_1 &= \frac{\varsigma}{\delta_1}\left[\alpha_2^2\left(2+\frac{3\varsigma}{\delta_1}\right)+\alpha_2\left(\frac{21}{2}\beta_1-2\beta_2\right)-\tfrac{3}{4}\beta_4^2\left(1-\frac{\varsigma}{2\delta_1}\right)\right]\\
\bar{\xi}_{2\cdot n} &= \frac{\varsigma_n}{\delta_1}\left[\alpha_2^2\left(2+\frac{3\varsigma_n}{\delta_1}\right)+\alpha_2\left(\frac{21}{2}\beta_1-2\beta_2\right)-\tfrac{3}{4}\beta_4^2\left(1-\frac{\varsigma_n}{2\delta_1}\right)\right]\\
\bar{\xi}_{3\cdot n} &= \frac{\varsigma_n}{\delta_1}\left[2\alpha_2\alpha_3\left(2+\frac{3\varsigma_n}{\delta_1}\right)-2\alpha_2\beta_3+\alpha_3\left(\frac{21}{2}\beta_1-2\beta_2\right)-\tfrac{3}{2}\beta_4\beta_5\left(1-\frac{\varsigma_n}{2\delta_1}\right)\right]\\
\bar{\xi}_{4\cdot n} &= \frac{\varsigma_n}{\delta_1}\left[\alpha_3^2\left(2+\frac{3\varsigma_n}{\delta_1}\right)-2\alpha_3\beta_3-\tfrac{3}{4}\beta_5^2\left(1-\frac{\varsigma_n}{2\delta_1}\right)\right].
\end{aligned}$$

Die Zusatzglieder sind in V v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^3}$, abgesehen von den exargumentalen Teilen, und es gilt hier ebenfalls das für die Reihe der exargumentalen Hauptglieder Gesagte, nur dass die Zusatzglieder mit $\frac{m'}{\delta_1}$ multipliciert sind.

---

12) Die Ermittlung der Zusatzglieder in der Funktion $\mathfrak{Z}$ geschieht in gleicher Weise wie beim Ausdruck R, nur treten hier einmal infolge der Gestalt der Differentialgleichung neue hinzu, sodann haben wir die aus der Veränderlichkeit von $\sin j, \sigma$ etc. bei den D-Gliedern entspringenden Zusatzteile zu ermitteln. Es geschieht dies nach den Formeln (96) und (99), die im § 1 dieses Kapitels gegeben sind. Insofern tritt hier eine Erleichterung ein, als die C-Glieder gar nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Ich will hier auf die mechanische und wenig interessante Herleitung dieser Glieder nicht weiter eingehen, sondern sogleich das Resultat anführen. Der Ermittlungsprozess ist genau derselbe wie bei R.

$$\text{(169)} \quad \begin{aligned}
\text{pars}\,[\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_2] = {} & \bar{c}_1 \sin(4w-h) && + \sum \bar{c}_{2\cdot n} \sin(4w-h_n)\\
& + \bar{c}_3 \sin(2w+h-g) && + \bar{c}_9 \sin(2w-h+g)\\
& + \sum \bar{c}_{4\cdot n} \sin(2w+h-g_n) && + \sum \bar{c}_{10\cdot n} \sin(2w-h+g_n)\\
& + \sum \bar{c}_{5\cdot n} \sin(2w+h_n-g) && + \sum \bar{c}_{11\cdot n} \sin(2w-h_n+g)\\
& + \sum \bar{c}_{6\cdot n} \sin(2w+h_n-g_n) && + \sum \bar{c}_{12\cdot n} \sin(2w-h_n+g_n)\\
& + \mathfrak{S} \bar{c}_{7\cdot m\cdot n} \sin(2w+h_m-g_n) && + \mathfrak{S} \bar{c}_{13\cdot m\cdot n} \sin(2w-h_m+g_n)\\
& + \mathfrak{S} \bar{c}_{8\cdot m\cdot n} \sin(2w+h_n-g_m) && + \mathfrak{S} \bar{c}_{14\cdot m\cdot n} \sin(2w-h_n+g_m)
\end{aligned}$$

www.libtool.com.cn

$$
\begin{array}{ll}
+\bar{c}_{15}\sin(2w-h-g) & +\bar{c}_{21}\sin(6w-h-g)\\
+\sum\bar{c}_{16\cdot n}\sin(2w-h-g_n) & +\sum\bar{c}_{22\cdot n}\sin(6w-h-g_n)\\
+\sum\bar{c}_{17\cdot n}\sin(2w-h_n-g) & +\sum\bar{c}_{23\cdot n}\sin(6w-h_n-g)\\
+\sum\bar{c}_{18\cdot n}\sin(2w-h_n-g_n) & +\sum\bar{c}_{24\cdot n}\sin(6w-h_n-g_n)\\
+\mathrm{S}\bar{c}_{19\cdot m\cdot n}\sin(2w-h_m-g_n) & +\mathrm{S}\bar{c}_{25\cdot m\cdot n}\sin(6w-h_m-g_n)\\
+\mathrm{S}\bar{c}_{20\cdot m\cdot n}\sin(2w-h_n-g_m) & +\mathrm{S}\bar{c}_{26\cdot m\cdot n}\sin(6w-h_n-g_m).
\end{array}
$$

Die Werte der Koefficienten sind:

(170)

$$\bar{c}_1 = \frac{\tau}{2\delta_1}\xi_1\sin\iota \qquad \bar{c}_{2\cdot n} = \frac{\tau_n}{2\delta_1}[\xi_1\sin\iota_n+\xi_2\sin\iota_n']$$

$$\bar{c}_3 = -\frac{\tau+\varsigma}{\delta_1}\xi_3\varkappa\sin\iota \qquad \bar{c}_9 = \frac{\tau+\varsigma}{\delta_1}\xi_4\varkappa\sin\iota$$

$$\bar{c}_{4\cdot n} = -\frac{\tau+\varsigma_n}{\delta_1}(\xi_3\varkappa_n+\xi_5\varkappa_n')\sin\iota \qquad \bar{c}_{10\cdot n} = \frac{\tau+\varsigma_n}{\delta_1}(\xi_4\varkappa_n+\xi_6\varkappa_n')\sin\iota$$

$$\bar{c}_{5\cdot n} = -\frac{\tau_n+\varsigma}{\delta_1}(\xi_3\sin\iota_n+\xi_7\sin\iota_n')\varkappa \qquad \bar{c}_{11\cdot n} = \frac{\tau_n+\varsigma}{\delta_1}(\xi_4\sin\iota_n+\xi_8\sin\iota_n')\varkappa$$

$$\bar{c}_{6\cdot n} = -\frac{\tau_n+\varsigma_n}{\delta_1}[(\xi_3\varkappa_n+\xi_5\varkappa_n')\sin\iota_n+(\xi_7\varkappa_n+\xi_9\varkappa_n')\sin\iota_n'] \qquad \bar{c}_{12\cdot n} = \frac{\tau_n+\varsigma_n}{\delta_1}[(\xi_4\varkappa_n+\xi_6\varkappa_n')\sin\iota_n+(\xi_8\varkappa_n+\xi_{10}\varkappa_n')\sin\iota_n']$$

$$\bar{c}_{7\cdot m\cdot n} = -\frac{\tau_m+\varsigma_n}{\delta_1}[(\xi_3\varkappa_n+\xi_5\varkappa_n')\sin\iota_m+(\xi_7\varkappa_n+\xi_9\varkappa_n')\sin\iota_m'] \qquad \bar{c}_{13\cdot m\cdot n} = \frac{\tau_m+\varsigma_n}{\delta_1}[(\xi_4\varkappa_n+\xi_6\varkappa_n')\sin\iota_m+(\xi_8\varkappa_n+\xi_{10}\varkappa_n')\sin\iota_m']$$

$$\bar{c}_{8\cdot m\cdot n} = -\frac{\tau_n+\varsigma_m}{\delta_1}[(\xi_3\sin\iota_n+\xi_7\sin\iota_n')\varkappa_m+(\xi_5\sin\iota_n+\xi_9\sin\iota_n')\varkappa_m'] \qquad \bar{c}_{14\cdot m\cdot n} = \frac{\tau_n+\varsigma_m}{\delta_1}[(\xi_4\sin\iota_n+\xi_8\sin\iota_n')\varkappa_m+(\xi_6\sin\iota_n+\xi_{10}\sin\iota_n')\varkappa_m']$$

$$\bar{c}_{15} = \frac{\tau-\varsigma}{\delta_1}\xi_{11}\varkappa\sin\iota \qquad \bar{c}_{21} = \frac{\tau-\varsigma}{3\delta_1}\xi_{15}\varkappa\sin\iota$$

$$\bar{c}_{16\cdot n} = \frac{\tau-\varsigma_n}{\delta_1}(\xi_{11}\varkappa_n+\xi_{12}\varkappa_n')\sin\iota \qquad \bar{c}_{22\cdot n} = \frac{\tau-\varsigma_n}{3\delta_1}(\xi_{15}\varkappa_n+\xi_{16}\varkappa_n')\sin\iota$$

$$\bar{c}_{17\cdot n} = \frac{\tau_n-\varsigma}{\delta_1}(\xi_{11}\sin\iota_n+\xi_{13}\sin\iota_n')\varkappa \qquad \bar{c}_{23\cdot n} = \frac{\tau_n-\varsigma}{3\delta_1}(\xi_{15}\sin\iota_n+\xi_{17}\sin\iota_n')\varkappa$$

$$\bar{c}_{18\cdot n} = \frac{\tau_n-\varsigma_n}{\delta_1}[(\xi_{11}\varkappa_n+\xi_{12}\varkappa_n')\sin\iota_n+(\xi_{13}\varkappa_n+\xi_{14}\varkappa_n')\sin\iota_n'] \qquad \bar{c}_{24\cdot n} = \frac{\tau_n-\varsigma_n}{3\delta_1}[(\xi_{15}\varkappa_n+\xi_{16}\varkappa_n')\sin\iota_n+(\xi_{17}\varkappa_n+\xi_{18}\varkappa_n')\sin\iota_n']$$

$$\bar{c}_{19\cdot m\cdot n} = \frac{\tau_m-\varsigma_n}{\delta_1}[(\xi_{11}\varkappa_n+\xi_{12}\varkappa_n')\sin\iota_m+(\xi_{13}\varkappa_n+\xi_{14}\varkappa_n')\sin\iota_m'] \qquad \bar{c}_{25\cdot m\cdot n} = \frac{\tau_m-\varsigma_n}{3\delta_1}[(\xi_{15}\varkappa_n+\xi_{16}\varkappa_n')\sin\iota_m+(\xi_{17}\varkappa_n+\xi_{18}\varkappa_n')\sin\iota_m']$$

$$\bar{c}_{20\cdot m\cdot n} = \frac{\tau_n-\varsigma_m}{\delta_1}[(\xi_{11}\sin\iota_n+\xi_{13}\sin\iota_n')\varkappa_m+(\xi_{12}\sin\iota_n+\xi_{14}\sin\iota_n')\varkappa_m'] \qquad \bar{c}_{26\cdot m\cdot n} = \frac{\tau_n-\varsigma_m}{3\delta_1}[(\xi_{15}\sin\iota_n+\xi_{17}\sin\iota_n')\varkappa_m+(\xi_{16}\sin\iota_n+\xi_{18}\sin\iota_n')\varkappa_m']$$

Die Glieder sind hier wieder, abgesehen von den exargumentalen Teilen, von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$.

www.libtool.com.cn

Hiermit haben wir die Funktionen S, R, (ϱ), W, $\mathfrak{Z}$ und $(\frac{z}{\delta})$ mit der vorgeschriebenen Genauigkeit berechnet. Wir haben nicht nur die von der Neigung abhängigen Teile dieser Funktionen berechnet, sondern auch diejenigen Glieder, welche eine Folge des hier angewandten Integrationsverfahrens sind, d. h. die exargumentalen Glieder und die aus der Veränderlichkeit von η, Π etc. entspringenden Zusätze. Erstere gaben nur zu den Koefficienten der trigonometrischen Funktionen Zusätze ab, letztere dagegen Glieder mit neuen Argumenten. Ferner haben wir die aus den Gliedern zweiten Grades entstehenden Teile der Glieder dritten Grades berechnet, soweit sie kleine Divisoren erhielten, sei es, dass sie durch die hier angewandte Integrationsmethode entstanden, sei es, dass sie durch die Gestalt der Differentialgleichung hervorgerufen wurden. Die aus der Entwicklung der Störungsfunktion entstehenden Glieder dritten Grades sind dagegen durchweg vernachlässigt worden, und es wird dies auch in den meisten Fällen der kritischen Planeten, in denen der charakteristischen wohl stets, ausreichen, so lange die Excentricitäten sich in mittleren Grenzen halten. Ihre Mitnahme hätte eine Weiterführung der Störungsfunktion bis zum vierten Grade bedingt. Ausserdem wird die Mitnahme dieser Glieder weit eher durch starke Excentricitäten erforderlich, als bei starker Kommensurabilität, und dies würde mehr einer Ergänzung zur Theorie der gewöhnlichen Planeten entsprechen, als es für kritische Planeten von Wichtigkeit wäre. Aus diesem Grunde ist bei unserem Specialfall des Hecuba-Typus von der Ermittlung der Glieder dritten Grades, soweit sie aus der Störungsfunktion kommen, Abstand genommen worden.

Hiermit wäre die eigentliche Entwicklung des Problems abgeschlossen, und wir wollen im Schlusskapitel nur noch verschiedene für die numerische Rechnung erforderliche Transformationen dieser Resultate geben.

www.libtool.com.cn

Fünftes Kapitel.

Transformation der Koefficienten der Störungsgleichungen in eine für die numerische Rechnung geeignete Form. — Ueber die Reduktion auf die Ekliptik und die Berechnung instantaner elliptischer Elemente.

§ 1. Transformation der Koefficienten zur numerischen Rechnung.

1) Die Werte der Koefficienten für die Störungsgleichungen, soweit sie elementare, charakteristische und koordinierte Glieder enthalten, hatten wir im dritten Kapitel gegeben, im vierten waren die hierzu tretenden exargumentalen Teile abgeleitet worden, sowie die Werte der konstanten und secularen Glieder. Des weiteren waren dort die aus der Veränderlichkeit der langperiodischen Funktionen entstehenden Glieder nebst den Werten ihrer Koefficienten angeführt worden. Alle diese Grössen haben eine für die numerische Rechnung recht wenig geeignete Form, welche hauptsächlich deswegen nicht verändert worden ist, um die Art der Entstehung, sowie die Grösse der einzelnen Glieder in aller Deutlichkeit veranschaulichen zu können. Ich will jetzt die Grössen in eine für die numerische Rechnung mehr passende Form bringen und den wiederholt auftretenden Termen bestimmte Symbole beilegen.

Ausserdem muss hier auch von der Art der Bestimmung der β_s und ζ_s gehandelt werden, welche ja in allen Koefficienten als Unbekannte gelassen worden sind und deren Kenntnis zuerst erforderlich ist. Mit griechischen Buchstaben wollen wir auch hier nach Möglichkeit solche Grössen bezeichnen, welche durch einen kleinen Divisor vergrössert werden. Durch Δ_n wollen wir Verbindungen der δ_1 mit numerischen Grössen charakterisieren, k_n bezeichne derartige Relationen mit der Grösse $p_0^{(0)}$.

Für die Glieder nullten und ersten Grades rechnet man zuerst folgende Hilfsgrössen:

(171)
$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= 1+\delta_1 & \Delta_4 &= 2+\delta_1 & \Delta_7 &= 1-\delta_1 & \Delta_{10} &= 4+8\delta_1+5\delta_1^2\\
\Delta_2 &= 1+2\delta_1 & \Delta_5 &= 2+3\delta_1 & \Delta_8 &= 1-2\delta_1 & \Delta_{11} &= 4+12\delta_1+11\delta_1^2.\\
\Delta_3 &= 1+3\delta_1 & \Delta_6 &= 2+5\delta_1 & \Delta_9 &= 2-\delta_1
\end{aligned}$$

(172)
$$\begin{aligned}
k_1 &= 1+2p_0^{(0)} & k_3 &= 2(1-\tfrac{1}{3}p_0^{(0)})\\
k_2 &= 1+\tfrac{4}{3}p_0^{(0)} & k_4 &= 2(1+p_0^{(0)}).
\end{aligned}$$

www.libtool.com.cn

Dann die Koefficienten:

$$(173)\quad \beta_1 = \frac{-\frac{2q_1^{(0)}}{\Delta_1}+p_1^{(0)}}{\delta_1\Delta_4+\frac{2q_1^{(1)}}{\Delta_1}-p_1^{(1)}+\frac{1}{2}r_1^{(0)}} \qquad \text{pars}\, a_0 = \tfrac{2}{3}p_0^{(0)}+\tfrac{2}{3}(p_0^{(1)}-\tfrac{1}{2}q_1^{(0)})\beta_1^2$$

$$\text{pars}\, b_0 = \tfrac{1}{2}a_0$$

$$\Delta_1 a_1 = q_1^{(0)}+q_1^{(1)}\beta_1.$$

Darauf ermittelt man:

$$(174)\qquad l_1 = a_1-p_1 \qquad b_{2\cdot0\cdot0} = l_1+a_1$$

$$(175)\qquad \lambda_1 = 3\beta_1-a_1 \qquad \nu_1 = \frac{2\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{\delta_1\Delta_4}$$

$$\lambda_2 = \tfrac{3}{2}\mu\beta_1^2.$$

Mit Hilfe dieser Grössen folgt:

$$(176)\qquad \text{pars}\,\gamma = \tfrac{3}{2}\beta_1^2 \qquad 2\Delta_1 W_{4\cdot0\cdot0} = \frac{r_1}{2\Delta_1}-2R_{4\cdot0\cdot0}+2\lambda_2$$

$$\Delta_1\gamma_1 = a_1-2\beta_1.$$

$W_{4\cdot0\cdot0}$ wird mit einem Fehler v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ in diese Gestalt gebracht. Damit sind die Koefficienten nullten Grades, soweit sie charakteristischen Gliedern zugehören, erledigt, nämlich a_0, a_1; b_0, β_1; γ_0; γ_1 und $W_{4\cdot0\cdot0}$. Die Rechnung für die Glieder ersten Grades stellt sich folgendermassen dar:

$$(177)\qquad (\gamma_1\cdot1) = -k_2 \qquad (\gamma\cdot2) = k_2\frac{q_2^{(0)}}{\delta_1}-a_1+\left(3+\frac{q_2^{(1)}}{\delta_1}-\frac{q_4^{(0)}}{\Delta_2}\right)\beta_1$$

$$(\gamma_1\cdot2) = \frac{q_2^{(4)}}{\delta_1}+\lambda_1 \qquad (\gamma\cdot3) = k_2\frac{q_3^{(0)}}{\delta_1}+\left(\frac{q_3^{(1)}}{\delta_1}-\frac{q_5^{(0)}}{\Delta_2}\right)\beta_1$$

$$(178)\qquad B_1 = \frac{\Delta_5\nu_1}{2}+\frac{2\mu a_1}{\Delta_2} \qquad B_3 = \frac{3q_1^{(0)}}{\Delta_2}+l_1$$

$$B_2 = \frac{2q_1^{(2)}}{\Delta_2}-p_1^{(2)},$$

wo mit den B_n wiederholt auftretende Hilfsgrössen in R bezeichnet werden sollen.

$$(179)\qquad (b_2\cdot1) = \Delta_1\Delta_7+p_2^{(2)} \qquad (b_4\cdot1) = B_2+B_1(\gamma_1\cdot1)$$

$$(b_3\cdot2) = p_0^{(1)}-\tfrac{1}{2}q_1^{(0)}-\frac{2q_2^{(4)}}{\delta_1} \qquad (b_5\cdot2) = 4\delta_1\Delta_1-p_2^{(2)}+B_1(\gamma_1\cdot2)$$

$$(b_1\cdot2) = k_4\frac{q_2^{(0)}}{\delta_1}-p_2^{(0)}+\left[\tfrac{1}{2}q_1^{(1)}+\frac{2q_2^{(1)}}{\delta_1}-p_2^{(1)}+\tfrac{1}{2}q_4^{(0)}\right]\beta_1$$

$$(b_2\cdot3) = k_4\frac{q_3^{(0)}}{\delta_1}-p_3^{(0)}+\left[\tfrac{1}{2}q_3^{(0)}+\frac{2q_3^{(1)}}{\delta_1}-p_3^{(1)}+\tfrac{1}{2}q_5^{(0)}\right]\beta_1$$

www.libtool.com.cn

$$(179)\quad (b_1\cdot 4) = p_4^{(0)} - \frac{2q_4^{(0)}}{\Delta_2} - \tfrac{1}{2}r_1 - B_1(\gamma\cdot 2) - B_3\frac{q_3^{(0)}}{\delta_1} + \left[p_4^{(1)} - \frac{2q_4^{(1)}}{\Delta_2} + \tfrac{1}{2}q_2^{(0)} - \tfrac{1}{2}r_4^{(0)}\right]\beta_1$$

$$(b_2\cdot 5) = p_5^{(0)} - \frac{2q_5^{(0)}}{\Delta_2} - B_1(\gamma\cdot 3) - B_3\frac{q_3^{(0)}}{\delta_1} + \left[p_5^{(1)} - \frac{2q_5^{(1)}}{\Delta_2} + \tfrac{1}{2}q_2^{(0)} - \tfrac{1}{2}r_5^{(0)}\right]\beta_1.$$

Sind diese Koefficienten gerechnet, so ergeben sich, wie man leicht einsieht, für die β_2 bis β_5 folgende vier Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} (b_2\cdot 1)\beta_2 + (b_3\cdot 2)\beta_4 &= (b_1\cdot 2) & (b_2\cdot 1)\beta_3 + (b_3\cdot 2)\beta_5 &= (b_2\cdot 3)\\ (b_4\cdot 1)\beta_2 + (\beta_5\cdot 2)\beta_4 &= (b_1\cdot 4) & (b_4\cdot 1)\beta_3 + (b_3\cdot 2)\beta_5 &= (b_2\cdot 5)\end{aligned}$$

Hieraus folgen weiter die β_k, wenn man mit Hilfe von Determinanten auflöst und setzt:

$$D_1^0 = (b_2\cdot 1)(b_5\cdot 2) - (b_4\cdot 1)(b_3\cdot 2)$$

$$(180)\quad \begin{aligned} D_2 &= (b_1\cdot 2)(b_5\cdot 2) - (b_1\cdot 4)(b_3\cdot 2) & D_3 &= (b_2\cdot 3)(b_5\cdot 2) - (b_2\cdot 5)(b_3\cdot 2)\\ D_4 &= (b_1\cdot 4)(b_2\cdot 1) - (b_1\cdot 2)(b_4\cdot 1) & D_5 &= (b_2\cdot 1)(b_2\cdot 5) - (b_2\cdot 3)(b_4\cdot 1)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} D_1^0\beta_2 &= D_2 & D_1^0\beta_3 &= D_3\\ D_1^0\beta_4 &= D_4 & D_1^0\beta_5 &= D_5\end{aligned}\right\}\quad (R_1).$$

Die Koefficienten in S_1 werden dann:

$$(181)\quad \left.\begin{aligned} \alpha_2 &= k_1\frac{q_2^{(0)}}{\delta_1} + \frac{q_2^{(1)}}{\delta_1}\beta_1 + \frac{q_2^{(4)}}{\delta_1}\beta_4 & \mathfrak{a}_1 &= \mathfrak{q}_1 + A_1 & \Delta_2\mathfrak{a}_4 &= \mathfrak{q}_4 + A_1\\ \alpha_3 &= k_1\frac{q_3^{(0)}}{\delta_1} + \frac{q_3^{(1)}}{\delta_1}\beta_1 + \frac{q_3^{(4)}}{\delta_1}\beta_5 & \mathfrak{a}_2 &= \mathfrak{q}_2 + A_2 & \Delta_2\mathfrak{a}_5 &= \mathfrak{q}_5 + A_2\end{aligned}\right\}\quad (S_1).$$

Hier ist, ganz entsprechend den B_k in R, abkürzend gesetzt:

$$(182)\quad \begin{aligned} A_1 &= q_1^{(0)}(\tfrac{3}{2}\alpha_2 + \mu\gamma_2)\\ A_2 &= q_1^{(0)}(\tfrac{3}{2}\alpha_3 + \mu\gamma_3),\end{aligned}$$

mit einem Fehler v. d. Ord. m'^2.

Des weiteren hat man:

$$(183)\quad \left.\begin{aligned} \gamma_2 &= (\gamma\cdot 2) + (\gamma_1\cdot 1)\beta_2 + (\gamma_1\cdot 2)\beta_4\\ \gamma_3 &= (\gamma\cdot 3) + (\gamma_1\cdot 1)\beta_3 + (\gamma_1\cdot 2)\beta_5\end{aligned}\right\}\quad (V_1).$$

Als Hilfsgrössen seien ferner bezeichnet:

$$(184)\quad \begin{aligned} \lambda_3 &= \frac{\mu\gamma_2}{\delta_1} & \lambda_5 &= \alpha_2 + 6\beta_1 - \tfrac{3}{2}\beta_2 & \lambda_7 &= \mu\gamma_1\gamma_2 & \lambda_9 &= \alpha_2 + 3\beta_1 - 3\beta_2\\ \lambda_4 &= \frac{\mu\gamma_3}{\delta_1} & \lambda_6 &= \alpha_3 - \tfrac{3}{2}\beta_3 & \lambda_8 &= \mu\gamma_1\gamma_3 & \lambda_{10} &= \alpha_3 - 3\beta_3.\end{aligned}$$

www.libtool.com.cn

Dann folgt zur Berechnung von ς und der $\varkappa_m$ in (ϱ):

$$(185)\qquad \left.\begin{aligned} b^{+1}_{0\cdot1\cdot0} &= 2a_1-p_1+l_1\alpha_2+\tfrac{1}{2}(q^{(0)}_2+r^{(0)}_2)\beta_1+\tfrac{1}{2}r^{(0)}_1\beta_4\\ b^{+1}_{0\cdot0\cdot1} &= 2a_2-p_2+l_1\alpha_3+\tfrac{1}{2}(q^{(0)}_2+r^{(0)}_2)\beta_1+\tfrac{1}{2}r^{(0)}_1\beta_5\\ b_1 &= b^{+1}_{0\cdot1\cdot0}+\lambda_3 b_{2\cdot0\cdot0} \qquad b_3 = b^{+1}_{0\cdot1\cdot0}+\frac{\delta_1}{\Delta_4}\lambda_3 b_{2\cdot0\cdot0}\\ b_2 &= b^{+1}_{0\cdot0\cdot1}+\lambda_4 b_{2\cdot0\cdot0} \qquad b_4 = b^{+1}_{0\cdot0\cdot1}+\frac{\delta_1}{\Delta_4}\lambda_4 b_{2\cdot0\cdot0} \end{aligned}\right\}\ ((\varrho)).$$

Zur Berechnung des kurzperiodischen Teiles von W hat man dann:

$$(186)\qquad \left.\begin{aligned} \Delta_2\gamma_4 &= a_4-2\beta_4-\lambda_9\beta_1+3R_{4\cdot0\cdot0}-S_{4\cdot0\cdot0}+\lambda_7\\ \Delta_2\gamma_5 &= a_5-2\beta_5-\lambda_{10}\beta_1+\lambda_8\\ \Delta_4\gamma_6 &= S^{+1}_{2\cdot1\cdot0}-2R^{+1}_{2\cdot1\cdot0}+\lambda_1+\lambda_2\gamma_2 \quad\big|\quad W^{+1}_{0\cdot1\cdot0} = a_1+a_0-\lambda_5\beta_1+\tfrac{1}{2}\beta_2(\lambda_1-a_1)+\lambda_7\\ \Delta_4 W^{+1}_{2\cdot0\cdot1} &= S^{+1}_{2\cdot0\cdot1}-2R^{+1}_{2\cdot0\cdot1}+\lambda_2\gamma_3 \quad\big|\quad W^{+1}_{0\cdot0\cdot1} = a_2-\lambda_6\beta_1+\tfrac{1}{2}\beta_2(\lambda_1-a_1)+\lambda_8\\ \Delta_5 W^{-1}_{6\cdot1\cdot0} &= S^{-1}_{6\cdot1\cdot0}-2R^{-1}_{6\cdot1\cdot0}+3\beta_1\beta_4+3R_{6\cdot0\cdot0}-S_{6\cdot0\cdot0}+\lambda_2\gamma_2\\ \Delta_5 W^{-1}_{6\cdot0\cdot1} &= S^{-1}_{6\cdot0\cdot1}-2R^{-1}_{6\cdot0\cdot1}+3\beta_1\beta_5+\lambda_2\gamma_3 \end{aligned}\right\}\ (K_1).$$

Die $S_{4\cdot0\cdot0}$, $R_{4\cdot0\cdot0}$ etc. gehören zu gewöhnlichen Gliedern und sind nach den Formeln in Br. Kap. 6 zu berechnen. Für den gestörten Sinus der Breite ist:

$$(187)\qquad (c\cdot1) = 4\delta_1\Delta_1+\varepsilon^{(1)}_1 \qquad (c_0\cdot1) = \tfrac{1}{2}r_1-\varepsilon^{(0)}_1-\varepsilon^{\mathrm{I}}_1\beta_1$$
$$(c_0\cdot2) = -\varepsilon^{(0)}_2-\varepsilon^{\mathrm{I}}_1\beta_1,$$

und zwar folgt hier ohne weiteres:

$$(188)\qquad \left.\begin{aligned} (c\cdot1)\xi_1 &= (c_0\cdot1) \qquad \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}^{(0)}_1+\mathfrak{z}^{\mathrm{I}}_1\beta_1+\mathfrak{z}^{(1)}_1\xi_1\\ (c\cdot1)\xi_2 &= (c_0\cdot2) \qquad \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}^{(0)}_2+\mathfrak{z}^{\mathrm{I}}_2\beta_1+\mathfrak{z}^{(1)}_1\xi_2 \end{aligned}\right\}\ (\mathfrak{Z}_1+(\mathfrak{z})).$$

Hierzu will ich noch bemerken, dass die $q^{(k)}_i, p^{(k)}_\varrho, \varepsilon^{(k)}_i$ im zweiten Kapitel gegeben sind und dass die zwischen verschiedenen derartigen Koefficienten bestehenden Relationen bereits benutzt sind.

Die Berechnung der Zusatzglieder ersten Grades geschieht nach den Formeln (159), (161), (163), (164), (166), (166a) und (170), da eine weitere Transformation dieser Koefficienten für die numerische Rechnung nicht angebracht ist.

---

2) Die Rechnung für die Koefficienten der Glieder zweiten Grades gestaltet sich in folgender Weise, wenn wir einstweilen von den konstanten Teilen, den A-Gliedern und den Zusatzgliedern absehen:

$$(189)\qquad A_3 = \tfrac{3}{2}\alpha_3+2\mu\gamma_3 \qquad A_5 = \tfrac{3}{2}q_3+\mu\gamma_3$$
$$A_4 = \tfrac{3}{2}\alpha_3+2\mu\gamma_3 \qquad A_6 = \tfrac{3}{2}q_3+\mu\gamma_3.$$

Damit erhält man:

www.libtool.com.cn

$$(190)\quad (a_2\cdot 0) = q_1^{(4)} \qquad (a_2\cdot 7) = q_{7\cdot 1} + \tfrac{3}{2} q_1\alpha_2 + q_4 A_3 \qquad (\alpha_2\cdot 14) = \frac{1}{2\delta_1}[k_1 q_{14\cdot 1} + \alpha_2 A_5]$$

$$(\alpha_2\cdot 1) = k_1 \frac{q_2^{(4)}}{2\delta_1} \qquad (a_2\cdot 8) = q_{8\cdot 1} + \tfrac{3}{2} q_1\alpha_3 + q_5 A_3 \qquad (\alpha_2\cdot 15) = \frac{1}{2\delta_1}[k_1 q_{15\cdot 1} + \alpha_2 A_6 + \alpha_3 A_5]$$

$$(a_2\cdot 9) = q_{9\cdot 1} + \tfrac{3}{2} q_2\alpha_2 + q_4 A_4 \qquad (\alpha_2\cdot 16) = \frac{1}{2\delta_1}[k_1 q_{16\cdot 1} + \alpha_3 A_6]$$

$$(a_2\cdot 10) = q_{10\cdot 1} + \tfrac{3}{2} q_2\alpha_3 + q_5 A_4 .$$

Wir führen nun in W eine den A_h und B_h entsprechende abkürzende Bezeichnung G_h ein:

$$(191)\quad G_1 = \tfrac{3}{2}\beta_1\alpha_2 - \lambda_5\beta_2$$
$$G_2 = \tfrac{3}{2}\beta_1\alpha_3 - \lambda_6\beta_2 - \lambda_5\beta_3$$
$$G_3 = -\lambda_6\beta_3 .$$

$$(192)\quad A_7 = \tfrac{3}{2} q_1 + \mu a_1$$
$$A_8 = 3\mu a_1\beta_4 + \mu a_1 G_1 + A_7(\alpha_2\cdot 14)$$
$$A_9 = 3\mu a_1\beta_5 + \mu a_1 G_2 + A_7(\alpha_2\cdot 15)$$
$$A_{10} = \mu a_1 G_3 + A_7(\alpha_2\cdot 16).$$

Unsere Aufgabe besteht jetzt darin, mit Hilfe der bisher abgeleiteten Formeln die a_h zu berechnen. In den a_{11}, a_{12}, a_{13} treten nun auf $\mu a_1\gamma_{14}, \mu a_1\gamma_{15}, \mu a_1\gamma_{16}$, und diese sind ebenfalls unbekannt. Umgekehrt treten aber auch in den $\gamma_{14}\cdots\gamma_{16}$ die $a_{11}\cdots a_{13}$ wieder auf, und man wird demnach hier näherungsweise vorgehen. Wir nehmen zur Berechnung der $a_{11}\cdots a_{13}$ nur die Teile aus den $\gamma_{14}\cdots\gamma_{16}$ mit, welche v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ resp. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ sind. Ebenso verfahren wir bei der Ermittlung von $a_{17}\cdots a_{19}$ und machen zur Berechnung dieser Grössen folgenden Ansatz:

$$\gamma_{14} = [(\alpha_2\cdot 14) + 3\beta_4 + G_1] + [3\beta_1 - (\alpha_2\cdot 1)]\beta_{11} - 2\beta_{14} + [3\beta_1 + (\alpha_2\cdot 1)]\beta_{17}$$
$$\gamma_{15} = [(\alpha_2\cdot 15) + 3\beta_5 + G_2] + [3\beta_1 - (\alpha_2\cdot 1)]\beta_{12} - 2\beta_{15} + [3\beta_1 + (\alpha_2\cdot 1)]\beta_{18}$$
$$\gamma_{16} = [(\alpha_2\cdot 16) + G_3] + [3\beta_1 - (\alpha_2\cdot 1)]\beta_{13} - 2\beta_{16} + [3\beta_1 + (\alpha_2\cdot 1)]\beta_{19} .$$

Wir vernachlässigen hier m', $\frac{m'^2}{\delta_1}$, $\frac{m'^3}{\delta_1^2}$, und da $\gamma_{14}\cdots\gamma_{16}$ in diesen a-Koefficienten noch in m' multipliziert auftreten, so wird der Fehler in den $a_{11}\cdots a_{13}$, $a_{17}\cdots a_{19}$ gleich m'^2, $\frac{m'^3}{\delta_1}$, $\frac{m'^4}{\delta_1^2}$ d. h. diese Näherung reicht völlig aus. Jetzt lösen wir die a_h nach den β_h auf und erhalten für die Koefficienten:

$$(193)\quad (a_2\cdot 2) = 3\mu a_1\beta_1 - A_7(\alpha_2\cdot 1) \qquad (a_2\cdot 11) = \tfrac{3}{2} q_1\alpha_2 - q_{11\cdot 1} + A_3$$
$$(a_2\cdot 3) = q_1^{(2)} - 2\mu a_1 \qquad (a_2\cdot 12) = \tfrac{3}{2}(q_1\alpha_3 + q_2\alpha_2) - q_{12\cdot 1} + A_9$$
$$(a_2\cdot 4) = (a_2\cdot 0) + 3\mu a_1\beta_1 + A_7(\alpha_2\cdot 1) \qquad (a_2\cdot 13) = \tfrac{3}{2} q_2\alpha_3 - q_{13\cdot 1} + A_{10}$$
$$(a_2\cdot 5) = (a_2\cdot 0) + (a_2\cdot 2) \qquad (a_2\cdot 17) = q_{17\cdot 1} + q_4 A_3 + A_8$$
$$(a_2\cdot 6) = (a_2\cdot 4) - (a_2\cdot 0) \qquad (a_2\cdot 18) = q_{18\cdot 1} + q_4 A_4 + q_5 A_3 + A_9$$
$$(a_2\cdot 19) = q_{19\cdot 1} + q_5 A_4 + A_{10} .$$

www.libtool.com.cn

Jetzt ist man in der Lage, fast alle Hilfsgrössen für den zweiten Grad zu rechnen. Es sind dies:

(194)
$$l_2 = \tfrac{3}{4}S_{4\cdot0\cdot0} - 3R_{4\cdot0\cdot0} \qquad b^{-1}_{4\cdot1\cdot0} = 2a_4 - p_4 + \tfrac{1}{2}r_1 + \tfrac{1}{2}(r_4 - q_2)\beta_1 + l_1\alpha_2$$
$$l_3 = a_1 - p_1 \qquad b^{-1}_{4\cdot0\cdot1} = 2a_5 - p_5 + \tfrac{1}{2}(r_5 - q_3)\beta_1 + l_1\alpha_3$$
$$l_4 = a_2 - p_2 \qquad k_5 = 3 - 2p_0^{(0)} - a_1$$
$$l_5 = a_4 - p_4 \qquad k_6 = 1 - \tfrac{3}{2}p_0^{(0)}$$
$$l_6 = a_5 - p_5 \qquad k_7 = 2(1 + \tfrac{1}{2}p_0^{(0)})$$
$$\nu_2 = \frac{\mu b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}}{2\delta_1 \Delta_1} \qquad \nu_3 = \frac{\mu b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}}{2\delta_1 \Delta_1} \qquad \nu_4 = \frac{\mu^2 b_{2\cdot0\cdot0}}{2\delta_1^2 \Delta_1 \Delta_4}$$

$$G_4 = G_1 + k_5\beta_4 + \tfrac{3}{2}\beta_1(S^{-1}_{6\cdot1\cdot0} - 4R^{-1}_{6\cdot1\cdot0}) + \tfrac{3}{2}\beta_2 a_1 - a_4 + l_2$$
$$G_5 = G_2 - a_2\beta_4 + k_5\beta_5 + \tfrac{3}{2}\beta_1(S^{-1}_{6\cdot0\cdot1} - 4R^{-1}_{6\cdot0\cdot1}) + \tfrac{3}{2}\beta_3 a_1 - a_5$$
$$G_6 = G_3 - a_2\beta_5$$
$$G_7 = \lambda_1 - k_6(\alpha_2 \cdot 1)$$
$$G_8 = \lambda_1 + k_6(\alpha_2 \cdot 1)$$

$$B_4 = \nu_2\Delta_5 + \nu_4\Delta_{10}\gamma_2 \qquad B_{10} = l_1(\alpha_2 \cdot 1) + \tfrac{1}{2}\beta_1 q_2^{(4)}$$
$$B_5 = \nu_3\Delta_5 + \nu_4\Delta_{10}\gamma_3 \qquad B_{11} = p_0^{(1)} - \tfrac{1}{2}q_1 - \tfrac{1}{2}\beta_1 q_1^{(4)}$$
$$B_6 = \tfrac{1}{2}r_1 + 2\frac{(a_2 \cdot 0)}{\Delta_1} \qquad B_{12} = \nu_2\Delta_6 + \nu_4\Delta_{11}\gamma_2$$
$$B_7 = \tfrac{1}{2}r_1 + l_5 \qquad B_{13} = \nu_3\Delta_6 + \nu_4\Delta_{11}\gamma_3$$
$$B_8 = q_1 - 2p_2 + \alpha_2 \qquad B_{14} = l_1(\alpha_3 \cdot 1) - \tfrac{1}{2}\beta_1 q_2^{(4)}.$$
$$B_9 = p_3 - \tfrac{1}{2}\alpha_3$$

Nachdem diese Hilfsgrössen bekannt sind, rechnet man folgende Werte:

(195)
$$(\gamma_2 \cdot 14) = G_4 + k_6(\alpha_2 \cdot 14) - \beta_1[(a_2 \cdot 11) + (a_2 \cdot 17)]$$
$$(\gamma_2 \cdot 15) = G_5 + k_6(\alpha_2 \cdot 15) - \beta_1[(a_2 \cdot 12) + (a_2 \cdot 18)]$$
$$(\gamma_2 \cdot 16) = G_6 + k_6(\alpha_2 \cdot 16) - \beta_1[(a_2 \cdot 13) + (a_2 \cdot 19)]$$
$$(\gamma_2 \cdot 1) = G_7 - \beta_1[(a_2 \cdot 2) + (a_2 \cdot 5)]$$
$$(\gamma_2 \cdot 2) = -k_5 - 2\beta_1(a_2 \cdot 3)$$
$$(\gamma_2 \cdot 3) = G_8 - \beta_1[(a_2 \cdot 4) + (a_2 \cdot 6)].$$

(196)
$$(b_7 \cdot 1) = p_1^{(1)} - \delta_1\Delta_4 - B_6$$
$$(b_8 \cdot 1) = p_2^{(2)} - \delta_1\Delta_4 + \tfrac{1}{2}\beta_1 q_2^{(4)}$$
$$(b_9 \cdot 2) = p_1^{(4)} - B_6 - \tfrac{1}{2}\beta_1 q_2^{(4)}$$

www.libtool.com.cn

(196)
$$(b_{11}\cdot 1) = \delta_1 \Delta_6 - \frac{2(a_2\cdot 2)}{\Delta_7} + p_2^{(2)} - \nu_1(\gamma_2\cdot 1) + B_{10}$$
$$(b_{12}\cdot 2) = -\frac{2(a_2\cdot 3)}{\Delta_7} + p_1^{(2)} - \nu_1(\gamma_2\cdot 2)$$
$$(b_{13}\cdot 3) = -\frac{2(a_2\cdot 4)}{\Delta_7} + p_1^{(4)} - \tfrac{1}{2} r_1 - \nu_1(\gamma_2\cdot 3) - B_{10}$$

$$(b_{14}\cdot 1) = k_7(\alpha_2\cdot 1) + B_{11}$$
$$(b_{15}\cdot 2) = \Delta_2 \Delta_6 + p_2^{(2)} - \beta_1 q_1^{(2)}$$
$$(b_{16}\cdot 3) = -k_7(\alpha_2\cdot 1) + B_{11}$$

$$(b_{17}\cdot 1) = \frac{2(a_2\cdot 5)}{\Delta_8} - p_1^{(4)} + \tfrac{1}{2} r_1 + \nu_1 \Delta_2(\gamma_2\cdot 1) - B_{14}$$
$$(b_{18}\cdot 2) = \frac{2(a_2\cdot 3)}{\Delta_8} - p_1^{(2)} + \nu_1 \Delta_2(\gamma_2\cdot 2)$$
$$(b_{19}\cdot 3) = \frac{2(a_2\cdot 6)}{\Delta_8} - p_2^{(2)} + 3\delta_1 \Delta_5 + \nu_1 \Delta_2(\gamma_2\cdot 3) + B_{14}$$

$$(b_1\cdot 7) = \frac{2(a_2\cdot 7)}{\Delta_1} - p_{7\cdot 1} - \tfrac{1}{2}(q_3 - r_3) + \tfrac{1}{2}\beta_1 A_{4\cdot 2\cdot 0} + \alpha_2(l_3 + B_7) + \tfrac{1}{2}\beta_4(q_2 + r_4) + B_4\gamma_2$$
$$(b_1\cdot 8) = \frac{2(a_2\cdot 8)}{\Delta_1} - p_{8\cdot 1} - \tfrac{1}{2} q_3 + \tfrac{1}{2}\beta_1[2b^{+1}_{0\cdot 0\cdot 1} - q_{4\cdot 1} + A^{+1}_{4\cdot 1\cdot 1}] + \alpha_2 l_6 + \alpha_3 l_3 + \tfrac{1}{2}\beta_4 r_3 + \tfrac{1}{2}\beta_5 q_2 + B_5\gamma_2$$
$$(b_2\cdot 9) = \frac{2(a_2\cdot 9)}{\Delta_1} - p_{9\cdot 1} + \tfrac{1}{2} r_3 + \tfrac{1}{2}\beta_1[-2b^{+1}_{0\cdot 0\cdot 1} + q_{4\cdot 1} + A^{-1}_{4\cdot 1\cdot 1}] + \alpha_2 l_4 + \alpha_3 B_7 + \tfrac{1}{2}\beta_4 q_3 + \tfrac{1}{2}\beta_5 r_4 + B_4\gamma_3$$
$$(b_1\cdot 10) = \frac{2(a_2\cdot 10)}{\Delta_1} - p_{10\cdot 1} + \tfrac{1}{2}\beta_1 A_{4\cdot 0\cdot 2} + \alpha_3(l_4 + l_6) + \tfrac{1}{2}\beta_5(q_3 + r_5) + B_5\gamma_3$$

$$(b_1\cdot 11) = \frac{2(a_2\cdot 11)}{\Delta_7} - p_{11\cdot 1} + \tfrac{1}{2} q_3 + \tfrac{1}{2}\beta_1[q_{14\cdot 1} - 2b^{+1}_{0\cdot 1\cdot 0}] + \alpha_2 l_3 + \tfrac{1}{2}\beta_4 r_2 + l_1(\alpha_2\cdot 14) + \nu_1(\gamma_2\cdot 14)$$
$$(b_2\cdot 12) = \frac{2(a_2\cdot 12)}{\Delta_7} - p_{12\cdot 1} + \tfrac{1}{2} q_3 + \tfrac{1}{2}\beta_1[q_{15\cdot 1} - 2b^{+1}_{0\cdot 0\cdot 1} + A^{+2}_{0\cdot 1\cdot 1}] + \alpha_2 l_4 + \alpha_3 l_3 + \tfrac{1}{2}\beta_4 r_3 + \tfrac{1}{2}\beta_5 r_3 + l_1(\alpha_2\cdot 15) + \nu_1(\gamma_2\cdot 15)$$
$$(b_3\cdot 13) = \frac{2(a_2\cdot 13)}{\Delta_7} - p_{13\cdot 1} + \tfrac{1}{2}\beta_1 q_{16\cdot 1} + \alpha_3 l_4 + \tfrac{1}{2}\beta_5 r_3 + l_1(\alpha_2\cdot 16) + \nu_1(\gamma_2\cdot 16)$$

$$(b_1\cdot 14) = k_7(\alpha_2\cdot 14) - p_{14\cdot 1} + \tfrac{1}{2} q_4 + \tfrac{1}{2}\beta_1[q_{11\cdot 1} - q_{17\cdot 1}] + \tfrac{1}{2}\alpha_2 B_8 + \tfrac{1}{2}\beta_4 q_1 - 6\mu q_2^{(0)}\gamma_2$$
$$(b_2\cdot 15) = k_7(\alpha_2\cdot 15) - p_{15\cdot 1} + \tfrac{1}{2} q_5 - \tfrac{1}{2}\beta_1[q_{12\cdot 1} - q_{18\cdot 1}] - \alpha_2 B_9 + \tfrac{1}{2}\alpha_3 B_8 + \tfrac{1}{2}\beta_4 q_2 + \tfrac{1}{2}\beta_5 q_1 - 6\mu(q_2^{(0)}\gamma_3 + q_3^{(0)}\gamma_2)$$
$$(b_3\cdot 16) = k_7(\alpha_2\cdot 16) - p_{16\cdot 1} - \tfrac{1}{2}\beta_1[q_{13\cdot 1} - q_{19\cdot 1}] - \alpha_3 B_9 + \tfrac{1}{2}\beta_5 q_2 - 6\mu q_3^{(0)}\gamma_3$$

$$(b_1\cdot 17) = p_{17\cdot 1} - \frac{2(a_2\cdot 17)}{\Delta_8} - l_1(\alpha_2\cdot 14) - \tfrac{1}{2} r_4 + \tfrac{1}{2}\beta_1[q_{14\cdot 1} - A^{-2}_{8\cdot 2\cdot 0}] - \alpha_2 B_7 + \tfrac{1}{2}\beta_4 q_3 - B_{12}\gamma_2 - \nu_1 \Delta_2(\gamma_2\cdot 14)$$
$$(b_2\cdot 18) = p_{18\cdot 1} - \frac{2(a_2\cdot 18)}{\Delta_8} - l_1(\alpha_2\cdot 15) - \tfrac{1}{2} r_5 + \tfrac{1}{2}\beta_1[q_{15\cdot 1} - A^{-2}_{8\cdot 1\cdot 1}] - \alpha_2 l_6 - \alpha_3 B_7 + \tfrac{1}{2}\beta_4 q_3 + \tfrac{1}{2}\beta_5 q_2 - B_{13}\gamma_2 - B_{12}\gamma_3 - \nu_1 \Delta_2(\gamma_2\cdot 15)$$
$$(b_3\cdot 19) = p_{19\cdot 1} - \frac{2(a_2\cdot 19)}{\Delta_8} - l_1(\alpha_2\cdot 16) + \tfrac{1}{2}\beta_1[q_{16\cdot 1} - A^{-2}_{8\cdot 0\cdot 2}] - \alpha_3 l_6 + \tfrac{1}{2}\beta_5 q_3 - B_{13}\gamma_3 - \nu_1 \Delta_2(\gamma_2\cdot 16).$$

www.libtool.com.cn

Man erhält dann folgendes System linearer Gleichungen zur Bestimmung der β_k:

$$\begin{array}{l|l}
(b_7\cdot 1)\beta_7 = (b_1\cdot 7);\quad (b_7\cdot 1)\beta_{10} = (b_1\cdot 10) & (b_{11}\cdot 1)\beta_{11}+(b_{12}\cdot 2)\beta_{14}+(b_{13}\cdot 3)\beta_{17} = (b_1\cdot 11)\\
(b_8\cdot 1)\beta_8+(b_9\cdot 2)\beta_9 = (b_1\cdot 8) & (b_{14}\cdot 1)\beta_{11}+(b_{15}\cdot 2)\beta_{14}+(b_{16}\cdot 3)\beta_{17} = (b_1\cdot 14)\\
(b_9\cdot 2)\beta_8+(b_8\cdot 1)\beta_9 = (b_2\cdot 9) & (b_{17}\cdot 1)\beta_{11}+(b_{18}\cdot 2)\beta_{14}+(b_{19}\cdot 3)\beta_{17} = (b_1\cdot 17)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
(b_{11}\cdot 1)\beta_{12}+(b_{12}\cdot 2)\beta_{15}+(b_{13}\cdot 3)\beta_{18} = (b_2\cdot 12) & (b_{11}\cdot 1)\beta_{13}+(b_{12}\cdot 2)\beta_{16}+(b_{13}\cdot 3)\beta_{19} = (b_3\cdot 13)\\
(b_{14}\cdot 1)\beta_{12}+(b_{15}\cdot 2)\beta_{15}+(b_{16}\cdot 3)\beta_{18} = (b_2\cdot 15) & (b_{14}\cdot 1)\beta_{13}+(b_{15}\cdot 2)\beta_{16}+(b_{16}\cdot 3)\beta_{19} = (b_3\cdot 16)\\
(b_{17}\cdot 1)\beta_{12}+(b_{18}\cdot 2)\beta_{15}+(b_{19}\cdot 3)\beta_{18} = (b_2\cdot 18) & (b_{17}\cdot 1)\beta_{13}+(b_{18}\cdot 2)\beta_{16}+(b_{19}\cdot 3)\beta_{19} = (b_3\cdot 19).
\end{array}$$

Auf die Gleichheit der Koefficienten der Unbekannten in diesen Gleichungen hat zuerst Herr Ludendorff[1]) aufmerksam gemacht, nur gilt dies bei ihm unter Vernachlässigung der Grössen ς_n. Bei uns sind diese Koefficienten völlig streng, da wir einmal Π und η anders definierten und dann in den Gliedern mit kleinem Divisor die Veränderlichkeit von η und Π berücksichtigten. Infolgedessen tritt bei uns die Grösse ς im Divisor nicht auf. Bei den Neigungsteilen sind die Koefficienten der Unbekannten genau dieselben wie hier, nur die rechten Seiten sind dort anders.

Löst man diese Gleichungen mit Determinanten auf, was bei der Beschaffenheit der Koefficienten sehr vorteilhaft ist, und zerlegt man die Determinanten dritten Grades, welche für die numerische Rechnung wenig geeignet sind, in bekannter Weise in Subdeterminanten, so erhält man ohne grosse Mühe die Unbekannten. Zur Abkürzung soll gesetzt werden:

$$(197)\qquad D_2^0 = (b_8\cdot 1)^2-(b_9\cdot 2)^2,\qquad D_3^0 = (b_{11}\cdot 1)D_{11}+(b_{14}\cdot 1)D_{14}+(b_{17}\cdot 1)D_{17}$$

$$\begin{array}{ll}
D_8 = (b_1\cdot 8)(b_8\cdot 1)-(b_2\cdot 9)(b_9\cdot 2) & D_{11} = (b_{18}\cdot 2)(b_{19}\cdot 3)-(b_{16}\cdot 3)(b_{18}\cdot 2)\\
D_9 = (b_8\cdot 1)(b_2\cdot 9)-(b_1\cdot 8)(b_9\cdot 2) & D_{12} = (b_{16}\cdot 3)(b_{17}\cdot 1)-(b_{14}\cdot 1)(b_{19}\cdot 3)\\
 & D_{13} = (b_{14}\cdot 1)(b_{18}\cdot 2)-(b_{15}\cdot 2)(b_{17}\cdot 1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
D_{14} = (b_{13}\cdot 3)(b_{18}\cdot 2)-(b_{12}\cdot 2)(b_{19}\cdot 3) & D_{17} = (b_{12}\cdot 2)(b_{16}\cdot 3)-(b_{13}\cdot 3)(b_{15}\cdot 2)\\
D_{15} = (b_{11}\cdot 1)(b_{19}\cdot 3)-(b_{13}\cdot 3)(b_{17}\cdot 1) & D_{18} = (b_{13}\cdot 3)(b_{14}\cdot 1)-(b_{11}\cdot 1)(b_{16}\cdot 3)\\
D_{16} = (b_{12}\cdot 2)(b_{17}\cdot 1)-(b_{11}\cdot 1)(b_{18}\cdot 2) & D_{19} = (b_{11}\cdot 1)(b_{15}\cdot 2)-(b_{12}\cdot 2)(b_{14}\cdot 1)
\end{array}$$

Ist dies gerechnet, so erhält man ohne Mühe die β_k aus:

---

1) Ueber eine bemerkenswerte Eigenschaft gewisser Gleichungen in der Theorie der charakteristischen Planeten. Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. 1898 Heft 4.

www.libtool.com.cn

$$
\left.\begin{array}{ll}
(198)\ (b_7\cdot 1)\beta_7 = (b_1\cdot 7);\quad (b_7\cdot 1)\beta_{10} = (b_1\cdot 10) & D_3^0\beta_{11} = (b_1\cdot 11)D_{11}+(b_1\cdot 14)D_{14}+(b_1\cdot 17)D_{17}\\
D_2^0\beta_8 = D_8 & D_2^0\beta_{12} = (b_2\cdot 12)D_{11}+(b_2\cdot 15)D_{14}+(b_2\cdot 18)D_{17}\\
D_2^0\beta_9 = D_9 & D_3^0\beta_{13} = (b_3\cdot 13)D_{11}+(b_3\cdot 16)D_{14}+(b_3\cdot 19)D_{17}\\
D_3^0\beta_{14} = (b_1\cdot 11)D_{12}+(b_1\cdot 14)D_{15}+(b_1\cdot 17)D_{18} & D_3^0\beta_{17} = (b_1\cdot 11)D_{13}+(b_1\cdot 14)D_{16}+(b_1\cdot 17)D_{19}\\
D_3^0\beta_{15} = (b_2\cdot 12)D_{12}+(b_2\cdot 15)D_{15}+(b_2\cdot 18)D_{18} & D_3^0\beta_{18} = (b_2\cdot 12)D_{13}+(b_2\cdot 15)D_{16}+(b_2\cdot 18)D_{19}\\
D_3^0\beta_{16} = (b_3\cdot 13)D_{12}+(b_3\cdot 16)D_{15}+(b_3\cdot 19)D_{18} & D_3^0\beta_{19} = (b_3\cdot 13)D_{13}+(b_3\cdot 16)D_{16}+(b_3\cdot 19)D_{19}
\end{array}\right\}(R_2).
$$

Die Koefficienten für S_2 rechnet man dann durch folgende Formeln:

$$
\left.\begin{array}{ll}
(199)\quad \Delta_1 a_7 = (a_2\cdot 7)+(a_2\cdot 0)\beta_7 & \alpha_{14} = (\alpha_2\cdot 14)-(\alpha_2\cdot 1)\beta_{11}+(\alpha_2\cdot 1)\beta_{17}\\
\Delta_1 a_8 = (a_2\cdot 8)+(a_2\cdot 0)\beta_8 & \alpha_{15} = (\alpha_2\cdot 15)-(\alpha_2\cdot 1)\beta_{12}+(\alpha_2\cdot 1)\beta_{18}\\
\Delta_1 a_9 = (a_2\cdot 9)+(a_2\cdot 0)\beta_9 & \alpha_{16} = (\alpha_2\cdot 16)-(\alpha_2\cdot 1)\beta_{13}+(\alpha_2\cdot 1)\beta_{19}\\
\Delta_1 a_{10} = (a_2\cdot 10)+(a_2\cdot 0)\beta_{10} &\\
\Delta_2 a_{11} = (a_2\cdot 11)+(a_2\cdot 2)\beta_{11}+(a_2\cdot 3)\beta_{14}+(a_2\cdot 4)\beta_{17} & \Delta_3 a_{17} = (a_2\cdot 17)+(a_2\cdot 5)\beta_{11}+(a_2\cdot 3)\beta_{14}+(a_2\cdot 6)\beta_{17}\\
\Delta_2 a_{12} = (a_2\cdot 12)+(a_2\cdot 2)\beta_{12}+(a_2\cdot 3)\beta_{15}+(a_2\cdot 4)\beta_{18} & \Delta_3 a_{18} = (a_2\cdot 18)+(a_2\cdot 5)\beta_{12}+(a_2\cdot 3)\beta_{15}+(a_2\cdot 6)\beta_{18}\\
\Delta_2 a_{13} = (a_2\cdot 13)+(a_2\cdot 2)\beta_{13}+(a_2\cdot 3)\beta_{16}+(a_2\cdot 4)\beta_{19} & \Delta_3 a_{19} = (a_2\cdot 19)+(a_2\cdot 5)\beta_{13}+(a_2\cdot 3)\beta_{16}+(a_2\cdot 6)\beta_{19}
\end{array}\right\}(S_2).
$$

Des weiteren ist:

$$
\left.\begin{array}{l}
(200)\quad \gamma_{14} = (\gamma_2\cdot 14)+(\gamma_2\cdot 1)\beta_{11}+(\gamma_2\cdot 2)\beta_{14}+(\gamma_2\cdot 3)\beta_{17}\\
\gamma_{15} = (\gamma_2\cdot 15)+(\gamma_2\cdot 1)\beta_{12}+(\gamma_2\cdot 2)\beta_{15}+(\gamma_2\cdot 3)\beta_{18}\\
\gamma_{16} = (\gamma_2\cdot 16)+(\gamma_2\cdot 1)\beta_{13}+(\gamma_2\cdot 2)\beta_{16}+(\gamma_2\cdot 3)\beta_{19}
\end{array}\right\}(V_2).
$$

Es sind dann noch folgende Hilfsgrössen zu ermitteln:

$$
\begin{array}{ll}
(201)\quad \lambda_{11} = 2\mu(\gamma_4+\lambda_7) & G_9 = \beta_4(\tfrac{3}{2}\beta_2-\lambda_5)+\gamma_2\lambda_{11}\\
\lambda_{12} = 2\mu(\gamma_5+\lambda_8) & G_{10} = \beta_5(\tfrac{3}{2}\beta_2-\lambda_5)+\gamma_2\lambda_{12}\\
\lambda_{13} = \alpha_{14}-3\beta_{14} & G_{11} = -\beta_4\lambda_{10}+\gamma_3\lambda_{11}\\
\lambda_{14} = \alpha_{15}-3\beta_{15} & G_{12} = -\beta_5\lambda_{10}+\gamma_3\lambda_{12}\\
\lambda_{15} = \alpha_{16}-3\beta_{16} & G_{13} = \mu\gamma_1\gamma_{14}-\beta_1\lambda_{13}\\
\lambda_{16} = \tfrac{1}{2}\alpha_2-2\beta_2 & G_{14} = \mu\gamma_1\gamma_{15}-\beta_1\lambda_{14}\\
\lambda_{17} = \tfrac{1}{2}\alpha_3-2\beta_3 & G_{15} = \mu\gamma_1\gamma_{16}-\beta_1\lambda_{15}.
\end{array}
$$

Damit ergiebt sich:

www.libtool.com.cn

(202)
$$\left.\begin{aligned}
\Delta_1\gamma_7 &= a_7-2\beta_7-\lambda_9+G_9+3R^{+1}_{2\cdot1\cdot0}-S^{+1}_{2\cdot1\cdot0} & -\Delta_7\gamma_{11} &= a_{11}-2\beta_{11}-\lambda_9-6\beta_1\beta_4+\tfrac{3}{4}a_1+G_{13}\\
\Delta_1\gamma_8 &= a_8-2\beta_8-\lambda_{10}+G_{10} & -\Delta_7\gamma_{12} &= a_{12}-2\beta_{12}-\lambda_{10}-6\beta_1\beta_5+G_{14}\\
\Delta_1\gamma_9 &= a_9-2\beta_9+G_{11}+3R^{+1}_{2\cdot0\cdot1}-S^{+1}_{2\cdot0\cdot1} & -\Delta_7\gamma_{13} &= a_{13}-2\beta_{13}+G_{15}\\
\Delta_1\gamma_{10} &= a_{10}-2\beta_{10}+G_{12}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Delta_2\gamma_{17} &= a_{17}-2\beta_{17}+3R^{-1}_{6\cdot1\cdot0}-S^{-1}_{6\cdot1\cdot0}+\tfrac{3}{4}S_{6\cdot0\cdot0}-3R_{6\cdot0\cdot0}+G_9+G_{13}\\
\Delta_2\gamma_{18} &= a_{18}-2\beta_{18}+3R^{-1}_{6\cdot0\cdot1}-S^{-1}_{6\cdot0\cdot1}+G_{10}+G_{11}+G_{14}\\
\Delta_2\gamma_{19} &= a_{19}-2\beta_{19}+G_{12}+G_{15}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
(3+\delta_1)\gamma_{30} &= S^{+2}_{2\cdot2\cdot0}-2R^{+2}_{2\cdot2\cdot0}+3R^{+1}_{2\cdot1\cdot0}-S^{+1}_{2\cdot1\cdot0}+\tfrac{3}{4}S_{2\cdot0\cdot0}-3\beta_1\\
2\Delta_1\gamma_{21} &= S_{4\cdot2\cdot0}-2R_{4\cdot2\cdot0}+3R^{+1}_{4\cdot1\cdot0}-S^{+1}_{4\cdot1\cdot0}-3R_{4\cdot0\cdot0}+3\beta_4+3\beta_1(\beta_7+\lambda_{16})-a_4+\mu\gamma_2\gamma_6\\
2\Delta_1\gamma_{22} &= S^{+1}_{4\cdot1\cdot1}-2R^{+1}_{4\cdot1\cdot1}+3\beta_5+3\beta_1(\beta_8+\lambda_{17})-a_5+\mu\gamma_2\gamma_8\\
2\Delta_1 W^{-1}_{4\cdot1\cdot1} &= S^{-1}_{4\cdot1\cdot1}-2R^{-1}_{4\cdot1\cdot1}+3R^{+1}_{4\cdot0\cdot1}-S^{+1}_{4\cdot0\cdot1}+3\beta_1\beta_9\\
2\Delta_1 W_{4\cdot0\cdot2} &= S_{4\cdot0\cdot2}-2R_{4\cdot0\cdot2}+3\beta_1\beta_{10}\\
3\Delta_1 W_{6\cdot2\cdot0} &= S_{6\cdot2\cdot0}-2R_{6\cdot2\cdot0}+3R^{+1}_{6\cdot1\cdot0}+3R^{-1}_{6\cdot1\cdot0}-S^{+1}_{6\cdot1\cdot0}-S^{-1}_{6\cdot1\cdot0}-3R_{6\cdot0\cdot0}-6\beta_1\beta_4\\
3\Delta_1 W^{+1}_{6\cdot1\cdot1} &= S^{+1}_{6\cdot1\cdot1}-2R^{+1}_{6\cdot1\cdot1}+3R^{-1}_{6\cdot0\cdot1}-S^{-1}_{6\cdot0\cdot1}-6\beta_1\beta_5\\
2\Delta_2 W^{-2}_{8\cdot2\cdot0} &= S^{-2}_{8\cdot2\cdot0}-2R^{-2}_{8\cdot2\cdot0}+3R^{-1}_{8\cdot1\cdot0}-S^{-1}_{8\cdot1\cdot0}+\tfrac{3}{4}S_{8\cdot0\cdot0}-3R_{8\cdot0\cdot0}+\tfrac{3}{2}\beta_4^2+3\beta_1\beta_{17}+\lambda_2\gamma_{14}\\
2\Delta_2 W^{-2}_{8\cdot1\cdot1} &= S^{-2}_{8\cdot1\cdot1}-2R^{-2}_{8\cdot1\cdot1}+3R^{-1}_{8\cdot0\cdot1}-S^{-1}_{8\cdot0\cdot1}+3\beta_4\beta_5+3\beta_1\beta_{18}+\lambda_2\gamma_{15}\\
2\Delta_2 W^{-2}_{8\cdot0\cdot2} &= S^{-2}_{8\cdot0\cdot2}-2R^{-2}_{8\cdot0\cdot2}+\tfrac{3}{2}\beta_5^2+3\beta_1\beta_{19}+\lambda_2\gamma_{16}
\end{aligned}\right\}(K_2).$$

---

3) Die Berechnung der von der Neigung abhängigen Glieder gestaltet sich insofern bedeutend einfacher, als einmal alle Koefficienten der β_k in den Gleichungen für diese selbst, sowie in den a_k und γ_k dieselben sind, man also nur die von den β_k freien Glieder zu rechnen hat. Dann ist für den gestörten Sinus der Breite die Berechnung der ζ_k einfacher, da hier immer nur zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten auftreten.

Bei der Berechnung der a_{27} ... a_{29} und a_{33} ... a_{35} muss ebenfalls näherungsweise vorgegangen werden, weil in ihnen die γ_{30} ... γ_{32} auftreten, und in diesen wieder die a_k. Man setzt hinreichend genau mit demselben Fehler wie früher für die Berechnung der a_k diese γ_{30} ... γ_{32} folgendermassen an:

$$\begin{aligned}
\gamma_{30} &= (\alpha_2\cdot30)+[3\beta_1-(\alpha_2\cdot1)]\beta_{27}-2\beta_{30}+[3\beta_1+(\alpha_2\cdot1)]\beta_{33}\\
\gamma_{31} &= (\alpha_2\cdot31)+[3\beta_1-(\alpha_2\cdot1)]\beta_{28}-2\beta_{31}+[3\beta_1+(\alpha_2\cdot1)]\beta_{34}\\
\gamma_{32} &= (\alpha_2\cdot32)+[3\beta_1-(\alpha_2\cdot1)]\beta_{29}-2\beta_{32}+[3\beta_1+(\alpha_2\cdot1)]\beta_{35}.
\end{aligned}$$

www.libtool.com.cn

Hier sind bekannt und sofort zu rechnen:

(203)
$$(\alpha_2 \cdot 30) = \frac{k_1 q_{30\cdot 1}}{2\delta_1}$$
$$(\alpha_2 \cdot 31) = k_1 \frac{q_{31\cdot 1}}{2\delta_1}$$
$$(\alpha_2 \cdot 32) = k_1 \frac{q_{32\cdot 1}}{2\delta_1}$$

Benutzt man die vorhin gegebenen Ausdrücke, so kann man jetzt die $a_{27} \cdots a_{29}$, $a_{33} \cdots a_{35}$ nach den β_s auflösen. Die Koefficienten werden:

(204)
$$(a_2 \cdot 27) = A_7(\alpha_2 \cdot 30) - q_{27\cdot 1} \qquad (a_2 \cdot 33) = A_7(\alpha_2 \cdot 30) + q_{33\cdot 1}$$
$$(a_2 \cdot 28) = A_7(\alpha_2 \cdot 31) - q_{28\cdot 1} \qquad (a_2 \cdot 34) = A_7(\alpha_2 \cdot 31) + q_{34\cdot 1}$$
$$(a_2 \cdot 29) = A_7(\alpha_2 \cdot 32) - q_{29\cdot 1} \qquad (a_2 \cdot 35) = A_7(\alpha_2 \cdot 32) + q_{35\cdot 1}.$$

(205)
$$(\gamma_2 \cdot 30) = k_6(\alpha_2 \cdot 30) - \beta_1[(a_2 \cdot 27) + (a_2 \cdot 33)]$$
$$(\gamma_2 \cdot 31) = k_6(\alpha_2 \cdot 31) - \beta_1[(a_2 \cdot 28) + (a_2 \cdot 34)]$$
$$(\gamma_2 \cdot 32) = k_6(\alpha_2 \cdot 32) - \beta_1[(a_2 \cdot 29) + (a_2 \cdot 35)].$$

Dann sind die rechten Seiten in den Bedingungsgleichungen für die β_s noch zu rechnen:

(206)
$$(b_1 \cdot 23) = \frac{2q_{23\cdot 1}}{\Delta_1} - p_{23\cdot 1} + \tfrac{1}{2}\beta_1 \overline{A}_{4\cdot 2\cdot 0}$$
$$(b_1 \cdot 24) = \frac{2q_{24\cdot 1}}{\Delta_1} - p_{24\cdot 1} + \tfrac{1}{2}\beta_1[\overline{A}^{+1}_{4\cdot 1\cdot 1} - q_{7\cdot 1}]$$
$$(b_2 \cdot 25) = \frac{2q_{25\cdot 1}}{\Delta_1} - p_{25\cdot 1} + \tfrac{1}{2}\beta_1[\overline{A}^{-1}_{4\cdot 1\cdot 1} + q_{7\cdot 1}]$$
$$(b_1 \cdot 26) = \frac{2q_{26\cdot 1}}{\Delta_1} - p_{26\cdot 1} + \tfrac{1}{2}\beta_1 \overline{A}_{4\cdot 0\cdot 2}$$
$$(b_1 \cdot 27) = \frac{2(a_2 \cdot 27)}{\Delta_7} - p_{27\cdot 1} + \tfrac{1}{2}\beta_1 q_{30\cdot 1} + l_1(\alpha_2 \cdot 30) + \nu_1(\gamma_2 \cdot 30)$$
$$(b_2 \cdot 28) = \frac{2(a_2 \cdot 28)}{\Delta_7} - p_{28\cdot 1} + \tfrac{1}{2}\beta_1 q_{31\cdot 1} + l_1(\alpha_2 \cdot 31) + \nu_1(\gamma_2 \cdot 31)$$
$$(b_3 \cdot 29) = \frac{2(a_2 \cdot 29)}{\Delta_7} - p_{29\cdot 1} + \tfrac{1}{2}\beta_1 q_{32\cdot 1} + l_1(\alpha_2 \cdot 32) + \nu_1(\gamma_2 \cdot 32)$$
$$(b_1 \cdot 30) = k_7(\alpha_2 \cdot 30) - p_{30\cdot 1} - \tfrac{1}{2}\beta_1[q_{27\cdot 1} - q_{33\cdot 1}]$$
$$(b_2 \cdot 31) = k_7(\alpha_2 \cdot 31) - p_{31\cdot 1} - \tfrac{1}{2}\beta_1[q_{28\cdot 1} - q_{34\cdot 1}]$$
$$(b_3 \cdot 32) = k_7(\alpha_2 \cdot 32) - p_{3\ 1} - \tfrac{1}{2}\beta_1[q_{29\cdot 1} - q_{35\cdot 1}]$$

www.libtool.com.cn

$$(b_1.33) = p_{33\cdot1} - \frac{2(a_2.33)}{\Delta_3} + \tfrac{1}{2}\beta_1[q_{30\cdot1} - \overline{A}^{-2}_{8\cdot2\cdot0}] - l_1(\alpha_2.30) - \nu_1\Delta_2(\gamma_2.30)$$

$$(b_2.34) = p_{34\cdot1} - \frac{2(a_2.34)}{\Delta_3} + \tfrac{1}{2}\beta_1[q_{31\cdot1} - \overline{A}^{-2}_{8\cdot1\cdot1}] - l_1(\alpha_2.31) - \nu_1\Delta_2(\gamma_2.31)$$

$$(b_3.35) = p_{35\cdot1} - \frac{2(a_2.35)}{\Delta_3} + \tfrac{1}{2}\beta_1[q_{32\cdot1} - \overline{A}^{-2}_{8\cdot0\cdot2}] - l_1(\alpha_2.32) - \nu_1\Delta_2(\gamma_2.32)$$

Man erhält dann für die β_h ein dem vorigen ganz ähnliches System linearer Gleichungen, nur dass hier die rechten Seiten andere Werte haben. Ich will dies System nicht erst hinschreiben, sondern gleich seine Auflösung mit Hilfe der Determinanten geben. Es werde abkürzend gesetzt:

(207) $$D_{24} = (b_1\cdot24)(b_8.1) - (b_2.25)(b_9.2) \qquad D_{25} = (b_2.25)(b_8.1) - (b_1.24)(b_9.2).$$

Dann erhält man sofort mit Hilfe der früheren Subdeterminanten die Werte der Unbekannten:

(208)
$$\left.\begin{aligned}
(b_7.1)\beta_{23} &= (b_1.23) & D^0_3\beta_{27} &= (b_1.27)D_{11} + (b_1.30)D_{14} + (b_1.33)D_{17}\\
(b_7.1)\beta_{26} &= (b_1.26) & D^0_3\beta_{28} &= (b_2.28)D_{11} + (b_2.31)D_{14} + (b_2.34)D_{17}\\
D^0_2\beta_{24} &= D_{24} & D^0_3\beta_{29} &= (b_3.29)D_{11} + (b_3.32)D_{14} + (b_3.35)D_{17}\\
D^0_2\beta_{25} &= D_{25}
\end{aligned}\right\} (R_2)$$

$$\left.\begin{aligned}
D^0_3\beta_{30} &= (b_1.27)D_{12} + (b_1.30)D_{15} + (b_1.33)D_{18} & D^0_3\beta_{33} &= (b_1.27)D_{13} + (b_1.30)D_{16} + (b_1.33)D_{19}\\
D^0_3\beta_{31} &= (b_2.28)D_{12} + (b_2.31)D_{15} + (b_2.34)D_{18} & D^0_3\beta_{34} &= (b_2.28)D_{13} + (b_2.31)D_{16} + (b_2.34)D_{19}\\
D^0_3\beta_{32} &= (b_3.29)D_{12} + (b_3.32)D_{15} + (b_3.35)D_{18} & D^0_3\beta_{35} &= (b_3.29)D_{13} + (b_3.32)D_{16} + (b_3.35)D_{19}
\end{aligned}\right\} (R_3).$$

Jetzt ist man in der Lage, die Koefficienten für S_2 und V_2 rechnen zu können.

(209)
$$\left.\begin{aligned}
\Delta_1 a_{23} &= q_{23\cdot1} + (a_2.0)\beta_{23} & \alpha_{30} &= (\alpha_2.30) - (\alpha_2.1)\beta_{27} + (\alpha_2.1)\beta_{33}\\
\Delta_1 a_{24} &= q_{24\cdot1} + (a_2.0)\beta_{25} & \alpha_{31} &= (\alpha_2.31) - (\alpha_2.1)\beta_{28} + (\alpha_2.1)\beta_{34}\\
\Delta_1 a_{25} &= q_{25\cdot1} + (a_2.0)\beta_{24} & \alpha_{32} &= (\alpha_2.32) - (\alpha_2.1)\beta_{29} + (\alpha_2.1)\beta_{35}\\
\Delta_1 a_{26} &= q_{26\cdot1} + (a_2.0)\beta_{26}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Delta_7 a_{27} &= (a_2.27) + (a_2.2)\beta_{27} + (a_2.3)\beta_{30} + (a_2.4)\beta_{33} & \Delta_8 a_{33} &= (a_2.33) + (a_2.5)\beta_{27} + (a_2.3)\beta_{30} + (a_2.6)\beta_{33}\\
\Delta_7 a_{28} &= (a_2.28) + (a_2.2)\beta_{28} + (a_2.3)\beta_{31} + (a_2.4)\beta_{34} & \Delta_8 a_{34} &= (a_2.34) + (a_2.5)\beta_{28} + (a_2.3)\beta_{31} + (a_2.6)\beta_{34}\\
\Delta_7 a_{29} &= (a_2.29) + (a_2.2)\beta_{29} + (a_2.3)\beta_{32} + (a_2.4)\beta_{35} & \Delta_8 a_{35} &= (a_2.35) + (a_2.5)\beta_{29} + (a_2.3)\beta_{32} + (a_2.6)\beta_{35}
\end{aligned}\right\} (S_2).$$

(210)
$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{30} &= (\gamma_2.30) + (\gamma_2.1)\beta_{27} + (\gamma_2.2)\beta_{30} + (\gamma_2.3)\beta_{33}\\
\gamma_{31} &= (\gamma_2.31) + (\gamma_2.1)\beta_{28} + (\gamma_2.2)\beta_{31} + (\gamma_2.3)\beta_{34}\\
\gamma_{32} &= (\gamma_2.32) + (\gamma_2.1)\beta_{29} + (\gamma_2.2)\beta_{32} + (\gamma_2.3)\beta_{35}
\end{aligned}\right\} (V_2).$$

www.libtool.com.cn

Des weiteren sind noch einige Hilfsgrössen zu rechnen:

(211)
$$\begin{aligned} \lambda_{18} &= \alpha_{30} - 3\beta_{30} & G_{16} &= \mu\gamma_1\gamma_{30} - \beta_1\lambda_{18} \\ \lambda_{19} &= \alpha_{31} - 3\beta_{31} & G_{17} &= \mu\gamma_1\gamma_{31} - \beta_1\lambda_{19} \\ \lambda_{20} &= \alpha_{32} - 3\beta_{32} & G_{18} &= \mu\gamma_1\gamma_{32} - \beta_1\lambda_{20}. \end{aligned}$$

Dann ergeben sich sofort die Werte der Koefficienten in K_2:

(212)
$$\left.\begin{aligned} \Delta_1\gamma_{23} &= a_{23} - 2\beta_{23} & -\Delta_7\gamma_{27} &= a_{27} - 2\beta_{27} + G_{16} & \Delta_2\gamma_{23} &= a_{23} - 2\beta_{23} + G_{16} \\ \Delta_1\gamma_{24} &= a_{24} - 2\beta_{24} & -\Delta_7\gamma_{28} &= a_{28} - 2\beta_{28} + G_{17} & \Delta_2\gamma_{24} &= a_{24} - 2\beta_{24} + G_{17} \\ \Delta_1\gamma_{25} &= a_{25} - 2\beta_{25} & -\Delta_7\gamma_{29} &= a_{29} - 2\beta_{29} + G_{18} & \Delta_2\gamma_{25} &= a_{25} - 2\beta_{25} + G_{18} \\ \Delta_1\gamma_{26} &= a_{26} - 2\beta_{26} \\ 2\Delta_1\overline{W}_{4\cdot2\cdot0} &= \overline{S}_{4\cdot2\cdot0} - 2\overline{R}_{4\cdot2\cdot0} + 3\beta_1\beta_{23} & 2\Delta_2\overline{W}^{-2}_{8\cdot2\cdot0} &= \overline{S}^{-2}_{8\cdot2\cdot0} - 2\overline{R}^{-2}_{8\cdot2\cdot0} + 3\beta_1\beta_{23} + \lambda_2\gamma_{30} \\ 2\Delta_1\overline{W}^{+1}_{4\cdot1\cdot1} &= \overline{S}^{+1}_{4\cdot1\cdot1} - 2\overline{R}^{+1}_{4\cdot1\cdot1} + 3\beta_1\beta_{24} & 2\Delta_2\overline{W}^{-2}_{8\cdot1\cdot1} &= \overline{S}^{-2}_{8\cdot1\cdot1} - 2\overline{R}^{-2}_{8\cdot1\cdot1} + 3\beta_1\beta_{24} + \lambda_2\gamma_{31} \\ 2\Delta_1\overline{W}^{-1}_{4\cdot1\cdot1} &= \overline{S}^{-1}_{4\cdot1\cdot1} - 2\overline{R}^{-1}_{4\cdot1\cdot1} + 3\beta_1\beta_{25} & 2\Delta_2\overline{W}^{-2}_{8\cdot0\cdot2} &= \overline{S}^{-2}_{8\cdot0\cdot2} - 2\overline{R}^{-2}_{8\cdot0\cdot2} + 3\beta_1\beta_{25} + \lambda_2\gamma_{32} \\ 2\Delta_1\overline{W}_{4\cdot0\cdot2} &= \overline{S}_{4\cdot0\cdot2} - 2\overline{R}_{4\cdot0\cdot2} + 3\beta_1\beta_{26} \end{aligned}\right\} (K_2).$$

Es hat nun noch die Berechnung der Breitenstörungen selbst zu erfolgen. Diese ist auch ohne grosse Schwierigkeiten zu erledigen. Man rechnet zuerst folgende Hilfsgrössen:

(213)
$$\begin{aligned} l_7 &= \varepsilon_1 - \tfrac{1}{2}r_1 & C_1 &= \alpha_2\lambda_{01} & C_5 &= \tfrac{1}{2}q_2\xi_1 \\ \nu_5 &= \frac{\mu l_7}{2\delta_1\Delta_1} & C_2 &= \alpha_3\lambda_{01} & C_6 &= \tfrac{1}{2}q_3\xi_1 \\ \nu_6 &= \frac{\mu\varepsilon_2}{2\delta_1\Delta_1} & C_3 &= \alpha_2\lambda_{02} & C_7 &= \tfrac{1}{2}q_2\xi_2 \\ & & C_4 &= \alpha_3\lambda_{02} & C_8 &= \tfrac{1}{2}q_3\xi_2. \end{aligned}$$

Damit rechnet man die Koefficienten der ξ_s in den Bedingungsgleichungen:

(214)
$$\begin{aligned} (c\cdot2) &= -\delta_1\Delta_4 - \varepsilon_1^{(1)} & (c_0\cdot3) &= \varepsilon_{3\cdot1} - \tfrac{1}{2}q_2 - \tfrac{1}{2}r_4\xi_1 + C_1 \\ (c\cdot3) &= \tfrac{1}{2}r_1 - \lambda_{01}^{(1)} & (c_0\cdot4) &= \varepsilon_{4\cdot1} - \tfrac{1}{2}r_2 + \alpha_2 l_7 + C_5 + \nu_5\Delta_5\gamma_2 \\ (c\cdot4) &= \delta_1\Delta_9 - \varepsilon_1^{(1)} & (c_0\cdot5) &= \varepsilon_{5\cdot1} - \tfrac{1}{2}q_3 - \tfrac{1}{2}r_5\xi_1 + C_2 \\ (c\cdot5) &= -3\delta_1\Delta_5 - \varepsilon_1^{(1)} & (c_0\cdot6) &= \varepsilon_{6\cdot1} - \tfrac{1}{2}r_3 + \alpha_3 l_7 + C_6 + \nu_5\Delta_5\gamma_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c_0\cdot7) &= \varepsilon_{7\cdot1} - \tfrac{1}{2}r_4\xi_2 + C_3 & (c_0\cdot11) &= \varepsilon_{11\cdot1} - \tfrac{1}{2}q_2 + \tfrac{1}{2}r_2\xi_1 - C_1 \\ (c_0\cdot8) &= \varepsilon_{8\cdot1} + \alpha_2\varepsilon_2 + C_7 + \nu_6\Delta_5\gamma_2 & (c_0\cdot12) &= \varepsilon_{12\cdot1} - \tfrac{1}{2}q_3 + \tfrac{1}{2}r_3\xi_1 - C_2 \\ (c_0\cdot9) &= \varepsilon_{9\cdot1} - \tfrac{1}{2}r_5\xi_2 + C_4 & (c_0\cdot13) &= \varepsilon_{13\cdot1} + \tfrac{1}{2}r_2\xi_2 - C_3 \\ (c_0\cdot10) &= \varepsilon_{10\cdot1} + \alpha_3\varepsilon_2 + C_8 + \nu_6\Delta_5\gamma_3 & (c_0\cdot14) &= \varepsilon_{14\cdot1} + \tfrac{1}{2}r_3\xi_2 - C_4 \end{aligned}$$

www.libtool.com.cn

$$(c_0\cdot 15) = s_{15\cdot 1} - \tfrac{1}{2} r_4 + \alpha_2 l_7 - C_5 + \nu_5 \Delta_6 \gamma_2$$
$$(c_0\cdot 16) = s_{16\cdot 1} - \tfrac{1}{2} r_5 + \alpha_3 l_7 - C_6 + \nu_5 \Delta_6 \gamma_3$$
$$(c_0\cdot 17) = s_{17\cdot 1} + \alpha_2 s_2 - C_7 + \nu_6 \Delta_6 \gamma_2$$
$$(c_0\cdot 18) = s_{18\cdot 1} + \alpha_3 s_2 - C_8 + \nu_6 \Delta_6 \gamma_3.$$

Man erhält hiermit je zwei lineare Gleichungen mit 2 Unbekannten zur Bestimmung der ξ_n, deren Aufführung ich mir hier ersparen will. Dieselben lassen sich leicht durch Determinanten lösen; ich will zur Abkürzung setzen:

$$(215) \qquad D_4^0 = (c\cdot 2)^2 - (c\cdot 3)^2 \qquad D_5^0 = (c\cdot 4)(c\cdot 5) - (c\cdot 3)^2.$$

Dann folgen die ξ_n ohne weiteres aus:

$$(216)\quad \left.\begin{aligned}
D_4^0\xi_3 &= (c\cdot 2)(c_0\cdot 3) - (c\cdot 3)(c_0\cdot 4) & D_4^0\xi_7 &= (c\cdot 2)(c_0\cdot 7) - (c\cdot 3)(c_0\cdot 8)\\
D_4^0\xi_4 &= (c\cdot 2)(c_0\cdot 4) - (c\cdot 3)(c_0\cdot 3) & D_4^0\xi_8 &= (c\cdot 2)(c_0\cdot 8) - (c\cdot 3)(c_0\cdot 7)\\
D_4^0\xi_5 &= (c\cdot 2)(c_0\cdot 5) - (c\cdot 3)(c_0\cdot 6) & D_4^0\xi_9 &= (c\cdot 2)(c_0\cdot 9) - (c\cdot 3)(c_0\cdot 10)\\
D_4^0\xi_6 &= (c\cdot 2)(c_0\cdot 6) - (c\cdot 3)(c_0\cdot 5) & D_4^0\xi_{10} &= (c\cdot 2)(c_0\cdot 10) - (c\cdot 3)(c_0\cdot 9)\\
D_5^0\xi_{11} &= (c\cdot 3)(c_0\cdot 15) + (c\cdot 5)(c_0\cdot 11) & D_5^0\xi_{15} &= (c\cdot 3)(c_0\cdot 11) + (c\cdot 4)(c_0\cdot 15)\\
D_5^0\xi_{12} &= (c\cdot 3)(c_0\cdot 16) + (c\cdot 5)(c_0\cdot 12) & D_5^0\xi_{16} &= (c\cdot 3)(c_0\cdot 12) + (c\cdot 4)(c_0\cdot 16)\\
D_5^0\xi_{13} &= (c\cdot 3)(c_0\cdot 17) + (c\cdot 5)(c_0\cdot 13) & D_5^0\xi_{17} &= (c\cdot 3)(c_0\cdot 13) + (c\cdot 4)(c_0\cdot 17)\\
D_5^0\xi_{14} &= (c\cdot 3)(c_0\cdot 18) + (c\cdot 5)(c_0\cdot 14) & D_5^0\xi_{18} &= (c\cdot 3)(c_0\cdot 14) + (c\cdot 4)(c_0\cdot 18)
\end{aligned}\right\} (\mathfrak{S}_1).$$

Hiermit wären die Koefficienten der Glieder ersten und zweiten Grades unter Einschluss der exargumentalen Teile transformiert. Ebenso hatten wir schon die konstanten Teile nullten Grades und die Zusatzglieder ersten Grades behandelt, und jetzt wollen wir die konstanten Glieder zweiten Grades nebst den A-Gliedern transformieren. Wir rechnen zuerst folgende Hilfsgrössen:

$$(217)\quad \begin{aligned}
k_3 &= 2 + \frac{3\varsigma}{\delta_1} & \lambda_{21} &= \frac{21}{2}\beta_1 - 2\beta_2 & l_3 &= q_4 + a_4 & G_{19} &= 2\mathfrak{p}_3 - \mathfrak{q}_1 - \mathfrak{a}_1 - p_0^{(0)}\\
k_{3\cdot n} &= 2 + \frac{3\varsigma_n}{\delta_1} & \lambda_{22} &= \frac{\mu\gamma_2^2}{\delta_1} & l_9 &= q_5 + a_5 & G_{20} &= 2\mathfrak{p}_4 - \mathfrak{q}_2 - \mathfrak{a}_2\\
k_9 &= \tfrac{3}{4}\left(1 - \frac{\varsigma}{2\delta_1}\right) & \lambda_{23} &= \frac{\mu\gamma_2\gamma_3}{\delta_1} & l_{10} &= q_1 + a_1 & B_{15} &= -2\mathfrak{p}_3 + \mathfrak{q}_1 + \alpha_2^2\\
k_{9\cdot n} &= \tfrac{3}{4}\left(1 - \frac{\varsigma_n}{2\delta_1}\right) & \lambda_{24} &= \frac{\mu\gamma_3^2}{\delta_1} & & & B_{16} &= -\mathfrak{p}_4 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}_2 + \alpha_2\alpha_3
\end{aligned} \quad (\gamma_0)$$

$$C_9 = \mathfrak{d}_3 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}_1 \qquad C_{10} = \mathfrak{d}_4 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}_2.$$

Damit rechnet man:

$$\gamma_0 = \lambda_{22}(\varkappa^2 + \sum \varkappa_n^2) + 2\lambda_{23}\sum \varkappa_n \varkappa_n' + \lambda_{24}\sum \varkappa_n'^2$$

www.libtool.com.cn

(218)
$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= -\alpha_2^2+\tfrac{3}{2}\beta_4^2+3\beta_1\beta_7+G_1 & \xi_4 &= 3\beta_1\beta_{23}\\
\xi_2 &= -2\alpha_2\alpha_3+3\beta_4\beta_5+3\beta_1(\beta_8+\beta_9)+G_2 & \xi_5 &= 3\beta_1(\beta_{24}+\beta_{25})\\
\xi_3 &= -\alpha_3^2+\tfrac{3}{2}\beta_5^2+3\beta_1\beta_{10}+G_3 & \xi_6 &= 3\beta_1\beta_{26}
\end{aligned}\right\}$$

Für den Zusatzteil von γ:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\xi}_1 &= \frac{\varrho}{\delta_1}[\alpha_2(\lambda_{21}+\alpha_2 k_8)-\beta_4^2 k_9]\\
\bar{\xi}_{2,n} &= \frac{\varrho_n}{\delta_1}[\alpha_2(\lambda_{21}+\alpha_2 k_{8,n})-\beta_4^2 k_{9,n}]\\
\bar{\xi}_{3,n} &= \frac{\varrho_n}{\delta_1}[-\alpha_2(2\beta_3-\alpha_3 k_{8,n})+\alpha_3(\lambda_{21}+\alpha_2 k_{8,n})-2\beta_4\beta_5 k_{9,n}]\\
\bar{\xi}_{4,n} &= \frac{\varrho_n}{\delta_1}[-\alpha_2(2\beta_3-\alpha_3 k_{8,n})-\beta_5^2 k_{9,n}]
\end{aligned}\right\}\ (\gamma).$$

$$\begin{aligned}
\gamma = {}& \xi_1(\varkappa^2+\textstyle\sum\varkappa_n^2)+\xi_2\sum\varkappa_n\varkappa_n'+\xi_3\sum\varkappa_n'^2+\xi_4(\sin^2\iota+\sum\sin^2\iota_n)+\xi_5\sum\sin\iota_n\sin\iota_n'+\xi_6\sum\sin^2\iota_n'\\
&+\bar{\xi}_1\varkappa^2+\sum\bar{\xi}_{2,n}\varkappa_n^2+\sum\bar{\xi}_{3,n}\varkappa_n\varkappa_n'+\sum\bar{\xi}_{4,n}\varkappa_n'^2
\end{aligned}$$

Für die übrigen Konstanten gilt dann:

(219)
$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_2(q_1-2p_2)+\beta_1(q_7+a_7)+\beta_2(q_2-\tfrac{3}{2}a_1)+\beta_4(l_8-2l_2)+\beta_7 l_{10}-G_{19}-4\mu q_2^{(0)}\gamma_2\\
x_2 &= -2\alpha_2 p_3+\alpha_3(q_1-2p_2)+\beta_1(q_8+q_9+a_8+a_9)+\beta_2 q_3+\beta_3(q_2-\tfrac{3}{2}a_1)+\beta_4 l_9\\
&\quad+\beta_5(l_8-2l_2)+l_{10}(\beta_8+\beta_9)-G_{20}-4\mu(q_2^{(0)}\gamma_3+q_3^{(0)}\gamma_2)\\
x_3 &= -2p_5-2\alpha_3 p_3+\beta_1(q_{10}+a_{10})+\beta_3 q_3+\beta_5 l_9+\beta_{10} l_{10}-4\mu q_3^{(0)}\gamma_3\\
x_4 &= -2p_6+\beta_1(q_{23}+a_{23})+\beta_{23} l_{10}\\
x_5 &= -2p_7+\beta_1(q_{24}+q_{25}+a_{24}+a_{25})+l_{10}(\beta_{24}+\beta_{25})\\
x_6 &= -2p_8+\beta_1(q_{26}+a_{26})+\beta_{26} l_{10}
\end{aligned}\right\}\ (a_0 \text{ und } b_0).$$

Dann ergeben sich die Koefficienten der A-Glieder in folgender Weise:

(220)
$$\left.\begin{aligned}
\bar{b}_{\mathrm{I},n} &= [B_{15}\varkappa_n+B_{16}\varkappa_n']\varkappa\\
\bar{b}_{\mathrm{II},m,n} &= [B_{15}\varkappa_n+B_{16}\varkappa_n']\varkappa_m+[B_{16}\varkappa_n+(-2p_5+\alpha_3^2)\varkappa_n']\varkappa_m'\\
\bar{b}_{\mathrm{III},n} &= \left[-2p_6\sin\iota_n+\left(-p_7+\frac{2q_7}{\tau-\tau_n}\right)\sin\iota_n'\right]\sin\iota\\
\bar{b}_{\mathrm{IV},m,n} &= \left[-2p_6\sin\iota_n+\left(-p_7+\frac{2q_7}{\tau_m-\tau_n}\right)\sin\iota_n'\right]\sin\iota_m+\left[\left(-p_7-\frac{2q_7}{\tau_m-\tau_n}\right)\sin\iota_n-2p_8\sin\iota_n'\right]\sin\iota_m'
\end{aligned}\right\}\ (T_a R_2).$$

(221)
$$\left.\begin{aligned}
\bar{w}_1 &= \xi_1+G_{19}+\lambda_{22} & \bar{w}_4 &= \xi_4+2p_6\\
\bar{w}_2 &= \xi_2+G_{20}+2\lambda_{23} & \bar{w}_5 &= \xi_5+2p_7\\
\bar{w}_3 &= \xi_3+2p_5+\lambda_{24} & \bar{w}_6 &= \xi_6+2p_8
\end{aligned}\right\}\ (T_a V_2)$$

www.libtool.com.cn

(221)
$$\left.\begin{aligned}
\bar{\xi}_{5\cdot n} &= [2\bar{w}_1\varkappa_n+\bar{w}_2\varkappa_n']\varkappa\\
\bar{\xi}_{6\cdot m\cdot n} &= [2\bar{w}_1\varkappa_n+\bar{w}_2\varkappa_n']\varkappa_m+[\bar{w}_2\varkappa_n+2\bar{w}_3\varkappa_n']\varkappa_m'\\
\bar{\xi}_{7\cdot n} &= \left[2\bar{w}_4\sin\iota_n+\left(\bar{w}_5-\frac{3q_7}{\tau-\tau_n}\right)\sin\iota_n'\right]\sin\iota\\
\bar{\xi}_{8\cdot m\cdot n} &= [2\bar{w}_4\sin\iota_n+\left(\bar{w}_5-\frac{3q_7}{\tau_m-\tau_n}\right)\sin\iota_n']\sin\iota_m+\left[\left(\bar{w}_5+\frac{3q_7}{\tau_m-\tau_n}\right)\sin\iota_n+2\bar{w}_6\sin\iota_n'\right]\sin\iota_m'\\
\xi_{1\cdot n} &= \bar{\xi}_{5\cdot n}\cos(\Gamma-\Gamma_n) \qquad \xi_{3\cdot m\cdot n} = \bar{\xi}_{6\cdot m\cdot n}\cos(\Gamma_m-\Gamma_n)\\
\xi_{2\cdot n} &= -\bar{\xi}_{5\cdot n}\sin(\Gamma-\Gamma_n) \qquad \xi_{4\cdot m\cdot n} = -\bar{\xi}_{6\cdot m\cdot n}\sin(\Gamma_m-\Gamma_n)\\
\xi_{5\cdot n} &= \bar{\xi}_{7\cdot n}\cos(\Theta-\Theta_n) \qquad \xi_{7\cdot m\cdot n} = \bar{\xi}_{8\cdot m\cdot n}\cos(\Theta_m-\Theta_n)\\
\xi_{6\cdot n} &= \bar{\xi}_{7\cdot n}\sin(\Theta-\Theta_n) \qquad \xi_{8\cdot m\cdot n} = \bar{\xi}_{8\cdot m\cdot n}\sin(\Theta_m-\Theta_n)\\
\bar{\gamma}_0 &= \sum\xi_{1\cdot n}+\xi_{5\cdot n}+\mathfrak{S}\xi_{3\cdot m\cdot n}+\xi_{7\cdot m\cdot n}\\
\bar{g} &= \tfrac{1}{2}\sum(\varsigma-\varsigma_n)\xi_{2\cdot n}+(\tau-\tau_n)\xi_{6\cdot n}+\tfrac{1}{2}\mathfrak{S}(\varsigma_m-\varsigma_n)\xi_{4\cdot m\cdot n}+(\tau_m-\tau_n)\xi_{8\cdot m\cdot n}\\
\bar{g} &= -\tfrac{1}{6}\sum(\varsigma-\varsigma_n)^2\xi_{1\cdot n}+(\tau-\tau_n)^2\xi_{5\cdot n}-\tfrac{1}{6}\mathfrak{S}(\varsigma_m-\varsigma_n)^2\xi_{3\cdot m\cdot n}+(\tau_m-\tau_n)^2\xi_{7\cdot m\cdot n}
\end{aligned}\right\}(T_n V_n).$$

(222)
$$\left.\begin{aligned}
(c^{(n)}\cdot 1) &= C_9\varkappa_n+C_{10}\varkappa_n' & (c^{(n)}\cdot 3) &= \lambda_5\varkappa_n+\lambda_6\varkappa_n'\\
(c^{(n)}\cdot 2) &= C_9\sin\iota_n+\lambda_5\sin\iota_n' & (c^{(n)}\cdot 4) &= C_{10}\sin\iota_n+\lambda_6\sin\iota_n'\\
\bar{c}_{\mathrm{I}} &= -C_9\varkappa\sin\iota & \bar{c}_{\mathrm{IV}\cdot n} &= -(c^{(n)}\cdot 1)\sin\iota_n-(c^{(n)}\cdot 3)\sin\iota_n'\\
\bar{c}_{\mathrm{II}\cdot n} &= -(c^{(n)}\cdot 1)\sin\iota & \bar{c}_{\mathrm{V}\cdot m\cdot n} &= -(c^{(n)}\cdot 1)\sin\iota_m-(c^{(n)}\cdot 3)\sin\iota_m'\\
\bar{c}_{\mathrm{III}\cdot n} &= -(c^{(n)}\cdot 2)\varkappa & \bar{c}_{\mathrm{VI}\cdot m\cdot n} &= -(c^{(n)}\cdot 2)\varkappa_m-(c^{(n)}\cdot 4)\varkappa_m'
\end{aligned}\right\}(T_n 3_2).$$

---

4) Wir wollen jetzt auch die exargumentalen Glieder dritten Grades in ihren Koefficienten einer Umformung unterziehen, und für die hier besonders häufig wiederkehrenden Koefficientenverbindungen eine abkürzende Bezeichnung einführen.

Zuerst wollen wir die von der Neigung unabhängigen Glieder behandeln und für die Berechnung des S_8 folgende Hilfsgrössen ansetzen:

(223)
$$\begin{aligned}
\lambda_{25} &= \frac{\mu^2\gamma_3^2}{\delta_1^2} & \lambda_{28} &= \frac{\mu\gamma_{14}}{\delta_1} & \nu_7 &= \lambda_{25}+\lambda_{28}\\
\lambda_{26} &= \frac{\mu^2\gamma_2\gamma_3}{\delta_1^2} & \lambda_{29} &= \frac{\mu\gamma_{15}}{\delta_1} & \nu_8 &= \lambda_{26}+\lambda_{29}\\
\lambda_{27} &= \frac{\mu^2\gamma_2^2}{\delta_1^2} & \lambda_{30} &= \frac{\mu\gamma_{16}}{\delta_1} & \nu_9 &= \lambda_{27}+\lambda_{30}.
\end{aligned}$$

www.libtool.com.cn

Dann wird:

$$(224)\quad \left.\begin{aligned}
\alpha_{40} &= \alpha_{14}\lambda_3+\alpha_2(\lambda_{25}-\lambda_{28}) & 3\alpha_{56} &= \alpha_{14}\lambda_3+\alpha_2\nu_7\\
\alpha_{41} &= \alpha_{14}\lambda_4+\alpha_2\lambda_{26}-\alpha_3\lambda_{28} & 3\alpha_{57} &= \alpha_{15}\lambda_3+\alpha_{14}\lambda_4+\alpha_2\nu_8+\alpha_3\nu_7\\
\alpha_{42} &= \alpha_{15}\lambda_3+\alpha_2(\lambda_{26}-\lambda_{29})+\alpha_3\lambda_{25} & 3\alpha_{58} &= \alpha_{16}\lambda_3+\alpha_{15}\lambda_4+\alpha_2\nu_9+\alpha_3\nu_8\\
\alpha_{43} &= \alpha_{15}\lambda_4+\alpha_2\lambda_{27}+\alpha_3(\lambda_{26}-\lambda_{29}) & 3\alpha_{59} &= \alpha_{16}\lambda_4+\alpha_3\nu_9\\
\alpha_{44} &= \alpha_{16}\lambda_3+\alpha_3\lambda_{26}-\alpha_2\lambda_{30}\\
\alpha_{45} &= \alpha_{16}\lambda_4+\alpha_3(\lambda_{27}-\lambda_{30})
\end{aligned}\right\}(S_3).$$

Für die Berechnung der β_s sind folgende Hilfsgrössen nötig:

$$(225)\quad \begin{aligned}
-b_{2\cdot2\cdot0} &= \delta_1\Delta_4\beta_7+B_4\gamma_2 & b^{-2}_{2\cdot2\cdot0} &= \delta_1\Delta_9\beta_{11}-\nu_2\gamma_{14} & -b^{-2}_{6\cdot2\cdot0} &= 3\delta_1\Delta_5\beta_{17}+B_{12}\gamma_2+\nu_1\Delta_2\gamma_{14}\\
-b^{+1}_{2\cdot1\cdot1} &= \delta_1\Delta_4\beta_8+B_5\gamma_2 & b^{-2}_{2\cdot1\cdot1} &= \delta_1\Delta_9\beta_{12}-\nu_2\gamma_{15} & -b^{-2}_{6\cdot1\cdot1} &= 3\delta_1\Delta_5\beta_{18}+B_{13}\gamma_2+B_{12}\gamma_3+\nu_1\Delta_2\gamma_{15}\\
-b^{-1}_{2\cdot1\cdot1} &= \delta_1\Delta_4\beta_9+B_4\gamma_3 & b^{-2}_{2\cdot0\cdot2} &= \delta_1\Delta_9\beta_{13}-\nu_1\gamma_{16} & -b^{-2}_{6\cdot0\cdot2} &= 3\delta_1\Delta_5\beta_{19}+B_{13}\gamma_3+\nu_1\Delta_2\gamma_{16}\\
-b_{2\cdot0\cdot2} &= \delta_1\Delta_4\beta_{10}+B_5\gamma_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_{10} &= \frac{\mu}{\delta_1}(b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}+\lambda_3 b_{2\cdot0\cdot0}) & \nu_{13} &= \gamma_{14}+\lambda_{22}\\
\nu_{11} &= \frac{\mu}{\delta_1}(2b^{-1}_{4\cdot1\cdot0}+\lambda_3 b_{2\cdot0\cdot0}) & \nu_{14} &= \gamma_{15}+2\lambda_{25}\\
\nu_{12} &= \frac{\mu}{\delta_1}(b^{-1}_{4\cdot0\cdot1}+\lambda_4 b_{2\cdot0\cdot0}) & \nu_{15} &= \gamma_{16}+\lambda_{24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{17} &= b^{-2}_{6\cdot2\cdot0}+\lambda_{28}b_{2\cdot0\cdot0} & B_{20} &= b^{-2}_{2\cdot2\cdot0}+\lambda_{28}b_{2\cdot0\cdot0}\\
B_{18} &= b^{-2}_{6\cdot1\cdot1}+\lambda_{29}b_{2\cdot0\cdot0} & B_{21} &= b^{-2}_{2\cdot1\cdot1}+\lambda_{29}b_{2\cdot0\cdot0}\\
B_{19} &= b^{-2}_{6\cdot0\cdot2}+\lambda_{30}b_{2\cdot0\cdot0} & B_{22} &= b^{-2}_{2\cdot0\cdot2}+\lambda_{30}b_{2\cdot0\cdot0}.
\end{aligned}$$

Dann erhält man die β_s aus folgenden Gleichungen:

$$(226)\quad \left.\begin{aligned}
-4\delta_1\beta_{46} &= \lambda_3(b_{2\cdot2\cdot0}+B_{17})+2\lambda_{22}\nu_{10}\\
-4\delta_1\beta_{47} &= \lambda_3 b^{-1}_{2\cdot1\cdot1}+\lambda_4 B_{17}+2\lambda_{23}\nu_{10}\\
-4\delta_1\beta_{48} &= \lambda_3(b^{+1}_{2\cdot1\cdot1}+B_{18})+\lambda_4 b_{2\cdot2\cdot0}+2\lambda_{22}\nu_{12}+\lambda_{23}\nu_{11}\\
-4\delta_1\beta_{49} &= \lambda_3 b_{2\cdot0\cdot2}+\lambda_4(b^{-1}_{2\cdot1\cdot1}+B_{18})+2\lambda_{23}\nu_{13}+\lambda_{24}\nu_{11}\\
-4\delta_1\beta_{50} &= \lambda_4 b^{+1}_{2\cdot1\cdot1}+\lambda_3 B_{19}+2\lambda_{28}\nu_{13}\\
-4\delta_1\beta_{51} &= \lambda_4(b_{2\cdot0\cdot2}+B_{19})+2\lambda_{24}\nu_{13}\\
4\delta_1\beta_{52} &= \lambda_3 B_{20} & -8\delta_1\beta_{60} &= \lambda_3 B_{17}+\nu_{10}\nu_{13}\\
4\delta_1\beta_{53} &= \lambda_3 B_{21}+\lambda_4 B_{20} & -8\delta_1\beta_{61} &= \lambda_4 B_{17}+\lambda_3 B_{18}+\nu_{12}\nu_{13}+\nu_{10}\nu_{14}\\
4\delta_1\beta_{54} &= \lambda_3 B_{22}+\lambda_4 B_{21} & -8\delta_1\beta_{62} &= \lambda_4 B_{18}+\lambda_3 B_{19}+\nu_{13}\nu_{14}+\nu_{10}\nu_{15}\\
4\delta_1\beta_{55} &= \lambda_4 B_{22} & -8\delta_1\beta_{63} &= \lambda_4 B_{19}+\nu_{13}\nu_{15}
\end{aligned}\right\}(R_3).$$

www.libtool.com.cn

Die Berechnung von V_2 und K_2 gestaltet sich dann in folgender Weise: Zuerst rechnet man die Hilfsgrössen:

(227)
$$\lambda_{31} = 2\beta_1 - \beta_2$$
$$G_{21} = \lambda_{13}\lambda_{31} - \tfrac{1}{2}\beta_1\alpha_{14} - \alpha_2\beta_{16} + \lambda_3\nu_{13} \qquad G_{24} = -\beta_2\lambda_{14} - \alpha_2\beta_{15} + \lambda_4\nu_{14}$$
$$G_{22} = -\beta_2\lambda_{13} - \alpha_2\beta_{14} + \lambda_4\nu_{13} \qquad G_{25} = \lambda_{15}\lambda_{31} - \tfrac{1}{2}\beta_1\alpha_{16} - \alpha_2\beta_{16} + \lambda_3\nu_{15}$$
$$G_{23} = \lambda_{14}\lambda_{31} - \tfrac{1}{2}\beta_1\alpha_{15} - \alpha_2\beta_{15} + \lambda_3\nu_{14} \qquad G_{26} = -\beta_2\lambda_{15} - \alpha_2\beta_{16} + \lambda_4\nu_{15}.$$

Dann ergeben sich die γ_k aus:

(228)
$$\left.\begin{aligned}
&\delta_1\gamma_{40} = 3(\beta_{11} - \alpha_{40} + \beta_7) + 3\beta_4(\lambda_{16} + \beta_7 + \beta_{17}) + G_{21} \qquad \delta_1\gamma_{43} = 3[(1+\beta_4)\beta_{10} - \alpha_{43}] + 3\beta_5(\lambda_{17} + \beta_8 + \beta_{18}) + G_{24}\\
&\delta_1\gamma_{41} = 3(\beta_9 - \alpha_{41} + \beta_5\beta_{17}) + 3\beta_4(\lambda_{17} + \beta_8) + G_{22} \qquad \delta_1\gamma_{44} = 3(\beta_{12} - \alpha_{44} + \beta_5\beta_9 + \beta_6\beta_{18}) + G_{25}\\
&\delta_1\gamma_{42} = 3(\beta_{12} - \alpha_{42} + \beta_6) + 3\beta_4(\beta_9 + \beta_{18}) + 3\beta_5(\lambda_{16} + \beta_7) + G_{23} \qquad \delta_1\gamma_{45} = 3[-\alpha_{45} + \beta_5(\beta_{10} + \beta_{19})] + G_{26}\\
&3\delta_1\gamma_{56} = 3(\beta_{17} - \alpha_{56}) + 3\beta_4(\lambda_{16} + \beta_{11}) + G_{21}\\
&3\delta_1\gamma_{57} = 3(\beta_{18} - \alpha_{57}) + 3\beta_4(\lambda_{17} + \beta_{12}) + 3\beta_5(\lambda_{16} + \beta_{11}) + G_{22} + G_{23}\\
&3\delta_1\gamma_{58} = 3(\beta_{19} - \alpha_{58} + \beta_4\beta_{12}) + 3\beta_5(\lambda_{17} + \beta_{12}) + G_{24} + G_{25}\\
&3\delta_1\gamma_{59} = 3(-\alpha_{59} + \beta_5\beta_{13}) + G_{26}
\end{aligned}\right\} (V_2).$$

(229)
$$\left.\begin{aligned}
&\gamma_{46} = -3(\beta_4 - \beta_{14} + \tfrac{2}{3}\beta_{46}) \qquad \gamma_{52} = 3(\beta_4 - \beta_{14} + \tfrac{2}{3}\beta_{52})\\
&\gamma_{48} = -3(\beta_5 - \beta_{15} + \tfrac{2}{3}\beta_{48}) \qquad \gamma_{53} = 3(\beta_5 - \beta_{15} + \tfrac{2}{3}\beta_{53})\\
&\gamma_{50} = 3\beta_{16} - 2\beta_{50} \qquad \gamma_{54} = -3\beta_{16} + 2\beta_{54}
\end{aligned}\right\} (K_2).$$

Die Koefficienten in K_2 sind also ungeändert geblieben.

Wir wollen jetzt die Koefficienten der Glieder dritten Grades, soweit sie von der Neigung herrühren, oder in dem Ausdrucke für die Breitenstörung auftreten, einer ähnlichen Transformation unterziehen. Es folgt als Resultat für S_2:

(230)
$$\lambda_{32} = \frac{\mu\gamma_{30}}{\delta_1} \qquad \lambda_{33} = \frac{\mu\gamma_{31}}{\delta_1} \qquad \lambda_{34} = \frac{\mu\gamma_{32}}{\delta_1},$$

und für die Koefficienten α_k ergiebt sich:

(231)
$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{64} = \alpha_{30}\lambda_3 - \alpha_2\lambda_{32} \qquad 3\alpha_{90} = \alpha_{30}\lambda_3 + \alpha_2\lambda_{32}\\
&\alpha_{65} = \alpha_{30}\lambda_4 - \alpha_3\lambda_{32} \qquad 3\alpha_{91} = \alpha_{30}\lambda_4 + \alpha_3\lambda_{32}\\
&\alpha_{66} = \alpha_{31}\lambda_3 - \alpha_2\lambda_{33} \qquad 3\alpha_{92} = \alpha_{31}\lambda_3 + \alpha_2\lambda_{33}\\
&\alpha_{67} = \alpha_{31}\lambda_4 - \alpha_3\lambda_{33} \qquad 3\alpha_{93} = \alpha_{31}\lambda_4 + \alpha_3\lambda_{33}\\
&\alpha_{68} = \alpha_{32}\lambda_3 - \alpha_2\lambda_{34} \qquad 3\alpha_{94} = \alpha_{32}\lambda_3 + \alpha_2\lambda_{34}\\
&\alpha_{69} = \alpha_{32}\lambda_4 - \alpha_3\lambda_{34} \qquad 3\alpha_{95} = \alpha_{32}\lambda_4 + \alpha_3\lambda_{34}
\end{aligned}\right\} (S_2).$$

www.libtool.com.cn

Für R_3 sind folgende Grössen zu rechnen:

(232)
$$\begin{aligned}
\overline{b}^{-2}_{2\cdot2\cdot0} &= \delta_1\Delta_9\beta_{27}-\nu_1\gamma_{30} & -\overline{b}^{-2}_{6\cdot2\cdot0} &= 3\delta_1\Delta_5\beta_{33}+\nu_1\Delta_2\gamma_{30}\\
\overline{b}^{-2}_{2\cdot1\cdot1} &= \delta_1\Delta_9\beta_{28}-\nu_1\gamma_{31} & -\overline{b}^{-2}_{6\cdot1\cdot1} &= 3\delta_1\Delta_5\beta_{34}+\nu_1\Delta_2\gamma_{31}\\
\overline{b}^{-2}_{2\cdot0\cdot2} &= \delta_1\Delta_9\beta_{29}-\nu_1\gamma_{32} & -\overline{b}^{-2}_{6\cdot0\cdot2} &= 3\delta_1\Delta_5\beta_{35}+\nu_1\Delta_2\gamma_{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{25} &= \overline{b}^{-2}_{6\cdot2\cdot0}+\lambda_{32}b_{2\cdot0\cdot0} & B_{26} &= \overline{b}^{-2}_{2\cdot2\cdot0}+\lambda_{33}b_{2\cdot0\cdot0}\\
B_{24} &= \overline{b}^{-2}_{6\cdot1\cdot1}+\lambda_{33}b_{2\cdot0\cdot0} & B_{27} &= \overline{b}^{-2}_{2\cdot1\cdot1}+\lambda_{33}b_{2\cdot0\cdot0}\\
B_{25} &= \overline{b}^{-2}_{6\cdot0\cdot2}+\lambda_{34}b_{2\cdot0\cdot0} & B_{28} &= \overline{b}^{-2}_{2\cdot0\cdot2}+\lambda_{34}b_{2\cdot0\cdot0}.
\end{aligned}$$

Damit erhält man:

(233)
$$\left.\begin{aligned}
-4\delta_1\beta_{70} &= \lambda_3 B_{25} & 4\delta_1\beta_{76} &= \lambda_3 B_{26} & -8\delta_1\beta_{96} &= \lambda_3 B_{25}+\nu_{10}\gamma_{30}\\
-4\delta_1\beta_{71} &= \lambda_4 B_{25} & 4\delta_1\beta_{77} &= \lambda_4 B_{26} & -8\delta_1\beta_{97} &= \lambda_4 B_{25}+\nu_{12}\gamma_{30}\\
-4\delta_1\beta_{72} &= \lambda_3 B_{24} & 4\delta_1\beta_{78} &= \lambda_3 B_{27} & -8\delta_1\beta_{98} &= \lambda_3 B_{24}+\nu_{10}\gamma_{31}\\
-4\delta_1\beta_{73} &= \lambda_4 B_{24} & 4\delta_1\beta_{79} &= \lambda_4 B_{27} & -8\delta_1\beta_{99} &= \lambda_4 B_{24}+\nu_{12}\gamma_{31}\\
-4\delta_1\beta_{74} &= \lambda_3 B_{25} & 4\delta_1\beta_{80} &= \lambda_3 B_{28} & -8\delta_1\beta_{100} &= \lambda_3 B_{25}+\nu_{10}\gamma_{32}\\
-4\delta_1\beta_{75} &= \lambda_4 B_{25} & 4\delta_1\beta_{81} &= \lambda_4 B_{28} & -8\delta_1\beta_{101} &= \lambda_4 B_{25}+\nu_{12}\gamma_{32}
\end{aligned}\right\}(R_3).$$

$$\left.\begin{aligned}
4\beta_{82} &= \Delta_4\lambda_3\beta_{23} & 4\beta_{86} &= \Delta_4\lambda_3\beta_{25}\\
4\beta_{83} &= \Delta_4\lambda_4\beta_{23} & 4\beta_{87} &= \Delta_4\lambda_4\beta_{25}\\
4\beta_{84} &= \Delta_4\lambda_3\beta_{24} & 4\beta_{88} &= \Delta_4\lambda_3\beta_{26}\\
4\beta_{85} &= \Delta_4\lambda_4\beta_{24} & 4\beta_{89} &= \Delta_4\lambda_4\beta_{26}
\end{aligned}\right\}$$

Des weiteren erhält man für V_3:

(234)
$$\begin{aligned}
G_{27} &= \lambda_{18}\lambda_{31}-\tfrac{1}{2}\beta_1\alpha_{30}-\alpha_3\beta_{30}+\lambda_3\gamma_{30} & G_{30} &= -\beta_3\lambda_{19}-\alpha_3\beta_{31}+\lambda_4\gamma_{31}\\
G_{28} &= -\beta_3\lambda_{18}-\alpha_3\beta_{30}+\lambda_4\gamma_{30} & G_{31} &= \lambda_{20}\lambda_{31}-\tfrac{1}{2}\beta_1\alpha_{32}-\alpha_3\beta_{32}+\lambda_3\gamma_{32}\\
G_{29} &= \lambda_{19}\lambda_{31}-\tfrac{1}{2}\beta_1\alpha_{31}-\alpha_3\beta_{31}+\lambda_3\gamma_{31} & G_{32} &= -\beta_3\lambda_{20}-\alpha_3\beta_{32}+\lambda_4\gamma_{32}.
\end{aligned}$$

Worauf zu rechnen ist:

(235)
$$\left.\begin{aligned}
\delta_1\gamma_{64} &= 3(\beta_{27}-\alpha_{64}+\beta_4\beta_{33})+G_{27} & 3\delta_1\gamma_{90} &= 3(\beta_{33}-\alpha_{90}+\beta_4\beta_{27})+G_{27}\\
\delta_1\gamma_{65} &= 3(-\alpha_{65}+\beta_5\beta_{33})+G_{28} & 3\delta_1\gamma_{91} &= 3(-\alpha_{91}+\beta_5\beta_{27})+G_{28}\\
\delta_1\gamma_{66} &= 3(\beta_{28}-\alpha_{66}+\beta_4\beta_{34})+G_{29} & 3\delta_1\gamma_{92} &= 3(\beta_{34}-\alpha_{92}+\beta_4\beta_{28})+G_{29}\\
\delta_1\gamma_{67} &= 3(-\alpha_{67}+\beta_5\beta_{34})+G_{30} & 3\delta_1\gamma_{93} &= 3(-\alpha_{93}+\beta_5\beta_{28})+G_{30}\\
\delta_1\gamma_{68} &= 3(\beta_{29}-\alpha_{68}+\beta_4\beta_{35})+G_{31} & 3\delta_1\gamma_{94} &= 3(\beta_{35}-\alpha_{94}+\beta_4\beta_{29})+G_{31}\\
\delta_1\gamma_{69} &= 3(-\alpha_{69}+\beta_5\beta_{35})+G_{32} & 3\delta_1\gamma_{95} &= 3(-\alpha_{95}+\beta_5\beta_{29})+G_{32}
\end{aligned}\right\}(V_3)$$

www.libtool.com.cn

$$\left.\begin{array}{ll} \delta_1\gamma_{102} = 3(1+\beta_4)\beta_{23} & \delta_1\gamma_{106} = 3(\beta_{25}+\beta_4\beta_{24}) \\ \delta_1\gamma_{103} = 3\beta_5\beta_{23} & \delta_1\gamma_{107} = 3\beta_5\beta_{24} \\ \delta_1\gamma_{104} = 3(\beta_{24}+\beta_4\beta_{25}) & \delta_1\gamma_{108} = 3(1+\beta_4)\beta_{26} \\ \delta_1\gamma_{105} = 3\beta_5\beta_{25} & \delta_1\gamma_{109} = 3\beta_5\beta_{26} \end{array}\right\} (V_2).$$

(236)
$$\left.\begin{array}{lll} \gamma_{70} = 3\beta_{30}-2\beta_{70} & \gamma_{74} = 3\beta_{32}-2\beta_{74} & \gamma_{78} = -3\beta_{31}+2\beta_{78} \\ \gamma_{72} = 3\beta_{31}-2\beta_{72} & \gamma_{76} = -3\beta_{30}+2\beta_{76} & \gamma_{80} = -3\beta_{32}+2\beta_{80} \end{array}\right\} (K_2).$$

Jetzt sind noch die ζ_3 für den dritten Grad zu rechnen. Hier setzt man zur Abkürzung:

(237)
$$\begin{array}{ll} -c_4 = \delta_1\Delta_4\zeta_4+\nu_5\Delta_5\gamma_3 & -c_{15} = 3\delta_1\Delta_5\zeta_{15}+\nu_5\Delta_6\gamma_3 \\ -c_6 = \delta_1\Delta_4\zeta_6+\nu_5\Delta_5\gamma_3 & -c_{16} = 3\delta_1\Delta_5\zeta_{16}+\nu_5\Delta_6\gamma_3 \\ -c_8 = \delta_1\Delta_4\zeta_8+\nu_6\Delta_5\gamma_3 & -c_{17} = 3\delta_1\Delta_5\zeta_{17}+\nu_6\Delta_6\gamma_3 \\ -c_{10} = \delta_1\Delta_4\zeta_{10}+\nu_6\Delta_5\gamma_3 & -c_{18} = 3\delta_1\Delta_5\zeta_{18}+\nu_6\Delta_6\gamma_3. \end{array}$$

Dann folgt:

(238)
$$\left.\begin{array}{lll} -4\delta_1\zeta_{20} = \lambda_3(c_4+c_{15})+2l_7\lambda_{25} & -4\delta_1\zeta_{24} = \lambda_3(c_8+c_{17})+2\varepsilon_3\lambda_{25} & -8\delta_1\zeta_{46} = l_7\lambda_{33} \\ -4\delta_1\zeta_{21} = \lambda_4c_4+\lambda_3c_{16}+2l_7\lambda_{26} & -4\delta_1\zeta_{25} = \lambda_4c_8+\lambda_3c_{18}+2\varepsilon_3\lambda_{26} & -8\delta_1\zeta_{47} = l_7\lambda_{38}+\varepsilon_3\lambda_{32} \\ -4\delta_1\zeta_{22} = \lambda_3c_6+\lambda_4c_{15}+2l_7\lambda_{26} & -4\delta_1\zeta_{26} = \lambda_3c_{10}+\lambda_4c_{17}+2\varepsilon_3\lambda_{26} & -8\delta_1\zeta_{48} = l_7\lambda_{34}+\varepsilon_3\lambda_{33} \\ -4\delta_1\zeta_{23} = \lambda_4(c_6+c_{16})+2l_7\lambda_{27} & -4\delta_1\zeta_{27} = \lambda_4(c_{10}+c_{18})+2\varepsilon_3\lambda_{27} & -8\delta_1\zeta_{49} = \varepsilon_3\lambda_{34} \\ 4\zeta_{28} = \Delta_4\lambda_3\zeta_3 & 4\zeta_{34} = \Delta_9\lambda_3\zeta_{11} & -8\delta_1\zeta_{40} = \lambda_3c_{15}+l_7\nu_7 \\ 4\zeta_{29} = \Delta_4(\lambda_4\zeta_3+\lambda_3\zeta_5) & 4\zeta_{35} = \Delta_9(\lambda_4\zeta_{11}+\lambda_3\zeta_{12}) & -8\delta_1\zeta_{41} = \lambda_4c_{15}+\lambda_3c_{16}+l_7(\nu_8+\lambda_{26}) \\ 4\zeta_{30} = \Delta_4\lambda_4\zeta_5 & 4\zeta_{36} = \Delta_9\lambda_4\zeta_{12} & -8\delta_1\zeta_{42} = \lambda_4c_{16}+l_7\nu_9 \\ 4\zeta_{31} = \Delta_4\lambda_3\zeta_7 & 4\zeta_{37} = \Delta_9\lambda_3\zeta_{13} & -8\delta_1\zeta_{43} = \lambda_3c_{17}+\varepsilon_3\nu_7 \\ 4\zeta_{32} = \Delta_4(\lambda_4\zeta_7+\lambda_3\zeta_9) & 4\zeta_{38} = \Delta_9(\lambda_4\zeta_{13}+\lambda_3\zeta_{14}) & -8\delta_1\zeta_{44} = \lambda_4c_{17}+\lambda_3c_{18}+\varepsilon_3(\nu_8+\lambda_{26}) \\ 4\zeta_{33} = \Delta_4\lambda_4\zeta_9 & 4\zeta_{39} = \Delta_9\lambda_4\zeta_{14} & -8\delta_1\zeta_{45} = \lambda_4c_{18}+\varepsilon_3\nu_9 \end{array}\right\} (8_2).$$

Die Berechnung der Zusatzglieder zweiten Grades geschieht nach den Formeln (159), (161), (162), (163), (164), (166), (168) und (170), indem bei diesen Koefficienten eine weitere Transformation für die numerische Rechnung nicht angebracht ist.

Damit wäre auch die Transformation der Koefficienten der Glieder dritten Grades für die numerische Rechnung erledigt, und es ist hiermit zugleich eine Zusammenstellung der Koefficienten gegeben, wie sie successive gerechnet werden müssen.

Selbstverständlich sind hier nur die Koefficienten der charakteristischen

www.libtool.com.cn

und elementaren Glieder behandelt, sowie einiger koordinierten in K, die Koefficienten der gewöhnlichen Glieder müssen nach den in Br. Kap. 6 gegebenen Formeln ermittelt werden. Ebenso setzen die hier gegebenen Koefficienten die Kenntnis der dort und in der vorliegenden Arbeit im ersten Kapitel gegebenen A-, B-, C-Koefficienten voraus, sowie der für die charakteristischen Planeten notwendigen p-, q-, ε-Koefficienten, welche hier im zweiten Kapitel berechnet sind.

Um die Zusatzglieder rechnen zu können, sowie die konstanten Teile zweiten Grades, ist auch die Kenntnis der Elemente erforderlich. Andrerseits ist die Kenntnis der Störungen wieder zur Elementenbestimmung nötig. Es wird wohl in den meisten Fällen ausreichen, für den Zweck der Konstantenbestimmung in den konstanten Teilen zweiten Grades die oskulierenden elliptischen Elemente anzunehmen und die Zusatzglieder ganz fortzulassen und sie erst mit den definitiven Elementen zu ermitteln und nur für die Rechnung der Störungen zu verwerten.

§ 2. Ueber die Reduktion auf die Ekliptik und die Berechnung instantaner elliptischer Elemente.

5) Wir hatten bisher die Störungsbeträge zu ermitteln gesucht, wie sie an den Radiusvektor, die Zeit, sowie den Sinus der Breite angebracht werden müssen, um die augenblicklichen wahren Werte zu erhalten. Da wir aber in der Praxis nicht diese Koordinaten gebrauchen können, sondern entweder die heliocentrischen Ekliptikalkoordinaten oder die augenblicklichen elliptischen Elemente verlangt werden, so sollen jetzt die Formeln zur Berechnung dieser Grössen hergeleitet werden.

Es wird sich zeigen, dass hier zwei neue Störungsbeträge zu berechnen sind, der Differentialquotient des Sinus der Breite und die Reduktion auf die Ekliptik, ebenfalls eine auf $\mathfrak{z}$ basierende Relation.

Nach Br. Kap. 3 wird mit i die Neigung der momentanen Bahnebene zur festen Ekliptik bezeichnet, in welcher auch die kurzperiodischen Störungen enthalten sind, im Gegensatze zu j, welches nur langperiodisch elementare Glieder enthält. Mit Σ wird die in der Bahn gezählte Knotenlänge bezeichnet, mit Ω dagegen die in der festen Ekliptik gezählte. Zu ihrer Berechnung dienen folgende Formeln:

$$\sin i \sin(v-\Sigma) = (\mathfrak{z}) + \mathfrak{Z} \tag{239}$$
$$\sin i \cos(v-\Sigma) = \frac{d(\mathfrak{z})}{dv} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dv}.$$

Hier kann man im Falle kleiner Neigungen und charakteristischer Planeten für die Zwecke abgekürzter Tafeln setzen:

$$\sin i = \sin j \qquad \Sigma = \sigma. \tag{240}$$

www.libtool.com.cn

Mit derselben Genauigkeit ist dort auch statthaft

$$l = v - \tfrac{1}{4}\sin^2 j \sin 2v + H_1 + H_2 \tag{241}$$

zu setzen, welche Formel a. a. O. abgeleitet ist und in Verbindung mit

$$\operatorname{tg}(l - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}(v - \Sigma) \tag{242}$$

uns die Knotenlänge Ω giebt.

Doch ist es im Falle kritischer Planeten und grösserer Neigungen sehr unvorteilhaft, diese abgekürzten Formeln zu benutzen, da dort einmal β und $\frac{d\beta}{dv}$ nicht vernachlässigt werden darf und andrerseits die Funktion H_2 im wesentlichen aus $\int (\tfrac{1}{\delta})\beta\, dv$ besteht und dieses infolge zweimaliger Integration sehr stark vergrössert erscheint. Denn, wie man sich leicht überzeugt, giebt $(\tfrac{1}{\delta})\beta$ zu C-Gliedern der Form $\frac{1}{2}\zeta_1 \sin^2 j \sin(4w - 2v)$ Veranlassung, und diese werden dann im Integral v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1^2}$, also v. d. Ord. des Neigungsteiles in V_2.

Um diesen Uebelstand zu vermeiden, wollen wir nicht die Reduktion auf die Ekliptik für die Länge des Planeten direkt geben, sondern die für seine Knotenlänge. Nach Br. Formel (99a) ist:

$$\frac{d(\Omega - \Sigma)}{dv} = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\delta}\left[\frac{d^2\tfrac{1}{\delta}}{dv^2} + \tfrac{1}{\delta}\right], \tag{243}$$

in welcher Formel nur Glieder vierten Grades vernachlässigt sind, entsprechend der hier erstrebten Genauigkeit. In der Klammer steht die Differentialgleichung für $\frac{1}{\delta}$, d. h. ein Ausdruck v. d. Ord. m' und es müssen dementsprechend die Koefficienten der C-Glieder in (243) mindestens erster Ordnung sein.

Aus der Integration dieser Differentialgleichung erhalten wir die Reduktion auf die Ekliptik für die Knotenlänge, welche demnach zweiten Grades und nur v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ wird.

Es handelt sich jetzt um die Aufstellung der Ausdrücke für $\frac{d\tfrac{1}{\delta}}{dv}$ und $\Omega - \Sigma$. Wir hatten bisher für den elementaren Teil der Form B gefunden:

$$(\tfrac{1}{\delta}) = \sin j \sin(v - \sigma).$$

Daraus folgt sofort durch Differentiation unter Einschluss der aus der Veränderlichkeit von $\sin j$ und σ entspringenden Glieder:

$$\frac{d(\tfrac{1}{\delta})}{dv} = \left[\sin j \sin\sigma + \frac{d \sin j \cos\sigma}{dv}\right]\sin v + \left[\sin j \cos\sigma - \frac{d \sin j \sin\sigma}{dv}\right]\cos v.$$

Führt man die Differentiation aus, so folgt:

$$\frac{d(\tfrac{1}{\delta})}{dv} = \sin j \cos v + \tau \sin\iota \cos h + \sum \tau_n \sin\iota_n \cos h_n. \tag{244}$$

www.libtool.com.cn

Bei gewöhnlichen Planeten wird ferner $\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}$ direkt durch Differentiation des Ausdruckes für $\mathfrak{Z}$ gebildet, indem auf hierbei entstehende exargumentale Glieder und Zusatzglieder keine Rücksicht genommen wird; zu den früheren Koefficienten treten also nur gewisse Faktoren n, $n \pm 1$, $n \pm 2$ hinzu, und wir brauchen uns hiermit nicht mehr zu beschäftigen.

Die Ermittlung von $\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}$ gestaltet sich bei kritischen Planeten nicht so einfach. Die C-Glieder können wir dann offenbar ganz fortlassen. Sie werden v. d. Ord. $m'\delta_1$ infolge der Differentiation. Dagegen werden wir aus den D-Gliedern ersten Grades noch einige exargumentale Glieder zweiten Grades mitnehmen müssen, welche v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ werden. Die durch die Differentiation entstehenden exargumentalen Glieder dritten Grades v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ lassen wir fort, da wir in $\mathfrak{Z}_3$ nur die Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1^3}$ berücksichtigt haben. Ebenfalls brauchen wir bei der Differentiation die Veränderlichkeit von $\sin j$, σ etc. nicht zu berücksichtigen, da diese Glieder v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ werden. Das Resultat der Differentiation wird dann für die D-Glieder:

$$
\begin{aligned}
(245)\qquad \frac{d\mathfrak{Z}}{dv} = {} & \Delta_2\xi_1 \sin j \cos(4w-\mathfrak{v}) + \Delta_2\xi_2 \sin j' \cos(4w-\mathfrak{v}_1) \\
& + \Delta_1\xi_3\eta \sin j \cos(2w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}) \quad + \xi'_4\eta \sin j \cos(2w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}) \\
& + \Delta_1\xi_5\eta' \sin j \cos(2w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) \quad + \xi'_6\eta' \sin j \cos(2w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1) \\
& + \Delta_1\xi_7\eta \sin j' \cos(2w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) \quad + \xi'_8\eta \sin j' \cos(2w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) \\
& + \Delta_1\xi_9\eta' \sin j' \cos(2w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1) \quad + \xi'_{10}\eta' \sin j' \cos(2w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1) \\
& - \Delta_7\xi_{11}\eta \sin j \cos(2w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}) \quad + \xi'_{15}\eta \sin j \cos(6w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}) \\
& - \Delta_7\xi_{12}\eta' \sin j \cos(2w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) \quad + \xi'_{16}\eta' \sin j \cos(6w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) \\
& - \Delta_7\xi_{13}\eta \sin j' \cos(2w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) \quad + \xi'_{17}\eta \sin j' \cos(6w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) \\
& - \Delta_7\xi_{14}\eta' \sin j' \cos(2w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1) + \xi'_{18}\eta' \sin j' \cos(6w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1).
\end{aligned}
$$

Hier ist:

$$
\begin{aligned}
(246)\qquad \xi'_4 &= \Delta_1\xi_4 - 2\mu\xi_1\gamma_2 & \xi'_{15} &= \Delta_3\xi_{15} - 2\mu\xi_1\gamma_2 \\
\xi'_6 &= \Delta_1\xi_6 - 2\mu\xi_1\gamma_3 & \xi'_{16} &= \Delta_3\xi_{16} - 2\mu\xi_1\gamma_3 \\
\xi'_8 &= \Delta_1\xi_8 - 2\mu\xi_2\gamma_2 & \xi'_{17} &= \Delta_3\xi_{17} - 2\mu\xi_2\gamma_2 \\
\xi'_{10} &= \Delta_1\xi_{10} - 2\mu\xi_2\gamma_3 & \xi'_{18} &= \Delta_3\xi_{18} - 2\mu\xi_2\gamma_3.
\end{aligned}
$$

Hierzu kommen noch die exargumentalen D-Glieder dritten Grades, nur soweit sie schon in $\mathfrak{Z}$ vorhanden sind und soweit sie direkt durch Differentiation unter Vernachlässigung des δ_1 im Faktor entstehen.

www.libtool.com.cn

Wir müssen jetzt die Relation für $\Omega - \Sigma$, welche mindestens zweiten Grades ist, herstellen. Für gewöhnliche Planeten reicht es vollkommen aus, die Differentialgleichung folgendermassen anzusetzen:

$$\frac{d(\Omega-\Sigma)}{dv} = \tfrac{1}{2}\sin j \sin \mathfrak{v}\left[\frac{d^2\lambda}{dv^2}+\delta\right].$$

Integriert man mit Hilfe der linearen Divisoren:

$$\begin{aligned}(247)\quad \Omega-\Sigma = {} & \sum d_{n\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j \sin nw && +\sum d^{+2}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j \sin j' \sin(nw+\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1)\\ & +\sum d^{+2}_{n\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j \sin(nw+2\mathfrak{v}) && +\sum d^{+1}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j \sin j' \sin(nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)\\ & +\sum d^{-2}_{n\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j \sin(nw-2\mathfrak{v}) && +\sum d^{-1}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j \sin j' \sin(nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1)\\ & && +\sum d^{-2}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j \sin j' \sin(nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1).\end{aligned}$$

Diese Funktion ist, von den A-Gliedern abgesehen, rein erster Ordnung und zweiten Grades bei den gewöhnlichen Planeten und sie braucht dort nur bei grösseren Neigungen berücksichtigt zu werden. Der langperiodisch elementare Teil ist nullter Ordnung und zweiten Grades und stets zu berücksichtigen, er ergiebt sich aus Formel (253). Die Werte der Koefficienten sind:

$$\begin{aligned}(248)\quad d_{n\cdot 2\cdot 0} &= \frac{c^{+1}_{n\cdot 1\cdot 0}-c^{-1}_{n\cdot 1\cdot 0}}{4n(1-\mu_1)} & d^{+2}_{n\cdot 1\cdot 1} &= \frac{-c^{+1}_{n\cdot 0\cdot 1}}{4[n(1-\mu_1)+2]}\\ d^{+2}_{n\cdot 2\cdot 0} &= \frac{-c^{+1}_{n\cdot 1\cdot 0}}{4[n(1-\mu_1)+2]} & d^{+1}_{n\cdot 1\cdot 1} &= \frac{-c^{-1}_{n\cdot 0\cdot 1}}{4n(1-\mu_1)}\\ d^{-2}_{n\cdot 2\cdot 0} &= \frac{c^{-1}_{n\cdot 1\cdot 0}}{4[n(1-\mu_1)-2]} & d^{-1}_{n\cdot 1\cdot 1} &= \frac{c^{+1}_{n\cdot 0\cdot 1}}{4n(1-\mu_1)}\\ & & d^{-2}_{n\cdot 1\cdot 1} &= \frac{c^{-1}_{n\cdot 0\cdot 1}}{4[n(1-\mu_1)-2]}.\end{aligned}$$

Bei kritischen Planeten wird man dagegen die C-Glieder, welche diesmal durch die Integration vergrössert werden, sowie die A-Glieder in den Koefficienten bis auf Grössen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ genau in der Differentialgleichung rechnen. Wir machen den Ansatz:

$$\begin{aligned}(249)\quad \operatorname{pars}\frac{d(\Omega-\Sigma)}{dv} = {} & d_1\sin^2 j + d_2\sin j\sin j'\cos(\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)+d_3\sin^2 j'\\ & +d_4\sin^2 j\cos(4w-2\mathfrak{v})+d_5\sin j\sin j'\cos(4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)+d_6\sin^2 j'\cos(4w-2\mathfrak{v}_1).\end{aligned}$$

Die Koefficienten sind:

$$\begin{aligned}(250)\quad d_1 &= \tfrac{1}{4}[\delta_1+\xi_1 c^{-1}_{4\cdot 1\cdot 0}] & d_4 &= \tfrac{1}{4}[c^{-1}_{4\cdot 1\cdot 0}+\xi_1\delta_1]\\ d_2 &= \tfrac{1}{4}[\delta_2+\xi_1 c^{-1}_{4\cdot 0\cdot 1}+\xi_2 c^{-1}_{4\cdot 1\cdot 0}] & d_5 &= \tfrac{1}{4}[c^{-1}_{4\cdot 0\cdot 1}+\xi_1\delta_2+\xi_2\delta_1]\\ d_3 &= \tfrac{1}{4}\xi_2 c^{-1}_{4\cdot 0\cdot 1} & d_6 &= \tfrac{1}{4}\xi_2\delta_2.\end{aligned}$$

www.libtool.com.cn

Hier ist

(250a) $$c^{-1}_{4\cdot1\cdot0} = \varepsilon_1 - \tfrac{1}{2}r_1, \qquad c^{-1}_{4\cdot0\cdot1} = \varepsilon_2.$$

In den A-Gliedern sind hier die Terme rein zweiter Ordnung fortgelassen, also im Integral die rein erster Ordnung, und dies entspricht ganz der bisher eingehaltenen Genauigkeit.

Von den Zusatzgliedern werden wir bei der Integration nur die aus den C-Gliedern stammenden berücksichtigen, da nur sie v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ werden, sowie die aus den C-Gliedern resultierenden exargumentalen Teile dritten Grades, soweit sie v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^3}$ sind. Lassen wir zuerst die A-Glieder und Zusatzglieder fort, so lautet das Resultat:

(251) $$\begin{aligned}\operatorname{pars}(\Omega-\Sigma) = {} & \vartheta_4 \sin^2 j \sin(4w-2\mathfrak{v}) + \vartheta_5 \sin j \sin j' \sin(4w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) \\ & + \vartheta_6 \sin^2 j' \sin(4w-2\mathfrak{v}_1) \\ & + \vartheta_7 \eta \sin^2 j \sin(2w-2\mathfrak{v}+\mathrm{v}) \qquad + \tfrac{1}{3}\vartheta_7 \eta \sin^2 j \sin(6w-2\mathfrak{v}-\mathrm{v}) \\ & + \vartheta_8 \eta' \sin^2 j \sin(2w-2\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1) \qquad + \tfrac{1}{3}\vartheta_8 \eta' \sin^2 j \sin(6w-2\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) \\ & + \vartheta_9 \eta \sin j \sin j' \sin(2w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) \qquad + \tfrac{1}{3}\vartheta_9 \eta \sin j \sin j' \sin(6w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) \\ & + \vartheta_{10} \eta' \sin j \sin j' \sin(2w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1) \qquad + \tfrac{1}{3}\vartheta_{10} \eta' \sin j \sin j' \sin(6w-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1) \\ & + \vartheta_{11} \eta \sin^2 j' \sin(2w-2\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) \qquad + \tfrac{1}{3}\vartheta_{11} \eta \sin^2 j' \sin(6w-2\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) \\ & + \vartheta_{12} \eta' \sin^2 j' \sin(2w-2\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1) \qquad + \tfrac{1}{3}\vartheta_{12} \eta' \sin^2 j' \sin(6w-2\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1).\end{aligned}$$

Die Koefficienten haben folgende Werte:

(252) $$\begin{aligned} \vartheta_4 &= \frac{d_4}{2\delta_1} & \vartheta_7 &= 2\lambda_3\vartheta_4 & \vartheta_{10} &= 2\lambda_4\vartheta_5 & \lambda_3 &= \frac{\mu\gamma_3}{\delta_1} \\ \vartheta_5 &= \frac{d_5}{2\delta_1} & \vartheta_8 &= 2\lambda_4\vartheta_4 & \vartheta_{11} &= 2\lambda_3\vartheta_6 & \lambda_4 &= \frac{\mu\gamma_3}{\delta_1} \\ \vartheta_6 &= \frac{d_6}{2\delta_1} & \vartheta_9 &= 2\lambda_3\vartheta_5 & \vartheta_{12} &= 2\lambda_4\vartheta_6. \end{aligned}$$

Für die A-Glieder erhalten wir dann:

(253) $$\operatorname{pars}(\Omega-\Sigma) = [\vartheta_{\mathrm{I}} + \textstyle\sum \vartheta_{\mathrm{II}.n}]\, v + \sum \vartheta_{\mathrm{III}.n} \sin(\vartheta - \vartheta_n) + \mathop{\mathrm{S}}\vartheta_{\mathrm{IV}.m.n} \sin(\vartheta_m - \vartheta_n).$$

Die Werte der Koefficienten sind:

(254) $$\begin{aligned} \vartheta_{\mathrm{I}} &= d_1 \sin^2 \iota \\ \vartheta_{\mathrm{II}.n} &= d_1 \sin^2 \iota_n + d_2 \sin \iota_n \sin \iota'_n + d_3 \sin^2 \iota'_n \\ \vartheta_{\mathrm{III}.n} &= -\frac{\sin \iota}{\tau - \tau_n}[2d_1 \sin \iota_n + d_2 \sin \iota'_n] \\ \vartheta_{\mathrm{IV}.m.n} &= -\frac{\sin \iota_m}{\tau_m - \tau_n}[2d_1 \sin \iota_n + d_2 \sin \iota'_n] - \frac{\sin \iota'_m}{\tau_m - \tau_n}[d_2 \sin \iota_n + 2d_3 \sin \iota'_n]. \end{aligned}$$

www.libtool.com.cn

Die Zusatzglieder lassen sich in folgender Form schreiben:

$$\text{(255)}\qquad \begin{aligned}\operatorname{pars}(\Omega-\Sigma) &= \bar{d}_1 \sin(4w-2h) \quad +\sum \bar{d}_{2\cdot n} \sin(4w-h-h_n)\\ &\quad +\sum \bar{d}_{3\cdot n} \sin(4w-2h_n) + \mathfrak{S}\, \bar{d}_{4\cdot m\cdot n} \sin(4w-h_m-h_n),\end{aligned}$$

wo die Koefficienten folgende Werte haben:

$$\text{(256)}\quad \bar{d}_1 = \frac{\tau}{\delta_1}\vartheta_4 \sin^2\iota \qquad \bar{d}_{2\cdot n} = \frac{\tau+\tau_n}{\delta_1}\left(\vartheta_4 \sin\iota_n + \frac{\vartheta_5}{2}\sin\iota_n'\right)\sin\iota$$

$$\bar{d}_{3\cdot n} = \frac{\tau_n}{\delta_1}\left[\left(\vartheta_4 \sin\iota_n + \frac{\vartheta_5}{2}\sin\iota_n'\right)\sin\iota_n + \left(\frac{\vartheta_5}{2}\sin\iota_n + \vartheta_6 \sin\iota_n'\right)\sin\iota_n'\right]$$

$$\bar{d}_{4\cdot m\cdot n} = \frac{\tau_m+\tau_n}{\delta_1}\left[\left(\vartheta_4 \sin\iota_n + \frac{\vartheta_5}{2}\sin\iota_n'\right)\sin\iota_m + \left(\frac{\vartheta_5}{2}\sin\iota_n + \vartheta_6 \sin\iota_n'\right)\sin\iota_m'\right].$$

Damit haben wir auch die Berechnung der Reduktion auf die Ekliptik in einer für kritische Planeten und grössere Neigungen geeigneten Form erledigt. Für charakteristische Planeten und mittlere Neigungen wird im allgemeinen Formel (241) ausreichen.

---

6) Wir sind nun in der Lage, den heliocentrischen Ort des Planeten in Bezug auf die Ekliptik zu ermitteln, oder auch die instantane Ellipse für den betreffenden Zeitmoment, die Rechnung wird sich folgendermassen gestalten. Nachdem $W = K+V$, R, $\mathfrak{z}$ sowie $\frac{d\mathfrak{z}}{dv}$ und $\Omega-\Sigma$ ermittellt sind, rechnet man die mittlere Anomalie aus:

$$\text{(257)}\qquad \left\{\begin{array}{l} M = L-\Pi-W \\ \varepsilon \text{ die excentrische Anomalie aus } \varepsilon-\eta\sin\varepsilon = M.\end{array}\right.$$

Dann folgt sofort:

$$\text{(258)}\qquad \operatorname{tg}\frac{\mathrm{v}}{2} = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} \qquad v = \mathrm{v}+\Pi.$$

Ferner die B-Glieder in ϱ und $\mathfrak{z}$ aus:

$$\text{(259)}\qquad (\varrho) = \eta\cos\mathrm{v} \qquad (\mathfrak{z}) = \sin j \sin\mathfrak{v}$$

$$\frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = \sin j\cos\mathfrak{v} + \tau\sin\iota\cos h + \sum\tau_n \sin\iota_n \cos h_n.$$

Man kennt dann:

$$\varrho = (\varrho)+R \qquad \mathfrak{z} = (\mathfrak{z})+\mathfrak{z} \qquad \frac{d\mathfrak{z}}{dv} = \frac{d(\mathfrak{z})}{dv}+\frac{d\mathfrak{z}}{dv}.$$

www.libtool.com.cn

Des weiteren ist zu ermitteln:

$$\sin i \sin (v - \Sigma) = \zeta \tag{260}$$
$$\sin i \cos (v - \Sigma) = \frac{d\zeta}{dv},$$

d. h. i und $\sum$, die Neigung und die in der Bahn gezählte Knotenlänge, und da $\Omega - \Sigma$ bekannt ist, haben wir auch sofort die in der festen Ekliptik gezählte Knotenlänge Ω. Wir kennen also i und Ω, die Elemente der Bahnlage.

Die übrigen vier Elemente folgen aus:

$$a_0 = \frac{a}{1+\nu}, \qquad \text{wo } \nu = \frac{R}{1+(\varrho)} \text{ ist,} \tag{261}$$
$$e = \eta, \qquad \pi = \Pi, \qquad M_0 = (L - \Pi - W)_0.$$

a_0 ist die halbe grosse Axe der Bahn, e die Excentricität und π die Perihellänge, während M_0 die mittlere Anomalie zur Zeit der Epoche bezeichnet. Zu bemerken ist nur noch, dass wir für die mittlere Bewegung die Bewegungskonstante n nehmen müssen und nicht denjenigen Wert, welcher a_0 entsprechen würde.

Diese Elemente nennt Herr Brendel die instantanen elliptischen Elemente und sie dürfen nicht mit den oskulierenden identificiert werden. Durch sie wird die instantane Ellipse festgelegt, welche für den Augenblick der Epoche die wahren Koordinaten des Körpers giebt, ebenso wie die wahre Bahn. Aber sie giebt nicht die wahren Derivierten dieser Koordinaten. In dieser Hinsicht unterscheidet sich die instantane Ellipse von der oskulierenden, welche nicht nur den wahren Ort, sondern auch die wahre Geschwindigkeit, mit der sich dieser Ort ändert, für den Moment der Oskulation ergiebt.

Die instantanen Elemente werden daher die Planetenbewegung nicht mit gleicher Genauigkeit darstellen, wie die oskulierenden. Herr Brendel wendet sie jedoch aus dem Grunde an, weil ihre Rechnung eine wesentlich einfachere ist und die damit zu erlangende Genauigkeit für den Zweck abgekürzter Tafeln ausreicht. Man ist dann sofort in der Lage, mit diesen Elementen eine Ephemeride rechnen zu können, innerhalb der gesteckten Genauigkeitsgrenze und für nicht zu grosse Zeiträume

Nach längerer Zeit wird diese Ellipse mehr und mehr von der wahren Bahn abweichen, wie dies im allgemeinen in nicht so starkem Masse auch bei der oskulierenden Ellipse der Fall ist, und dann werden auch die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung grössere Beträge erreichen.

Will man dagegen für einen gewissen Zeitraum die heliocentrischen Ekliptikalkoordinaten des gestörten Körpers haben, so muss man sich zuerst auch die Kenntnis von ϱ, ζ, W, $\frac{d\zeta}{dv}$ und $\Omega - \Sigma$ verschaffen. Dann rechnet man:

www.libtool.com.cn

(262)
$$L-\Pi-W = \varepsilon-\eta\sin\varepsilon$$
$$\operatorname{tg}\frac{\mathrm{v}}{2} = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} \qquad v = \mathrm{v}+\Pi.$$

Dann bekommt man sofort:

(263)
$$\begin{cases} l = v+(\Omega-\Sigma)-\frac{1}{2}\vartheta\frac{d\vartheta}{dv} \\ \sin b = \vartheta \\ r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\varrho}. \end{cases}$$

Die Transformation auf geocentrische Ekliptikalkoordinaten und geocentrische Aequatorialkoordinaten geschieht dann in der gewöhnlichen Weise und kann hier übergangen werden, ebenso die Reduktion der instantanen Elemente auf den Aequator als Fundamentalebene.

Einige Vereinfachungen, welche die in der vorliegenden Arbeit gegebenen Entwicklungen für den Zweck abgekürzter Tafeln und charakteristischer Planeten zulassen, habe ich in meiner Dissertation in Verbindung mit einer numerischen Anwendung auf Planet (108) Hecuba gegeben.

Zum Schluss sei noch erwähnt, dass die vollständigen Gleichungen für die Gyldén'schen Koordinaten R, W, ϑ sowie $\frac{d\vartheta}{dv}$ und $\Omega-\Sigma$ in folgenden Formeln gegeben sind:

Für R; Formel 37, 119, 142, 160, 162.

Für W; Formel 65, 68, 83, 85, 128, 130, 155, 163, 165, 167.

Für ϑ; Formel 41, 133, 156, 169.

Für $\frac{d\vartheta}{dv}$ und $\Omega-\Sigma$; Formel 244, 245, 251, 253, 255.

Die Koefficienten in diesen Gleichungen sind nach den Formeln 171 bis 238 sowie nach Formel 246, 250, 250a, 252, 254, 256 zu rechnen und dürfte die Angabe der obigen Formeln ausreichen, um sich über die Zugehörigkeit dieser Koefficienten zu den bezüglichen Argumenten zu orientieren.

Berlin, im März 1901. Julius Kramer.

---

www.libtool.com.cn

Tafel I.

Die charakteristischen Argumente für die Planeten vom Hecuba-Typus.

$$\mu = \tfrac{1}{2}, \qquad \mu_1 = \frac{1-\delta_1}{2}.$$

Nullter und erster Grad.

Argument	Faktor von v	$n=2$	$n=4$	$n=6$
nw	$\frac{1}{2}(n+n\delta_1)$	$1+\delta_1$	—	—
$nw-\mathfrak{v}$	$\frac{1}{2}(n+n\delta_1)-1$	δ_1	$1+2\delta_1$	—
$nw-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{2}(n+n\delta_1)-1$	δ_1	$1+2\delta_1$	—
$nw-\mathfrak{v}$	$\frac{1}{2}(n+n\delta_1)-1$	δ_1	$1+2\delta_1$	—
$nw-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{2}(n+n\delta_1)-1$	δ_1	$1+2\delta_1$	—

Zweiter Grad.

Argument	Argument	Faktor von v	$n=2$	$n=4$	$n=6$
$nw-2\mathfrak{v}$	$nw-2\mathfrak{v}$	$\frac{1}{2}(n+n\delta_1)-2$	$-1+\delta_1$	$2\delta_1$	$1+3\delta_1$
$nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1$	$nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{2}(n+n\delta_1)$	$1+\delta_1$	—	—
$nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1$	$nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{2}(n+n\delta_1)$	$1+\delta_1$	—	—
$nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1$	$nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{2}(n+n\delta_1)-2$	$-1+\delta_1$	$2\delta_1$	$1+3\delta_1$
$nw-2\mathfrak{v}_1$	$nw-2\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{2}(n+n\delta_1)-2$	$-1+\delta_1$	$2\delta_1$	$1+3\delta_1$
$nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}$	$nw+\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}$	$\frac{1}{2}(n+n\delta_1)$	$1+\delta_1$	—	—
$nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}$	$nw-\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}$	$\frac{1}{2}(n+n\delta_1)$	$1+\delta_1$	—	—
$nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}$	$nw-\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}$	$\frac{1}{2}(n+n\delta_1)-2$	$-1+\delta_1$	$2\delta_1$	$1+3\delta_1$
$nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1$	$nw+\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{2}(n+n\delta_1)$	$1+\delta_1$	—	—
$nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1$	$nw-\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{2}(n+n\delta_1)$	$1+\delta_1$	—	—
$nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1$	$nw-\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{2}(n+n\delta_1)-2$	$-1+\delta_1$	$2\delta_1$	$1+3\delta_1$

www.libtool.com.cn

Tafel II.

Die charakteristischen Argumente für die Planeten vom Hilda-Typus.

$$\mu = \tfrac{2}{3}, \qquad \mu_1 = \frac{2-\delta_1}{3}.$$

Nullter und erster Grad.

Argument	Faktor von v	$n=3$	$n=6$	$n=9$
nw	$\frac{1}{3}(n+n\delta_1)$	$1+\delta_1$	—	—
$nw-\mathfrak{v}$	$\frac{1}{3}(n+n\delta_1)-1$	δ_1	$1+2\delta_1$	—
$nw-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{3}(n+n\delta_1)-1$	δ_1	$1+2\delta_1$	—
$nw-\mathfrak{v}$	$\frac{1}{3}(n+n\delta_1)-1$	δ_1	$1+2\delta_1$	—
$nw-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{3}(n+n\delta_1)-1$	δ_1	$1+2\delta_1$	—

Zweiter Grad.

Argument	Argument	Faktor von v	$n=3$	$n=6$	$n=9$
$nw-2\mathfrak{v}$	$nw-2\mathfrak{v}$	$\frac{1}{3}(n+n\delta_1)-2$	$-1+\delta_1$	$2\delta_1$	$1+3\delta_1$
$nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1$	$nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{3}(n+n\delta_1)$	$1+\delta_1$	—	—
$nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1$	$nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{3}(n+n\delta_1)$	$1+\delta_1$	—	—
$nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1$	$nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{3}(n+n\delta_1)-2$	$-1+\delta_1$	$2\delta_1$	$1+3\delta_1$
$nw-2\mathfrak{v}_1$	$nw-2\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{3}(n+n\delta_1)-2$	$-1+\delta_1$	$2\delta_1$	$1+3\delta_1$
$nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}$	$nw+\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}$	$\frac{1}{3}(n+n\delta_1)$	$1+\delta_1$	—	—
$nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}$	$nw-\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}$	$\frac{1}{3}(n+n\delta_1)$	$1+\delta_1$	—	—
$nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}$	$nw-\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}$	$\frac{1}{3}(n+n\delta_1)-2$	$-1+\delta_1$	$2\delta_1$	$1+3\delta_1$
$nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1$	$nw+\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{3}(n+n\delta_1)$	$1+\delta_1$	—	—
$nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1$	$nw-\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{3}(n+n\delta_1)$	$1+\delta_1$	—	—
$nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1$	$nw-\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{3}(n+n\delta_1)-2$	$-1+\delta_1$	$2\delta_1$	$1+3\delta_1$

www.libtool.com.cn

Tafel III.

Die charakteristischen Argumente für die Planeten vom Thule-Typus.

$$\mu = \tfrac{3}{4}, \qquad \mu_1 = \frac{3-\delta_1}{4}.$$

Nullter und erster Grad.

Argument	Faktor von v	$n=4$	$n=8$	$n=12$
nw	$\frac{1}{4}(n+n\delta_1)$	$1+\delta_1$	—	—
$nw-\mathfrak{v}$	$\frac{1}{4}(n+n\delta_1)-1$	δ_1	$1+2\delta_1$	—
$nw-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{4}(n+n\delta_1)-1$	δ_1	$1+2\delta_1$	—
$nw-\mathfrak{v}$	$\frac{1}{4}(n+n\delta_1)-1$	δ_1	$1+2\delta_1$	—
$nw-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{4}(n+n\delta_1)-1$	δ_1	$1+2\delta_1$	—

Zweiter Grad.

Argument	Argument	Faktor von v	$n=4$	$n=8$	$n=12$
$nw-2\mathfrak{v}$	$nw-2\mathfrak{v}$	$\frac{1}{4}(n+n\delta_1)-2$	$-1+\delta_1$	$2\delta_1$	$1+3\delta_1$
$nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1$	$nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{4}(n+n\delta_1)$	$1+\delta_1$	—	—
$nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1$	$nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{4}(n+n\delta_1)$	$1+\delta_1$	—	—
$nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1$	$nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{4}(n+n\delta_1)-2$	$-1+\delta_1$	$2\delta_1$	$1+3\delta_1$
$nw-2\mathfrak{v}_1$	$nw-2\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{4}(n+n\delta_1)-2$	$-1+\delta_1$	$2\delta_1$	$1+3\delta_1$
$nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}$	$nw+\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}$	$\frac{1}{4}(n+n\delta_1)$	$1+\delta_1$	—	—
$nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}$	$nw-\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}$	$\frac{1}{4}(n+n\delta_1)$	$1+\delta_1$	—	—
$nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}$	$nw-\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}$	$\frac{1}{4}(n+n\delta_1)-2$	$-1+\delta_1$	$2\delta_1$	$1+3\delta_1$
$nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1$	$nw+\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{4}(n+n\delta_1)$	$1+\delta_1$	—	—
$nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1$	$nw-\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{4}(n+n\delta_1)$	$1+\delta_1$	—	—
$nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1$	$nw-\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{4}(n+n\delta_1)-2$	$-1+\delta_1$	$2\delta_1$	$1+3\delta_1$

www.libtool.com.cn

Tafel IV.

Die charakteristischen Argumente der Planeten kommensurabel zur zweiten Klasse.

	Hestia-Typus $\mu = \frac{1}{3}, \quad \mu_1 = \frac{1-\delta_1}{3}$.		$\frac{2}{5}$-Typus $\mu = \frac{2}{5}, \quad \mu_1 = \frac{3-\delta_1}{5}$.		$\frac{5}{7}$-Typus $\mu = \frac{5}{7}, \quad \mu_1 = \frac{5-\delta_1}{7}$.	
Argument	Faktor von v	$n=3$	Faktor von v	$n=5$	Faktor von v	$n=7$
nw	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)$	—
$nw-\mathfrak{v}$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$
$nw-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$
$nw-\mathfrak{v}$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$
$nw-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$
$nw-2\mathfrak{v}$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1
$nw\pm(\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)$	—
$nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1
$nw-2\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1
$nw-2\mathfrak{v}$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1
$nw\pm(\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)$	—
$nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1
$nw-2\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1
$nw\pm(\mathfrak{v}-\mathfrak{v})$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)$	—
$nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1
$nw\pm(\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)$	—
$nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1
$nw\pm(\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v})$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)$	—
$nw-\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1
$nw\pm(\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_1)$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)$	—
$nw-\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_1$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1

www.libtool.com.cn

Tafel V.

Verwandlungstabelle für die Koefficientenbezeichnung Ludendorff (L) — Kramer (K).

Q		P		S		R		$W_k = K$		$\frac{dW_i}{dv} = \frac{dV}{dv}$	
L	K	L	K	L	K	L	K	L	K	L	K
q_1	q_1	p_0	p_0	a_0	a_0	β_1	β_1	γ_1	γ_1	ε_2	γ_2
q_2	q_1	p_1	p_1	a_1	a_1	β_2	β_2	γ_3	γ_4	ε_4	γ_3
q_3	q_2	p_2	$\mathfrak{p}_1$	a_2	$\mathfrak{a}_1$	β_3	β_4	γ_5	γ_5	ε_8	γ_{14}
q_4	q_4	p_3	p_2	α_3	α_2	β_4	β_3	γ_6	γ_7	ε_{13}	γ_{15}
q_5	$\mathfrak{q}_2$	p_4	p_4	a_4	a_4	β_5	β_5	γ_7	γ_{11}	ε_{17}	γ_{16}
q_6	q_3	p_5	$\mathfrak{p}_2$	a_5	$\mathfrak{a}_2$	β_6	β_7	γ_9	γ_{17}		
q_7	q_5	p_6	p_3	α_6	α_3	β_7	β_{11}	γ_{10}	γ_8	Q (koordiniert)	
q_8	q_7	p_7	p_5	a_7	a_5	β_8	β_{14}	γ_{11}	γ_9		
q_9	q_{11}	p_8	p_7	a_8	a_7	β_9	β_{17}	γ_{12}	γ_{12}	L	K
q_{10}	q_{14}	p_9	p_{11}	a_9	a_{11}	β_{10}	β_8	γ_{14}	γ_{18}		
q_{11}	q_{17}	p_{10}	p_{14}	α_{10}	α_{14}	β_{11}	β_9	γ_{15}	γ_{10}	r_1	r_1
q_{12}	$\mathfrak{q}_4$	p_{11}	p_{17}	a_{11}	a_{17}	β_{12}	β_{12}	γ_{16}	γ_{13}	r_2	r_2
q_{13}	q_8	p_{12}	$\mathfrak{p}_4$	a_{13}	a_8	β_{13}	β_{15}	γ_{18}	γ_{19}	r_3	r_4
q_{14}	q_9	$\overline{p}_{12}$	$\mathfrak{p}_3$	a_{14}	a_9	β_{14}	β_{18}	γ_{19}	γ_6	r_4	r_3
q_{15}	q_{12}	$\overline{\overline{p}}_{12}$	$\mathfrak{p}_5$	a_{15}	a_{12}	β_{15}	β_{10}	γ_{20}	γ_{21}	r_5	r_5
q_{16}	q_{15}	p_{13}	p_8	α_{16}	α_{15}	β_{16}	β_{13}	γ_{21}	γ_{22}		
q_{17}	q_{18}	p_{14}	p_9	a_{17}	a_{18}	β_{17}	β_{16}	γ_{22}	γ_{20}		
q_{18}	q_{10}	p_{15}	p_{12}	a_{18}	a_{10}	β_{18}	β_{19}				
q_{19}	q_{13}	p_{16}	p_{15}	a_{19}	a_{13}						
q_{20}	q_{16}	p_{17}	p_{18}	α_{20}	α_{16}						
q_{21}	q_{19}	p_{18}	p_{10}	a_{21}	a_{19}						
		p_{19}	p_{13}								
		p_{20}	p_{16}								
		p_{21}	p_{19}								

www.libtool.com.cn

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Vorwort 3

Erstes Kapitel.

Die Differentialgleichungen der Gyldén'schen Störungstheorie. — Ergänzungen zur Entwicklung der Störungsfunktion und ihrer Derivierten in der von Herrn Brendel gegebenen Form. — Transformation dieser Ausdrücke.

1) Die Differentialgleichungen des Problems. — Erklärung der Bezeichnungen. — Die Elemente 5
2) Entwicklung der Störungsfunktion und ihrer Derivierten, sowie verschiedener von Herrn Brendel nicht gegebenen Koefficienten dieser Reihen 7
3) Einführung der Länge des gestörten Körpers an Stelle der des störenden in die Gleichungen für die Funktionen Q, P, Z 10
4) Einige für kritische Planeten wichtige Glieder in Q, P, Z, welche von Herrn Brendel nicht aufgeführt sind 11

Zweites Kapitel.

Definition der charakteristischen und kritischen Planeten. — Aufstellung der Differentialgleichungen für die Planeten des Hecuba-Typus unter Mitnahme der zweiten Potenz der störenden Masse in den charakteristischen Gliedern in Q, P, Z.

1) Definition der charakteristischen und kritischen Planeten. — Begründung der Einführung einer wahren mittleren Bewegung. — Die mittlere Bewegung in Länge 15
2) Aufsuchung der Glieder, welche kleine Divisoren erhalten 19
3) Das Brendel'sche Näherungsverfahren zur Berücksichtigung der zweiten Potenz der Masse in den charakteristischen Gliedern. — Bemerkungen über die anzustrebende Genauigkeit 21
4) Herleitung der kritischen Teile in Q, P, Z bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$ genau 25
5) Die Werte der Koefficienten q_k, r_k, p_k, s_k in diesen Gliedern 31

www.libtool.com.cn

Drittes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen für die Glieder nullten, ersten und zweiten Grades ohne Berücksichtigung der exargumentalen Glieder sowie der Veränderlichkeit von η, Π; η', Π' und $\sin j$, σ; $\sin j'$, σ'.

§ 1. Die Glieder nullten und ersten Grades.

1) Allgemeine Uebersicht über die bei der Integration der Differentialgleichungen des Problems einzuhaltende Genauigkeit. — Die Anordnung des Integrationsprozesses . . . . . Seite 41
2) Die Glieder nullten und ersten Grades in S 42
3) Die Glieder nullten und ersten Grades in R 44
4) Die kurzperiodischen elementaren Teile in S und (ρ) 46
5) Die Glieder nullten und ersten Grades in $W = K + V$ 47
6) Die Glieder ersten Grades in $\mathfrak{Z}$. — Berechnung von $(\mathfrak{z})$ 49

§ 2. Die Glieder zweiten Grades.

7) Berechnung des charakteristischen Teiles in S_2, sowie der A-Glieder in der Differentialgleichung für S_2 51
8) Der charakteristische Teil in R_2. — Die A-Glieder in der Differentialgleichung 53
9) Der charakteristische und koordinierte Teil in K_2 und V_2. — Die A-Glieder in der Differentialgleichung 57
10) Der charakteristische Teil in $\mathfrak{Z}_2$. — Die A-Glieder in der Differentialgleichung 61

Viertes Kapitel.

Berücksichtigung der exargumentalen Teile in den Gliedern ersten bis dritten Grades, sowie der Veränderlichkeit der langperiodischen Funktionen η, Π etc. in den C- und D-Gliedern ersten und zweiten Grades, soweit diese kleine Divisoren erhalten.

§ 1. Die Gyldén'sche partielle Integration. — Ableitung mehrerer Hilfsformeln.

1) Vorbemerkungen. — Die Formeln für die Gyldén'sche partielle Integration . 62
2) Die Ermittlung der Zusatzglieder aus η, Π etc. mit Hilfe der gewöhnlichen partiellen Integration 66
3) Ableitung der Differentialformeln sowie der Integralformeln der langperiodisch elementaren Funktionen 70

§ 2. Die Reihe der exargumentalen Glieder bis zum dritten Grade inclusive.

4) Die Koefficienten in S 74
5) Die Koefficienten in R. — Ueber die Konvergenz der Reihe der exargumentalen Glieder in R 78

www.libtool.com.cn

Seite

6) Die Reihe der exargumentalen Glieder in K und V. — Ihr Steigen in V bei kritischen Planeten 88
7) Die exargumentalen Teile in $\mathfrak{Z}$ 95

§ 3. Berechnung der konstanten und secularen Glieder, sowie der Zusatzglieder ersten und zweiten Grades.

8) Die konstanten Teile zweiten Grades. — Die secularen Glieder in V_2. — Die A-Glieder in R_2, V_2, $\mathfrak{Z}_2$ 97
9) Die aus der Veränderlichkeit von η, Π etc. resultierenden Zusatzglieder in S. — Die Reihenfolge der Berücksichtigung von exargumentalen und Zusatzgliedern 103
10) Die Zusatzglieder in R 107
11) Die Zusatzglieder in K und V. — Berücksichtigung der Funktion Ξ 111
12) Die Zusatzglieder in $\mathfrak{Z}$ 114

Fünftes Kapitel.

Transformation der Koefficienten der Störungsgleichungen in eine für die numerische Rechnung geeignete Form. — Ueber die Reduktion auf die Ekliptik und die Berechnung instantaner elliptischer Elemente.

§ 1. Transformation der Koefficienten zur numerischen Rechnung.

1) Transformation der Koefficienten nullten und ersten Grades 117
2) Die Koefficienten der Glieder zweiten Grades mit Ausnahme der Konstanten, der A-Glieder, der Zusatzglieder und ohne Berücksichtigung der Neigung . . 120
3) Die Koefficienten zweiten Grades, soweit sie von der Neigung herrühren. — Die Konstanten und A-Glieder zweiten Grades. — Die Koefficienten in $\mathfrak{Z}$ . . 126
4) Die Koefficienten der exargumentalen Glieder dritten Grades 132

§ 2. Ueber die Reduktion auf die Ekliptik und die Berechnung instantaner elliptischer Elemente.

5) Herleitung eines für kritische Planeten geeigneten Ausdruckes für die Reduktion auf die Ekliptik 137
6) Berechnung der instantanen elliptischen Elemente und der heliocentrischen Ekliptikalkoordinaten 142

Tafeln.

Tafel I: Die charakteristischen Argumente für die Planeten vom Hecuba-Typus 145
Tafel II: Die charakteristischen Argumente für die Planeten vom Hilda-Typus 146
Tafel III: Die charakteristischen Argumente für die Planeten vom Thule-Typus 147
Tafel IV: Die charakteristischen Argumente der Planeten kommensurabel zur zweiten Klasse 148
Tafel V: Verwandlungstabelle für die Koefficientenbezeichnung Ludendorff (L) — Kramer (K) 149

www.libtool.com.cn

Berichtigungen.

Seite	4	Zeile	7	von	oben	lies	C, D	statt	C, D
„	4	„	10	„	unten	„	A	„	A
„	17	„	10	„	oben	„	$\overline{\mathfrak{g}}v^2$	„	$\overline{\overline{g}}v^2$
„	24	„	9	„	„	ist	(40) vor die Formeln zu setzen		
„	25	„	15	„	„	lies	$\delta_1 \geqq \sqrt[3]{m'^2}$	statt	$\delta_1 \leqq \sqrt[3]{m'^2}$
„	31	„	1	„	„	ist	**5)** vor die Ueberschrift zu setzen		
„	34	„	3	„	unten	lies	$\mathfrak{p}_1^{(1)} = \cdots$	statt	$\mathfrak{p}_0^{(1)} = \cdots$
„	39	„	8	„	oben	„	$\varepsilon_5^{(0)} = \cdots$	„	$\varepsilon_5^{(5)} = \cdots$
„	41	„	16	„	„	„	$+\alpha_{16}\eta'^2\ldots$	„	$\alpha_{16}\eta'^2\ldots$
„	47	„	7	„	unten	„	$-2R_1S_0+6R_0R_1+(\cdots$	„	$-2R_1S_0+(\cdots$
„	48	„	1	„	„	„	$+[\frac{2}{3}p_0^{(0)}-2]\beta_3$	„	$+[\frac{3}{2}p_0^{(0)}-2]\beta_3$
„	49	„	7	„	„	„	$c_{4\cdot1\cdot0}^{-1} = \cdots$	„	$c_{4\cdot0\cdot0}^{-1} = \cdots$
„	59	„	2, 3, 4	„	unten	„	in $\gamma_{27}, \gamma_{28}, \gamma_{29}$ $\frac{-1}{1-\delta_1}$	„	$\frac{-1}{1+\delta_1}$
„	64	„	2	„	„	„	$\frac{m'}{\delta_1^3} \asymp \left(\frac{d\overline{V}}{dv}\right)^2$	„	$\frac{\overline{m}'}{\delta_1^3} \asymp \left(\frac{dV}{dv}\right)^2$
„	70	„	5	„	„	„	Saturn	„	Neptun
„	79	„	6	„	„	„	$\frac{d\overline{V}_1}{dv}$	„	$\frac{d\overline{V}_1}{dy}$
„	87	„	8	„	„	„	$\frac{m'}{\delta_1}$	„	$\frac{m'^2}{\delta_1}$
„	87	„	7	„	„	„	$\frac{m'^2}{\delta_1^2}$	„	$\frac{m'^3}{\delta_1^2}$
„	88	„	14	„	oben	„	$\frac{m'^2}{\delta_1^2}$	„	$\frac{m'^3}{\delta_1^2}$
„	98	„	5	„	„	„	$\overline{b}_{0\cdot1\cdot1}^{+1}$	„	$\overline{b}_{0\cdot0\cdot1}^{+1}$
„	99	„	8	„	unten	„	$\sum \varkappa_n'^2$	„	$\sum \varkappa_n'$
„	127	„	1	„	„	„	$p_{32\cdot1}$	„	$p_{3\ 1}$

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kästner), Göttingen.

www.libtool.com.cn

JAN 2 1 1 CAMBRIDGE, MASS.

L Soc 1721.16

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND II. Nro 3.

Über das Reciprocitätsgesetz

der

l^{ten} Potenzreste

in

algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet.

Von

Ph. Furtwängler
in Potsdam.

Eine von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen preisgekrönte Arbeit.

Berlin.
Weidmannnsche Buchhandlung.
1902.

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND II. Nro 3.

Über das Reciprocitätsgesetz

der

l^{ten} Potenzreste

in

algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet.

Von

Ph. Furtwängler
in Potsdam.

Eine von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen preisgekrönte Arbeit.

Berlin.
Weidmannnsche Buchhandlung.
1902.

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

Ueber das Reciprocitätsgesetz der l^{ten} Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet.

Von

Ph. Furtwängler in Potsdam.

Eine von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen preisgekrönte Arbeit.

Vorgelegt von Herrn D. Hilbert in der Sitzung vom 8. Februar 1902.

Einleitung.

Die folgenden Entwickelungen beruhen auf den Methoden, die von D. Hilbert zum Teil in dem der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1897 erstatteten Bericht über „Die Theorie der algebraischen Zahlkörper“ [1]), zum Teil in der in den Math. Ann. Bd. 51, Seite 1 bis 127, 1898 erschienenen Abhandlung „Ueber die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers“ [2]) entwickelt worden sind. Der Gang der Beweisführung schliesst sich eng an denjenigen an, den D. Hilbert in der zweiten Abhandlung durchgeführt hat.

Auf einen Unterschied sei schon hier aufmerksam gemacht. Während für das quadratische Restsymbol nur die beiden Werte $+1$ und -1 existieren, hat das Restsymbol der l^{ten} Potenzreste ausser dem Wert 1 noch $l-1$ verschiedene Werte. Während sich also in der Theorie der quadratischen Reste die Gleichheit zweier Restsymbole, die den Nichtrestcharakter ausdrücken, auch dadurch nachweisen lässt, dass man zeigt, dass beide von $+1$ verschieden sind, versagt dieser Schluss in der Theorie der l^{ten} Potenzreste, wenn $l > 2$.

1) Citiert mit Hilbert A. Z.

1) Citiert mit Hilbert Rel. quadr. Z.

www.libtool.com.cn

Diesem Umstande — oder der eigenen Ungeschicklichkeit — schreibt der Verfasser es zu, dass es ihm nicht gelungen ist, die Reciprocitätsgesetze der l^{ten} Potenzreste in gewissen algebraischen Zahlkörpern zu beweisen, ohne dieselben bereits für den Kreiskörper der l^{ten} Einheitswurzeln als bewiesen anzusehen; das sogenannte Eisenstein'sche Reciprocitätsgesetz bildet daher einen wesentlichen Bestandteil des Fundamentes der folgenden Entwickelungen.

I.

Definitionen und vorbereitende Sätze.

§ 1.

Das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ im Grundkörper k.

Es sei l eine ungrade Primzahl und $k(\zeta)$ der durch eine l^{te} Einheitswurzel ζ definierte Kreiskörper. Der Körper, der den folgenden Betrachtungen zu Grunde liegt, ist dann ein beliebiger Oberkörper k des Kreiskörpers $k(\zeta)$ vom Relativgrade m, also vom Grade $m(l-1)$.

Definition 1. Es sei $\mathfrak{p}$ ein in dem Ideal $\mathfrak{l} = (1-\zeta)$ nicht aufgehendes Primideal des Körpers k und α eine beliebige zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl in k. Wir nennen dann α einen l^{ten} Potenzrest von $\mathfrak{p}$, wenn es eine ganze Zahl β in k giebt, die der Congruenz

$$\alpha \equiv \beta^l (\mathfrak{p}) \text{ genügt.}$$

Satz 1. (Hülfssatz). Wenn im Körper k eine Congruenz

$$\alpha \equiv \beta^l (\mathfrak{p})$$

besteht, wo α zu $\mathfrak{p}$ prim ist, so giebt es auch eine ganze Zahl γ in k, die der Congruenz

$$\alpha \equiv \gamma^l (\mathfrak{p}^e)$$

genügt, wo e eine beliebige rationale positive ganze Zahl bedeutet.

Beweis: Es möge in k die Congruenz

$$\alpha \equiv \beta^l (\mathfrak{p}^e) \text{ gelten, aber}$$

$\alpha - \beta^l$ nicht durch $\mathfrak{p}^{e+1}$ teilbar sein.

Wir weisen dann nach, dass man stets eine ganze Zahl γ in k bestimmen kann, die der Congruenz

$$\alpha \equiv \gamma^l (\mathfrak{p}^{e+1}) \text{ genügt.}$$

www.libtool.com.cn

Bedeutet π eine ganze durch $\mathfrak{p}$, aber nicht durch $\mathfrak{p}^s$ teilbare Zahl in k und β_1 eine beliebige zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl in k, so gilt offenbar die Congruenz

$$(\beta+\beta_1\pi^f)^l \equiv \beta^l + l\beta^{l-1}\beta_1\pi^f \quad (\mathfrak{p}^{s'}).$$

Bestimmt man nun, was stets möglich ist, β_1 so, dass

$$\frac{\alpha-\beta^l}{\pi^f} \equiv l\beta^{l-1}\beta_1 \quad (\mathfrak{p}),$$

so ist offenbar $\gamma = \beta+\beta_1\pi^f$ eine Zahl, die der Congruenz

$$\alpha \equiv \gamma^l \quad (\mathfrak{p}^{f+1}) \quad \text{genügt.}$$

Wir fügen hier gleich den entsprechenden Satz für ein in l aufgehendes Primideal $\mathfrak{l}_1$ an.

Satz 2. (Hülfssatz). Es sei $\mathfrak{l}_1$ ein in dem Ideal $\mathfrak{l}$ genau zur l_1^{sten} Potenz aufgehendes Primideal. Sind dann α und β zwei zu $\mathfrak{l}_1$ prime ganze Zahlen, die der Congruenz

$$\alpha \equiv \beta^l \quad (\mathfrak{l}_1^{ll_1+1})$$

genügen, so ist auch die Congruenz

$$\alpha \equiv x^l \quad (\mathfrak{l}_1^{ll_1+e})$$

wo e eine rationale, positive, ganze Zahl grösser als 1 bedeutet, in k lösbar.

Beweis: Es sei λ_1 eine durch die erste Potenz von $\mathfrak{l}_1$ genau teilbare ganze Zahl in k. Es gilt dann die Congruenz:

$$(\beta+\beta_1\lambda_1^{l_1+f})^l \equiv \beta^l + l\beta^{l-1}\beta_1\lambda_1^{l_1+f} \quad (\mathfrak{l}_1^{ll_1+f+1}) \quad f>0$$

da stets:

$$(l-1)l_1+2l_1+2f \geqq ll_1+f+1$$
$$ll_1+lf \geqq ll_1+f+1.$$

Gilt nun bereits die Congruenz

$$\alpha \equiv \beta^l \quad (\mathfrak{l}^{ll_1+f}),$$

und bestimmen wir β_1 so, dass

$$\alpha-\beta^l \equiv l\beta^{l-1}\lambda_1^{l_1+f}\beta_1 \quad (\mathfrak{l}_1^{ll_1+f+1}),$$

so gilt offenbar, wenn wir

$$\gamma = \beta+\beta_1\lambda_1^{l_1+f} \quad \text{setzen, auch}$$
$$\alpha \equiv \gamma^l \quad (\mathfrak{l}_1^{ll_1+f+1}).$$

Um nun das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ in k zu definieren, müssen wir vorerst noch einen Hülfssatz über die Normen der zu $\mathfrak{l}$ primen Primideale in k ableiten. Dieser lautet:

Satz 3. (Hülfssatz). Ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiges zu $\mathfrak{l}$ primes Primideal in k und bezeichnet $n(\mathfrak{p})$ die Norm von $\mathfrak{p}$, so besteht die Congruenz

$$n(\mathfrak{p}) \equiv 1 \quad (l)$$

www.libtool.com.cn

Beweis: Es sei p die durch $\mathfrak{p}$ teilbare rationale Primzahl und

$$p = \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_s$$

die Zerlegung von p in $k(\zeta)$. Ist dann p^f die Norm von $\mathfrak{p}_i$, wenn man $\mathfrak{p}_i$ als Ideal des Kreiskörpers betrachtet, so ist

$$p^f \equiv 1 \quad (l).$$

Die Relativnorm von $\mathfrak{p}$, genommen in $k(\zeta)$, die ich mit $n_{k'}(\mathfrak{p})$ bezeichne, ist nur durch $\mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_s$ teilbar. Es sei

$$n_{k'}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}_1^{g_1} \mathfrak{p}_2^{g_2} \ldots \mathfrak{p}_s^{g_s},$$

dann wird offenbar

$$n(\mathfrak{p}) = p^{f(g_1+g_2+\cdots g_s)} \equiv 1 \quad (l).$$

Aus dem bewiesenen Satze ergiebt sich, dass, wenn $\mathfrak{p}$ zu l prim ist, $\alpha^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{l}}$ eine ganze Zahl in k ist und aus dem verallgemeinerten Fermat'schen Satze folgt dann, dass $\alpha^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{l}}$ stets einer l^{ten} Einheitswurzel nach $\mathfrak{p}$ congruent ist, wenn α zu $\mathfrak{p}$ relativ prim ist. Wir können daher definieren:

Definition 2. Ist $\mathfrak{p}$ ein zu l primes Primideal und α eine zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl in k, ist ferner

$$\alpha^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{l}} \equiv \zeta^a \quad (\mathfrak{p}),$$

wo a eine ganze rationale Zahl bedeutet, so soll

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = \zeta \quad \text{sein.}$$

Mit Rücksicht auf diese Definition können wir folgenden Satz aussprechen:

Satz 4. Ist α eine zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl, so ist α stets dann und nur dann l^{ter} Potenzrest von $\mathfrak{p}$, wenn

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = 1.$$

Der Beweis ergiebt sich leicht, wenn man eine Primitivzahl nach $\mathfrak{p}$ im Körper k heranzieht. (Vergl. A. Z. Satz 139 S. 366). Für das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ merken wir ferner noch folgende Formel an:

Satz 5. Sinn α und β zwei zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahlen in k, so gilt:

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\beta}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha\beta}{\mathfrak{p}}\right).$$

Das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ werden wir den Potenzcharakter der Zahl α nach $\mathfrak{p}$ nennen.

www.libtool.com.cn

Ein vollständiges System von $n(\mathfrak{p})-1$ zu $\mathfrak{p}$ primen und nach $\mathfrak{p}$ einander incongruenten Zahlen zerfällt offenbar in l Teilsysteme, so dass alle Zahlen eines Teilsystems denselben Potenzcharakter besitzen. Eins dieser Teilsysteme mit dem Potenzcharakter 1 enthält speciell $\frac{n(\mathfrak{p})-1}{l}$ l^{te} Potenzreste nach $\mathfrak{p}$.

Endlich definieren wir noch:

Definition 3. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal in k, so ist

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{q}}\right)\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{r}}\right)\ldots$$

wenn

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}.\mathfrak{q}.\mathfrak{r}\ldots$$

die Zerlegung von $\mathfrak{a}$ in Primideale ist.

§ 2.

Der relativ-cyclische Körper K vom Primzahlrelativgrade l in bezug auf k. Seine Relativdiscriminante und die Zerlegung der Primideale des Grundkörpers in ihm.

Ist μ eine beliebige ganze Zahl in k, die nicht die l^{te} Potenz einer Zahl in k ist, so entsteht durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\mu}$ zu den Zahlen des Körpers k ein neuer Körper $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$, der relativ-cyclisch in Bezug auf k vom Relativgrade l ist. Ersetzt man in den Zahlen des Körpers K die Zahl $\sqrt[l]{\mu}$ durch $\zeta\sqrt[l]{\mu}$, so entsteht aus K ein zu K relativ conjugierter Körper. Wir bezeichnen die angegebene Substitution mit S. Die sämtlichen relativ conjugierten Körper gehen dann aus K hervor durch Anwendung der Substitutionen:

$$S,\ S^2,\ \ldots\ S^{l-1}.$$

Es ist nun zunächst unsere Aufgabe, die Primfaktoren der Relativdiscriminante von K aufzusuchen und die Zerlegung der Primideale des Grundkörpers k im Oberkörper K aufzufinden. Wir trennen zu diesem Zweck die Primideale des Grundkörpers k in zwei Kategorieen, nämlich in solche, die zu dem Ideal $\mathfrak{l} = (1-\zeta)$ relativ prim sind und solche, die in $\mathfrak{l}$ aufgehen. Bezüglich der ersteren gilt folgendes:

Satz 6. Es sei $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{l}$ primes Primideal in k. Geht dann $\mathfrak{p}$ genau zur a^{ten} Potenz in μ auf und ist erstens $a \not\equiv 0\ (l)$, so geht $\mathfrak{p}$ in der Relativdiscriminante von K auf. Das Primideal $\mathfrak{p}$ wird dann in K die l^{te} Potenz eines ambigen Primideals:

$$\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{P}^l.$$

Ist zweitens $a \equiv 0\ (l)$, so geht $\mathfrak{p}$ in der Relativdiseriminante von K nicht auf. Wir können dann $a = 0$ annehmen, da wir, ohne den Körper K zu ändern, μ

www.libtool.com.cn

durch eine geeignete Zahl μ^* ersetzen können, die zu $\mathfrak{p}$ prim ist. Es zerfällt in diesem Falle $\mathfrak{p}$ in das Produkt von l verschiedenen Primidealen in K oder bleibt auch in K Primideal, je nachdem

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \text{ oder } \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1.$$

Die Beweise für diese Behauptungen beruhen auf ganz analogen Ueberlegungen, wie sie Hilbert in Rel. quadr. Z. § 4 und § 5 angestellt hat. Ich gehe deshalb nicht weiter darauf ein. Ausführlicher muss ich dagegen bei der zweiten Categorie von Primidealen, die in $\mathfrak{l}$ aufgehen, verweilen. Für diese werden die in Betracht kommenden Verhältnisse durch die folgenden Sätze klargelegt.

Satz 7. Ist $\mathfrak{l}_1$ ein in $\mathfrak{l}$ genau zur l_1^{ten} Potenz aufgehendes Primideal in k, das in μ genau zur a^{ten} Potenz aufgeht und ist $a \not\equiv 0\ (l)$, so geht $\mathfrak{l}_1$ in der Relativdiscriminante von K auf und wird in K die l^{te} Potenz eines ambigen Primideals.

Die Ueberlegungen zum Beweise dieses Satzes unterscheiden sich nicht von denen, die für die zu $\mathfrak{l}$ primen Primideale gelten.

Ist $a \equiv 0\ (l)$, so kann man wieder $a = 0$ annehmen. Wir setzen daher im Folgenden voraus, dass μ zu $\mathfrak{l}_1$ relativ prim ist. Es gilt dann:

Satz 8. (Hülfssatz). Ist $\mathfrak{l}_1$ ein in $\mathfrak{l}$ genau zur l_1^{ten} Potenz aufgehendes Primideal in k und μ zu $\mathfrak{l}_1$ relativ prim, so geht $\mathfrak{l}_1$ in der Relativdiscriminante nicht auf, wenn eine Congruenz

$$\mu \equiv \alpha^l \quad (\mathfrak{l}_1^{u_1})$$

erfüllt ist, wo α eine ganze Zahl in k bedeutet.

Beweis: Es sei λ_1 eine durch $\mathfrak{l}_1$, aber nicht durch $\mathfrak{l}_1^2$ teilbare ganze Zahl in k, ferner sei ϱ eine ganze Zahl in k, die durch $\frac{\lambda_1}{\mathfrak{l}_1}$ teilbar ist und zu $\mathfrak{l}_1$ relativ prim ist. Es ist dann, wenn wir

$$A = \left(\frac{\varrho}{\lambda_1}\right)^{l_1} \quad (\alpha - \sqrt[l]{\mu})$$

setzen, A eine ganze Zahl in K, da die aus A und den zu A relativ conjugierten Zahlen gebildeten symmetrischen Funktionen ganze Zahlen in k sind, wenn die Congruenz

$$\alpha^l \equiv \mu \quad (\mathfrak{l}_1^{l_1})$$

gilt. Die Relativdiscriminante der Zahl A ist nun

$$\left[\left(\frac{\varrho}{\lambda_1}\right)^{u_1} \cdot \mu \cdot (1-\zeta)^l\right]^{(\alpha-1)},$$

also zu $\mathfrak{l}_1$ prim. Folglich ist auch die Relativdiscriminante von K zu $\mathfrak{l}_1$ prim.

www.libtool.com.cn

Satz 9. (Hülfssatz). Ist der grösste Exponent e, für den eine Congruenz

$$\mu \equiv \alpha^l \quad (\mathfrak{l}_1^e)$$

besteht, kleiner als $l_1 l$ und incongruent Null nach l, so geht $\mathfrak{l}_1$ in der Relativdiscriminante von K auf.

Beweis: Ist

$$e = rl + s \qquad r \leqq l_1 - 1 \qquad 0 < s < l$$

so kann die Zahl $\alpha - M$, wo M gleich $\sqrt[l]{\mu}$ ist, höchstens durch $\mathfrak{l}_1^r$ teilbar sein. Daraus folgt, dass die Zahl:

$$B = (\alpha - M) \cdot \left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^r$$

eine ganze, nicht durch $\mathfrak{l}_1$ teilbare Zahl in K ist. Anderseits kann B nicht zu $\mathfrak{l}_1$ teilerfremd sein, da die Relativnorm von B durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar ist. Es sei der grösste gemeinsame Idealteiler von $\mathfrak{l}_1$ und B gleich $\mathfrak{L}_1$, dann ist $\mathfrak{L}_1 = S\mathfrak{L}_1$, wie aus der folgenden Gleichung sich ergiebt:

$$(\alpha - \xi M)\left(\frac{\varrho}{\lambda_1}\right)^r = (\alpha - M)\left(\frac{\varrho}{\lambda_1}\right)^r + (1-\xi) \cdot \left(\frac{\varrho}{\lambda_1}\right)^r \cdot M.$$

Da r kleiner als l_1 ist, ist der zweite Bestandteil der rechten Seite dieser Gleichung eine durch $\mathfrak{l}_1$ teilbare ganze Zahl, also in der That $\mathfrak{L}_1 = S\mathfrak{L}_1$. Hieraus folgt, dass $\mathfrak{L}_1$ ein ambiges Ideal in k ist, mithin $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{L}_1^l$ ein Faktor der Relativdiscriminante von K.

Wenn das Primideal $\mathfrak{l}_1$ in der Relativdiscriminante nicht aufgeht, so sind bezüglich des Verhaltens von $\mathfrak{l}_1$ in K noch 2 Fälle denkbar, entweder zerfällt $\mathfrak{l}_1$ in l von einander verschiedene Primfaktoren in K oder es bleibt auch in K Primideal. Um diese beiden Fälle zu trennen, beweisen wir die folgenden Sätze:

Satz 10. (Hülfssatz). Das Ideal $\mathfrak{l}_1$ zerfällt dann und nur dann in l verschiedene Primfaktoren in K, wenn eine Congruenz

$$\mu \equiv \alpha^l \quad (\mathfrak{l}_1^{u_1+1})$$

besteht, wo α eine ganze Zahl in k bedeutet.

Zum Beweise nehmen wir erstens an, es zerfalle $\mathfrak{l}_1$ in l verschiedene Primfaktoren in K

$$\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{L}_1 \cdot S\mathfrak{L}_1 \cdot S^2\mathfrak{L}_1 \cdot \ldots \cdot S^{l-1}\mathfrak{L}_1$$

und weisen dann das Bestehen der angeführten Congruenz nach. Bezeichnet allgemein N die Norm in K, n die Norm in k, so folgt aus der Gleichung

$$N(\mathfrak{L}_1) = n(\mathfrak{l}_1),$$

dass jede Zahl in K nach $\mathfrak{L}_1$ einer Zahl in k congruent ist. Sei nun etwa

www.libtool.com.cn

$$M \equiv \alpha_1 \ (\mathfrak{L}_1), \text{ so ist}$$
$$\mu \equiv \alpha_1^l \ (\mathfrak{L}_1), \text{ also auch}$$
$$\mu \equiv \alpha_1^l \ (\mathfrak{l}_1).$$

Da anderseits $\mathfrak{l}_1$, wenn die angegebene Zerlegung stattfindet, nicht in der Relativdiscriminante von K aufgeht, so muss nach Satz 9 auch

$$\mu \equiv \alpha_1^l \ (\mathfrak{l}_1^l) \quad \text{sein.}$$

Haben dann λ_1 und ϱ die Bedeutung wie in Satz 8, so ist

$$(M - \alpha_1) \frac{\varrho}{\lambda_1}$$

eine ganze Zahl in K und als solche einer ganzen Zahl β in k nach $\mathfrak{L}_1$ congruent:

$$(M - \alpha_1) \cdot \frac{\varrho}{\lambda_1} \equiv \beta \ (\mathfrak{L}_1)$$

oder

$$(M - \alpha_1) \ \varrho \equiv \beta \lambda_1 \ (\mathfrak{l}_1 \mathfrak{L}_1)$$

d. h. es gilt, wenn man α_2 geeignet bestimmt,

$$M - \alpha_2 \equiv 0 \ (\mathfrak{l}_1 \mathfrak{L}_1).$$

Durch Uebergang zu den relativconjugierten Zahlen findet man:

$$\xi M - \alpha_2 \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}_1 S\mathfrak{L}_1)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\xi^{g-1} M - \alpha_2 \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}_1 S^{g-1} \mathfrak{L}_1).$$

Aus der Gesamtheit der Congruenzen folgt:

$$\mu \equiv \alpha_2^l \quad (\mathfrak{l}_1^{l+1})$$

und deshalb wieder nach Satz 9

$$\mu \equiv \alpha_2^l \ (\mathfrak{l}_1^{2l}).$$

Dies Verfahren können wir fortsetzen. Sei etwa

$$\mu \equiv \alpha_e^l \ (\mathfrak{l}_1^{el}), \quad \text{wo } e \leqq l_1.$$

Es ist dann

$$(M - \alpha_e) \cdot \left(\frac{\varrho}{\lambda_1}\right)^e \quad \text{eine ganze Zahl in } K.$$

Wir folgern daraus genau wie vorhin die Existenz einer ganzen Zahl α_{e+1}, sodass

$$\mu \equiv \alpha_{e+1}^l \quad (\mathfrak{l}_1^{le+1}).$$

Aus dem Bewiesenen folgt dann offenbar, dass unter der gemachten Voraussetzung stets eine ganze Zahl α in k existieren muss, so dass

www.libtool.com.cn

$$\mu \equiv \alpha^{l} \quad (\mathfrak{l}_1^{l_1+1}).$$

Setzen wir umgekehrt voraus, dass

$$\mu \equiv \alpha^{l} \quad (\mathfrak{l}_1^{l_1+1}),$$

so sind die Zahlen

$$(\zeta^i M - \alpha) \cdot \left[\frac{\varrho}{\lambda_1}\right]^{l_1} \qquad i = 0, 1, 2 \ldots l-1$$

ganze Zahlen in K, die nicht durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar sind. Denn wäre eine von ihnen durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar, so müssten alle durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar sein und folglich auch die Differenz von irgend zweien unter ihnen, was gegen die Annahme ist, dass $\mathfrak{l}$ höchstens durch die l_1^{ste} Potenz von $\mathfrak{l}_1$ teilbar ist. Andererseits muss sicher eine unter ihnen mit $\mathfrak{l}_1$ einen gemeinsamen Teiler haben, da das Produkt der genannten Zahlen durch $\mathfrak{l}_1$ teilbar ist. Hieraus ergiebt sich dann sofort, dass $\mathfrak{l}_1$ in K das Produkt von l verschiedenen Primidealen wird.

Wir haben jetzt noch den Fall zu erledigen, dass $\mathfrak{l}_1$ im Körper K Primideal bleibt.

Zu diesem Zweck stellen wir die Zahlen des Körpers K in der Form

$$A = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 M + \alpha_2 M^2 + \cdots \alpha_{l-1} M^{l-1}}{\beta}$$

dar, wo die Zahlen $\alpha_0, \alpha_1 \ldots, \alpha_{l-1}, \beta$, ganze Zahlen des Körpers k bedeuten, von denen wir annehmen, dass sie nicht sämtlich einen gemeinsamen Teiler haben; β nennen wir kurz den Nenner der Zahl A. Es gilt dann der folgende Hülfssatz.

Satz 11. (Hülfssatz). Es sei $\mathfrak{l}_1$ unzerlegbar in K und es sei M ein Modul in K, der alle diejenigen Zahlen

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 M + \alpha_2 M^2 + \cdots \alpha_{l-1} M^{l-1}}{\beta}$$

umfasst, bei denen β durch keine höhere Potenz von $\mathfrak{l}_1$ als $\mathfrak{l}_1^{l_1-1}$ teilbar ist. Jede Zahl des Moduls M ist dann nach $\mathfrak{l}_1$ einer ganzen Zahl in k congruent.

Beweis: Es mögen die Zahlen

$$A_0, A_1, \ldots A_r$$

des Moduls M ein volles Restsystem nach $\mathfrak{l}_1$ incongruenter Zahlen für den Modul M bilden und es mag die höchste Potenz von $\mathfrak{l}_1$, die bei der angegebenen Art der Darstellung in den Nennern der Zahlen A aufgeht, $\mathfrak{l}_1^e$ sein, wo $0 \leqq e \leqq l_1 - 1$ ist. Ich behaupte dann, dass auch die Zahlen

$$A_0', A_1', \ldots A_r'$$

ein volles Restsystem nach $\mathfrak{l}_1$, für den Modul M bilden, und dass die höchste Potenz von $\mathfrak{l}_1$, die in den Nennern dieser Zahlen aufgeht $\mathfrak{l}_1^{e'}$ ist, wo

$$e' < e \text{ ist, wenn } e > 0 \text{ ist.}$$

www.libtool.com.cn

Zu diesem Zweck weisen wir zunächst nach, dass die Zahlen A^i nach $\mathfrak{l}_1$ incongruent sind. Wäre nämlich

$$A_i^l \equiv A_k^l \quad (\mathfrak{l}_1)$$

so müsste, da $\mathfrak{l}_1$ in K unzerlegbar ist,

$$A_i \equiv \zeta^a A_k \quad (\mathfrak{l}_1) \text{ sein,}$$

wo a eine ganze rationale Zahl bedeutet.

Da nun $\zeta^a A_k \equiv A_k \quad (\mathfrak{l}_1)$, so würde folgen

$$A_i \equiv A_k \quad (\mathfrak{l}_1) \text{ gegen die Voraussetzung.}$$

Es sind daher die Zahlen A^i in der That nach $\mathfrak{l}_1$ incongruent und bilden infolgedessen ein volles Restsystem nach $\mathfrak{l}_1$ für den Modul M. Um zweitens einzusehen, dass $e' < e$ ist, wenn $e > 0$ ist, beachte man, dass, wenn

$$A_i = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 M + \alpha_2 M^2 + \cdots \alpha_{l-1} M^{l-1}}{\beta} \text{ ist,}$$

A_i^l sich in der Form darstellen lässt:

$$A_i^l = \frac{\alpha_0^l + \alpha_1^l \mu + \alpha_2^l \mu^2 + \cdots \alpha_{l-1}^l \mu^{l-1}}{\beta^l} + \frac{lB}{\beta^l} = \frac{\varrho}{\sigma} + \frac{lB}{\beta^l}$$

wo B eine ganze Zahl in K bedeutet, die ohne Nenner darstellbar ist. Ist nun β genau durch $\mathfrak{l}_1^{e_1}$ teilbar, wo $e_1 \leqq e$ ist und ist

$$e_1 l \leqq l_1 (l-1),$$

so ist der Bruch $\frac{lB}{\beta^l}$ offenbar so darstellbar, dass im Nenner eine ganze Zahl aus k steht, die zu $\mathfrak{l}_1$ relativ prim ist. Dasselbe gilt von $\frac{\varrho}{\sigma}$ und folglich auch von A_i^l.

Ist aber $e_1 l > l_1 (l-1)$, so ist doch

$$e_1 l - l_1 (l-1) < e_1 \leqq e, \text{ weil}$$

$$l_1 - e_1 < l (l_1 - e_1), \text{ wenn } l_1 > e_1,$$

was nach Voraussetzung der Fall ist. Daraus folgt dann, dass $\frac{lB}{\beta^l}$ als Bruch darstellbar ist, dessen Nenner eine ganze Zahl aus k ist, die höchstens durch $\mathfrak{l}_1^{e'}$ teilbar ist, wo $e' < e$. Dasselbe gilt dann von A_i^l. Wenn wir das angewandte Verfahren nun mit dem neuen Restsystem

$$A_0^l, \; A_1^l, \; \ldots \; A_r^l$$

fortsetzen, indem wir wieder die l^{ten} Potenzen bilden, so gelangen wir schliesslich zu einem Restsystem

www.libtool.com.cn

$$B_0,\ B_1,\ \ldots\ B_r$$

dessen Zahlen mit zu $\mathfrak{l}_1$ primen Nennern, also auch ohne Nenner darstellbar sind. Bilden wir dann noch einmal die l^{ten} Potenzen

$$B_0^l,\ B_1^l,\ \ldots\ B_r^l$$

so sind auch alle diese Zahlen wieder nach $\mathfrak{l}_1$ einander incongruent. Ist nun

$$B_i^l = (\beta_0 + \beta_1 M + \cdots \beta_{l-1} M^{l-1})^l,$$

so wird

$$B_i^l \equiv \beta_0^l + \beta_1^l \mu + \cdots \beta_{l-1}^l \mu^{l-1} \quad (\mathfrak{l}_1).$$

Daraus folgt dann aber, dass alle Zahlen B^l und somit alle Zahlen des Moduls M nach $\mathfrak{l}_1$ einer ganzen Zahl aus k congruent sind.

Unter Benutzung des letzten Hülfssatzes können wir jetzt den folgenden Satz ableiten:

Satz 12. (Hülfssatz). Ist $\mathfrak{l}_1$ ein in $\mathfrak{l}$ zur l_1^{ten} Potenz aufgehendes Primideal in k und bleibt $\mathfrak{l}_1$ auch in K Primideal, so giebt es eine ganze Zahl α in k, die der Congruenz

$$\mu \equiv \alpha^l \quad (\mathfrak{l}_1^{l'_1}) \quad \text{genügt.}$$

Beweis: Die Zahl M gehört dem in Satz 11 betrachteten Modul M an, und ist deshalb einer ganzen Zahl α_1 in k nach $\mathfrak{l}_1$ congruent. Folglich haben wir die Congruenzen:

$$\begin{aligned} M - \alpha_1 &\equiv 0 \quad (\mathfrak{l}_1) \\ SM - \alpha_1 &\equiv 0 \quad (\mathfrak{l}_1) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ S^{l-1} M - \alpha_1 &\equiv 0 \quad (\mathfrak{l}_1), \end{aligned}$$

aus denen folgt

$$\mu \equiv \alpha_1^l \quad (\mathfrak{l}_1^l).$$

Es möge nun die Congruenz

$$\mu \equiv \alpha_e^l \quad (\mathfrak{l}_1^{el}) \quad \text{erfüllt sein,}$$

wo $e \leqq l_1 - 1$.

Es giebt dann, wie wir zeigen wollen, eine Zahl α_{e+1}, die der Congruenz

$$\mu \equiv \alpha_{e+1}^l \quad (\mathfrak{l}_1^{l(e+1)})$$

genügt. Haben ϱ und λ_1 die bereits früher erklärte Bedeutung, so ist die Zahl

$$(M - \alpha_e) \cdot \left(\frac{\varrho}{\lambda_1}\right)^e$$

eine ganze Zahl, die dem im vorigen Satze betrachteten Modul M angehört und ist als solche einer ganzen Zahl β_e aus k nach $\mathfrak{l}_1$ congruent:

www.libtool.com.cn

$$(M-\alpha_s)\cdot\left(\frac{\varrho}{\lambda_1}\right)^s \equiv \beta_s \quad (\mathfrak{l}_1), \quad \text{folglich}$$

$$(M-\alpha_s)\cdot\varrho^s \equiv \beta_s\cdot\lambda_1^s \quad (\mathfrak{l}_1^{s+1}).$$

Es giebt daher eine ganze Zahl α_{s+1} in k,

sodass $$M-\alpha_{s+1} \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}_1^{s+1}).$$

Hieraus folgt dann wieder

$$SM-\alpha_{s+1} \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}^{s+1})$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$S^{q-1}M-\alpha_{s+1} \equiv 0 \quad (\mathfrak{l}_1^{s+1})$$

und somit besteht endlich die Congruenz

$$\mu \equiv \alpha_{s+1}^l \quad (\mathfrak{l}_1^{l(s+1)}).$$

Durch genügende Fortsetzung des Verfahrens gelangen wir dann schliesslich zu dem Resultat, dass eine Congruenz

$$\mu \equiv \alpha^l \quad (\mathfrak{l}_1^{l'_1})$$

bestehen muss, wo α eine ganze Zahl in k bedeutet.

Die in den letzten Sätzen abgeleiteten Resultate können wir in dem folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 13. Ist die ganze Zahl μ in k zu $\mathfrak{l}_1$ relativ prim und $\mathfrak{l}_1$ ein Primideal in k, das in $\mathfrak{l}$ genau zu l_1^{ten} Potenz aufgeht, so können bezüglich des höchsten Exponenten e, für den eine Congruenz

$$\mu \equiv \alpha^l \quad (\mathfrak{l}_1^e)$$

erfüllt ist, wo α eine ganze Zahl in k ist, 3 Fälle eintreten

$$1)\ e < ll_1 \qquad 2)\ e = ll_1 \qquad 3)\ e > ll_1.$$

Im ersten Falle geht $\mathfrak{l}_1$ in der Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ auf und wird in K die l^{te} Potenz eines ambigen Ideals. Im zweiten und dritten Falle geht $\mathfrak{l}_1$ in der Relativdiscriminante von K nicht auf und bleibt im zweiten Falle Primideal in K, während es im dritten Falle in l verschiedene Primfaktoren zerfällt.

§ 3.

Das Symbol $\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{p}}\right)$.

Definition 4. Sind ν und μ zwei beliebige ganze Zahlen in k und $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{l}$ primes Primideal in k, das in μ zur a^{ten} und in ν zur b^{ten} Potenz auf-

www.libtool.com.cn

geht, so bilde man den Bruch $\frac{\nu^a}{\mu^b}$ und bringe ihn in die Gestalt $\frac{\varrho}{\sigma}$, wo ϱ und σ zwei ganze nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbare Zahlen in k sind. Wir definieren dann

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\sigma}{\mathfrak{p}}\right)^{-1}.$$

Das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)$ ist durch diese Festsetzung eindeutig als eine l^{te} Einheitswurzel definiert. (Hilbert A. Z. § 131. S. 411). Es gelten für dasselbe die folgenden Formeln:

Satz 14. Bedeuten $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1, \mu^*, \nu^*, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen in k und ist $\mathfrak{p}$ ein zu l primes Primideal in k, so gilt

1) $\left(\frac{\mu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1$

2) $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{p}}\right) = 1$

3) $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\nu_1, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu\nu_1, \mu}{\mathfrak{p}}\right)$

$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\nu, \mu_1}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu, \mu\mu_1}{\mathfrak{p}}\right)$

4) $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu^*, \mu^*}{\mathfrak{p}}\right)$, wenn $\frac{\nu}{\nu^*} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^l$, $\frac{\mu}{\mu^*} = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^l$.

Beweis: Die Gleichungen 1) und 2) folgen unmittelbar aus der Definition des Symbols. Um die erste Gleichung 3) zu beweisen, nehmen wir an, es gehe $\mathfrak{p}$ in μ zur a^{ten}, in ν zur b^{ten} und in ν_1 zur b_1^{ten} Potenz auf. Es sei dann:

$$\frac{\nu^a}{\mu^b} = \frac{\varrho}{\sigma}, \quad \frac{\nu_1^a}{\mu^{b_1}} = \frac{\varrho_1}{\sigma_1}, \quad \frac{(\nu\nu_1)^a}{\mu^{b+b_1}} = \frac{\varrho\varrho_1}{\sigma\sigma_1}$$

wo $\varrho, \sigma, \varrho_1$ und σ_1, also auch $\varrho\varrho_1$ und $\sigma\sigma_1$ zu $\mathfrak{p}$ prim sind.

Es ist dann:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\nu_1, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\sigma}{\mathfrak{p}}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\varrho_1}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\sigma_1}{\mathfrak{p}}\right)^{-1} = \left(\frac{\varrho\varrho_1}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\sigma\sigma_1}{\mathfrak{p}}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{\nu\nu_1, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varrho\varrho_1}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\sigma\sigma_1}{\mathfrak{p}}\right)^{-1}.$$

Daraus folgt offenbar:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\nu_1, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu\nu_1, \mu}{\mathfrak{p}}\right),$$ also das Bestehen

der ersten Gleichung 3). Die zweite Gleichung 3) ergiebt sich dann mit Hülfe

www.libtool.com.cn

von 2). Die Richtigkeit der Gleichung 4) endlich sieht man ein, wenn man beachtet, dass:

$$\left(\frac{\nu, \alpha^l}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)^l = 1, \text{ also } \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu, \mu\alpha^l}{\mathfrak{p}}\right)$$

Wir haben jetzt den von Hilbert eingeführten Begriff des Normenrestes (A. Z. § 129. S. 402) mit dem eben definierten Symbol in Verbindung zu bringen und beweisen zu diesem Zweck den folgenden fundamentalen Satz.

Satz 15. Sind ν und μ zwei beliebige ganze Zahlen in k und $\mathfrak{p}$ ein zu l primes Primideal in k, so ist ν stets dann und nur dann Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{p}$, wenn

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1 .$$

Beweis: Beim Beweise dieses Satzes gehen wir schrittweise vor, indem wir 4 Fälle unterscheiden.

Vorher bemerken wir noch folgendes. Bezeichnet man mit N_k die Relativnorm einer Zahl aus K genommen in k, und gilt die Congruenz

$$\alpha \equiv N_k(A) \ (\mathfrak{p}),$$

wo α eine ganze zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl aus k, A eine solche aus K bezeichnet, so lässt sich leicht zeigen, dass man stets eine ganze Zahl B in K finden kann, so dass

$$\alpha \equiv N_k(B) \ (\mathfrak{p}^e),$$

wo e ein beliebiger positiver Exponent ist. Ist nämlich A_1 eine ganze Zahl aus K, die der Congruenz

$$AA_1 \equiv 1 \quad (\mathfrak{p}) \quad \text{genügt, so gilt}$$

$$\alpha N_k(A_1) \equiv 1 \quad (\mathfrak{p}).$$

Dann giebt es aber nach Satz 1 eine ganze Zahl β in k, so dass

$$\alpha N_k(A) \equiv \beta^l \quad (\mathfrak{p}^e), \quad \text{also}$$

$$\alpha \equiv N_k(A\beta) \quad (\mathfrak{p}^e) \quad \text{wird.}$$

Nach dieser Vorbemerkung gehen wir zur Behandlung der 4 Fälle über.

Erster Fall. ν und μ sind zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd. Es ist dann stets $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = +1$. Wir haben also nachzuweisen, dass in diesem Falle ν Normenrest von K nach $\mathfrak{p}$ ist. Der Beweis hierfür ist verschieden, je nachdem $\mathfrak{p}$ in K zerlegbar oder unzerlegbar ist.

1) Es zerfalle $\mathfrak{p}$ im Körper K in l verschiedene Primideale

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cdot S\mathfrak{P} \cdots S^{l-1}\mathfrak{P}.$$

Wir lösen dann in K die Congruenzen:

www.libtool.com.cn

$$\left.\begin{aligned} &A_1 + A_2 M + A_3 M^2 + \cdots A_l M^{l-1} \equiv \nu \\ &A_1 + \zeta A_2 M + \zeta^2 A_3 M^2 + \cdots \zeta^{l-1} A_l M^{l-1} \equiv 1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &A_1 + \zeta^{(l-1)} A_2 M + \cdots\cdots \zeta A_l M^{l-1} \equiv 1 \end{aligned}\right\} (\mathfrak{P})$$

die durch folgende Werte der Unbekannten $A_1, A_2, \ldots A_l$ befriedigt werden:

$$\left.\begin{aligned} l A_1 &\equiv \nu + l - 1 \\ l A_2 M &\equiv \nu - 1 \\ l A_3 M^2 &\equiv \nu - 1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ l A_l M^{l-1} &\equiv \nu - 1 \end{aligned}\right\} (\mathfrak{P}).$$

Da nun $N(\mathfrak{P}) = n(\mathfrak{p})$, so ist jede ganze Zahl aus K einer ganzen Zahl aus k nach $\mathfrak{P}$ congruent.

Es sei

$$A_1 \equiv \alpha_1 \qquad A_2 \equiv \alpha_2 \ldots A_l \equiv \alpha_l \quad (\mathfrak{P}).$$

Dann wird

$$\nu \equiv N_k(\alpha_1 + \alpha_2 M + \cdots \alpha_l M^{l-1}) \quad (\mathfrak{P}).$$

Da die Congruenz dann auch nach $\mathfrak{p}$ gilt, so folgt, wenn wir die zu Anfang des Satzes gemachte Bemerkung berücksichtigen, dass ν Normenrest von K nach $\mathfrak{p}$ ist.

2) $\mathfrak{p}$ sei in K unzerlegbar, also $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$.

Es sei dann

$$\alpha_1^l, \alpha_2^l, \ldots \alpha_f^l$$

ein volles System incongruenter zu $\mathfrak{p}$ primer l^{ter} Potenzreste nach $\mathfrak{p}$ in k. Dann lässt sich, da

$$1, \mu, \mu^2 \ldots \mu^{l-1}$$

nach $\mathfrak{p}$ einander incongruent sind, weil $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$, ein volles System incongruenter zu $\mathfrak{p}$ primer Zahlen in k nach $\mathfrak{p}$ so schreiben:

$$\begin{array}{c} \alpha_1^l, \alpha_2^l, \ldots \alpha_f^l \\ \mu\alpha_1^l, \mu\alpha_2^l, \ldots \mu\alpha_f^l \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu^{l-1}\alpha_1^l, \mu^{l-1}\alpha_2^l, \ldots \mu^{l-1}\alpha_f^l. \end{array}$$

Da nun

$$\mu^i \alpha_\varrho^l = N_k(\alpha_\varrho M^i),$$

so ist jede zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl in k, also auch ν, Normenrest von K nach $\mathfrak{p}$.

www.libtool.com.cn

Zweiter Fall. μ sei genau durch $\mathfrak{p}^a$ teilbar, ν zu $\mathfrak{p}$ prim, wobei wir annehmen, dass $a \not\equiv 0\ (l)$, da wir sonst, ohne K zu ändern, μ durch ein zu $\mathfrak{p}$ teilerfremdes μ^* ersetzen könnten. Es ist in diesem Falle nach Definition:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right)^a.$$

Es ist also nachzuweisen:

1) Ist $\left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right) = +1$, so ist ν Normenrest von K nach $\mathfrak{p}$.

2) Ist ν Normenrest von K nach $\mathfrak{p}$, so ist $\left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right) = +1$.

1) Ist $\left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right) = +1$, so ist $\nu \equiv \alpha^l (\mathfrak{p})$, also

$$\nu \equiv N_k(\alpha)\ (\mathfrak{p}).$$

2) Ist $\nu \equiv N_k(A)\ (\mathfrak{p})$,

wo A eine ganze Zahl in K bedeutet, so folgt, da in K

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^l \quad \text{wird},$$

$N(\mathfrak{P}) = n\ (\mathfrak{p})$. Es ist also

$A \equiv \alpha\ (\mathfrak{P})$, wo α eine ganze Zahl in k bedeutet, folglich auch

$$\nu \equiv \alpha^l (\mathfrak{P}), \text{ daher auch nach } (\mathfrak{p}), \text{ d. h. } \left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right) = +1.$$

Dritter Fall. Es sei μ zu $\mathfrak{p}$ prim, ν genau durch $\mathfrak{p}^a$ teilbar, wo wir wieder $a \not\equiv 0\ (l)$ annehmen. Es ist dann

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)^{-a}.$$ Wir haben daher zu zeigen

1) Ist $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, so ist ν Normenrest von K nach $\mathfrak{p}$.

2) Ist ν Normenrest von K nach $\mathfrak{p}$, so ist $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1$.

1) Ist $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = +1$, so zerfällt $\mathfrak{p}$ in K in l verschiedene Primfaktoren:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P} . S\mathfrak{P} . S^2\mathfrak{P} \ldots S^{l-1}\mathfrak{P}.$$

Ist nun A eine ganze Zahl aus K, die genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{P}$ teilbar ist, so ist $\alpha = N_k(A)$ eine ganze Zahl aus k, die genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Bedeutet ferner ϱ eine durch $\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}$ teilbare, zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl, so ist

$$\frac{\nu}{\alpha^a} \cdot \varrho^{al}$$

www.libtool.com.cn

eine ganze Zahl in k, die zu $\mathfrak{p}$ prim ist. Es existiert dann nach Fall 1 eine ganze Zahl P in K, so dass

$$\frac{\nu \varrho^{l\alpha}}{\alpha^{\alpha}} \equiv N_k(P) \ (\mathfrak{p}^{\alpha}).$$

Bestimmt man nun ϱ^* so, dass $\varrho\varrho^* \equiv 1 \ (\mathfrak{p}^{\alpha})$, so folgt

$$\nu \equiv N_k(P A^{\alpha} \varrho^{*\alpha}) \qquad (\mathfrak{p}^{\alpha})$$

d. h. ν ist Normenrest von K nach $\mathfrak{p}$.

2) Ist $\nu \equiv N_k(P) \ (\mathfrak{p}^{\alpha})$, so wird

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}, P) \ (\mathfrak{p}, SP) \ldots (\mathfrak{p}, S^{l-1}P)$$

und folglich ist, da $\mathfrak{p}$ in der Relativdiscriminante von K nicht aufgeht, nach Satz 6 $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = +1$.

Vierter Fall. Es sei μ durch $\mathfrak{p}^{\alpha}$, ν durch $\mathfrak{p}^{\beta}$ teilbar, wobei wir $\alpha \not\equiv 0 \ (l)$ annehmen. Wir bestimmen dann zunächst c so, dass $b + ac = ld$ wird, wo c und d ganze rationale Zahlen bedeuten.

Ist nun $$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = +1, \text{ so ist auch } \left(\frac{\nu \mu^{\alpha}, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

(Satz 14, Formel 1 und 3).

Wenn wir daher π so wählen, dass es genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar ist und ϱ so, dass es durch $\frac{\pi}{\mathfrak{p}}$ teilbar ist und zu $\mathfrak{p}$ prim, so ist $\nu\mu \cdot \left(\frac{\varrho}{\pi}\right)^{ld}$ eine ganze Zahl in k, die zu $\mathfrak{p}$ prim ist, und da

$$\left(\frac{\nu \mu^{\alpha} \cdot \left(\frac{\varrho}{\pi}\right)^{ld}, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1,$$

so ist $\nu \mu^{\alpha} \left(\frac{\varrho}{\pi}\right)^{dl}$ und folglich auch ν selbst Normenrest von K nach $\mathfrak{p}$. Entsprechend wird der umgekehrte Schluss ausgeführt. Aus dem eben Bewiesenen und aus der Definition des Symbols $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)$ ergiebt sich leicht der folgende Satz.

Satz 16. Ist $\mathfrak{p}$ ein zu l primes Primideal in k, das nicht in der Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ aufgeht, so ist jede zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl in k Normenrest des Körpers K nach $\mathfrak{p}$.

Geht dagegen $\mathfrak{p}$ in der Relativdiscriminante von K auf und ist e ein beliebiger positiver Exponent, so sind von allen nach $\mathfrak{p}^{\alpha}$ einander incongruenten zu $\mathfrak{p}$ primen Zahlen genau der l^{te} Teil Normenreste des Körpers K nach $\mathfrak{p}$.

www.libtool.com.cn

II.

Die ambigen Complexe des Körpers K.

Wir machen für die folgenden Entwickelungen die specielle Annahme, dass die Klassenzahl h des Körpers k nicht durch l teilbar ist.

§ 4.

Die relativen Grundeinheiten des Körpers K.

Indem ich wegen der Definition eines Systems relativer Grundeinheiten von K inbezug auf k und wegen des Beweises ihrer Existenz auf Hilbert A. Z. § 55 verweise, führe ich der Vollständigkeit halber hier noch 2 Hülfssätze über dieselben an, deren Beweis man bei Hilbert A. Z. § 146 nachlesen kann.

Satz 17. (Hülfssatz). Ist $H_1, \ldots H_{m'}$, ein System von relativen Grundeinheiten des Körpers K in bezug auf k, wo $m' = \frac{m(l-1)}{2}$, da der Körper k mit allen seinen conjugierten Körpern imaginär ist, dann gilt für eine beliebige Einheit E in K jedesmal eine Gleichung von der Gestalt

$$E^f = H_1^{F_1(S)} \ldots H_{m'}^{F_{m'}(S)} \cdot [\varepsilon]$$

wo f ein ganzer rationaler, nicht durch l teilbarer Exponent ist, $F_1(S) \ldots F_{m'}(S)$ ganze ganzzahlige Funktionen von S bezeichnen, und $[\varepsilon]$ eine Einheit in k oder die l^{te} Wurzel einer Einheit in k bedeutet, letzteres nur dann, wenn μ das Produkt aus einer Einheit und der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k ist.

Satz 18. (Hülfssatz). Ist

$$\eta_1 = N_k(H_1) \ldots \eta_{m'} = N_k(H_{m'}),$$

dann lässt sich jede Einheit ε in k, welche Relativnorm einer Einheit E in K ist, in der Gestalt

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \ldots \eta_{m'}^{u_{m'}} [\varepsilon]^l$$

darstellen, wo $u_1, \ldots u_{m'}$ ganzzahlige Exponenten sind und von $[\varepsilon]$ dasselbe gilt wie im vorigen Satze.

§ 5.

Die ambigen Complexe des Körpers K.

Fasst man den Begriff der ambigen Idealclasse und des ambigen Complexes wie bei Hilbert, Rel. quadr. Z. Definition 8 u. 9 S. 22 u. 23, so gilt auch in

www.libtool.com.cn

unserem Falle, dass jeder Complex P, der eine ambige Classe A enthält, ein ambiger Complex ist, der, wie wir sagen wollen, aus A entspringt. Enthält speciell die ambige Classe ein ambiges Ideal $\mathfrak{A}$, so soll der Complex aus dem ambigen Ideal $\mathfrak{A}$ entsprungen heissen. Mit der Anzahl der Complexe der letzteren Art haben wir uns zunächst zu beschäftigen, indem wir folgenden Satz beweisen:

Satz 19. Ist die Anzahl aller ambigen Ideale des Körpers K gleich l^t und machen die sämmtlichen Einheiten in k, die Relativnormen von Einheiten in K sind, l^{v^*} Einheitenverbände aus, so gilt, wenn wir die Anzahl aller ambigen Complexe, die aus ambigen Idealen entspringen, mit l^{a^*} bezeichnen, für a^* die Ungleichung:

$$a^* \leqq t + v^* - m' - 1 \qquad \left(m' = \frac{m(l-1)}{2}\right).$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass die Zahl μ, die den Körper K bestimmt, nicht das Produkt einer Einheit in k mit der l^{ten} Potenz einer Zahl in k ist.

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, liegt die im § 4 erwähnte Einheit $[\varepsilon]$ stets in k und jede Einheit ε in k, die Relativnorm einer Einheit in K ist, ist dann in der Form darstellbar

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \ldots \eta_{m'}^{u_{m'}} \xi^l$$

wo ξ eine Einheit aus k ist, $\eta_1 \ldots \eta_{m'}$ die im § 4 angegebene Bedeutung haben und $u_1 \ldots u_{m'}$ irgend welche Zahlen $0, 1, 2 \ldots l-1$ sind.

Da nun zusammen l^{v^*} Einheitenverbände von Einheiten der bezeichneten Art existieren, so muss man unter den Einheiten $\eta_1 \ldots \eta_{m'}$ v^* auswählen können, etwa $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{v^*}$, so dass jede Einheit ε in k, die Relativnorm einer Einheit in K ist, sich eindeutig in die Gestalt bringen lässt

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \ldots \eta_{v^*}^{u_{v^*}} \qquad (u_1, u_2, \ldots u_{v^*} = 0, 1, \ldots l-1).$$

Wendet man dies auf die Einheiten η_i $(i = v^*+1, \ldots m')$ an, so ergiebt sich:

$$\eta_i = \eta_1^{u_1^{(i)}} \ldots \eta_{v^*}^{u_{v^*}^{(i)}} \; (\xi^{(i)})^l,$$

wo $\xi^{(i)}$ eine Einheit aus k ist und die Exponenten bestimmte Werte $0, 1, \ldots l-1$ haben. Daraus folgt, dass die $m' - v^*$ Ausdrücke:

$$H_i' = H_i H_1^{-u_1^{(i)}} \ldots H_{v^*}^{-u_{v^*}^{(i)}} \; (\xi^{(i)})^{-1} \tag{1}$$

Einheiten in K mit der Relativnorm 1 sind und dass man deshalb nach Satz 90 in A. Z. S. 272

$$H_i' = M_i^{(1-s)} \tag{2}$$

setzen kann, wo M_i eine ganze Zahl aus K bedeutet. Die Ideale (M_i) und $(M) = (\sqrt[l]{\mu})$ sind dann mit ihren relativ conjugierten Idealen identisch und

www.libtool.com.cn

darum Produkte aus den ambigen Primidealen in K, die wir mit $\mathfrak{D}_1, \ldots \mathfrak{D}_t$ bezeichnen, und Idealen aus k:

$$(3)\qquad \begin{aligned}(M) &= \mathfrak{D}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{D}_t^{a_t}\,\mathfrak{j}\\ (M_i) &= \mathfrak{D}_1^{a_1^{(i)}} \cdots \mathfrak{D}_t^{a_t^{(i)}}\,\mathfrak{j}^{(i)}\\ (i &= v^*+1, \cdots, m').\end{aligned}$$

Wir wollen nun nachweisen, dass diese Relationen von einander unabhängig sind, das heisst, dass keine Beziehung:

$$(4)\qquad (M)^e (M_{v^*+1})^{e_{v^*+1}} \cdots (M_{m'})^{e_{m'}} = \mathfrak{j}^*$$

besteht, wo die Exponenten $e, e_{v^*+1} \cdots e_{m'}$ irgendwelche Werte $0, 1, \cdots l-1$ haben und $\mathfrak{j}^*$ ein Ideal aus k ist, ausser wenn $e = e_{v^*+1} = e_{m'} = 0$ und $\mathfrak{j}^* = 1$ ist. Zu diesem Zweck erheben wir (4) in die h^{te} Potenz und erhalten

$$(5)\qquad M^{ea} M_{v^*+1}^{e_{v^*+1}h} \cdots M_{m'}^{e_{m'}h} = iE,$$

wo i eine ganze Zahl aus k und E eine Einheit aus K ist. Indem wir (5) symbolisch mit $(1-S)$ potenzieren, erhalten wir:

$$(M^{(1-S)})^{ea} (M_{v^*+1}^{(1-S)})^{e_{v^*+1}h} \ldots (M_{m'}^{(1-S)})^{e_{m'}h} = E^{(1-S)}$$

oder nach (2)

$$(6)\qquad \zeta^{ea} (H'_{v^*+1})^{e_{v^*+1}h} \ldots (H'_{m'})^{e_{m'}h} = E^{(1-S)}.$$

Indem wir in (6) die Beziehungen (1) einführen und die Definition des Systems relativer Grundeinheiten beachten, erkennen wir, da auf der rechten Seite von (6) die symbolische $(1-S)^{te}$ Potenz einer Einheit steht, dass

$$e_{v^*+1} = \cdots e_{m'} = 0 \quad \text{sein muss.}$$

Es ist also jetzt noch zu zeigen, dass auch $e = 0$ sein muss. Aus (5) folgt

$M^{ea} = iE$, oder wenn man mit l potenziert

$$\mu^{ea} = i^l \cdot E^l.$$

Da nun E^l eine Einheit in k sein muss, so ergiebt sich aus unserer speciellen Voraussetzung über μ, dass $e = 0$ sein muss. Es kann daher keine Relation von der Gestalt (4) bestehen. Dann folgt aber, dass man mit Hülfe der Gleichungen (3) $m' - v^* + 1$ Ideale $\mathfrak{D}$ durch die übrigen ausdrücken kann.

Wenn nun zwischen den noch übrigen $t - m' + v^* - 1$ Idealen $\mathfrak{D}$ keine Relation von der Art (3) mehr besteht, so wird offenbar

$$a^* = t + v^* - m' - 1.$$

In jedem Falle ist aber:

www.libtool.com.cn

$$a^* \leqq t + v^* - m' - 1.$$

In dem ausgenommenen Falle, dass μ das Produkt einer Einheit ε und der l^{ten} Potenz einer Zahl aus k ist, erhält man durch Vermittelung der Einheit $\sqrt[l]{\varepsilon}$ eine Relation von der Art (3). Es ergeben sich dann genau wie vorher $m' - v^* + 1$ unabhängige Relationen zwischen den Idealen $\mathfrak{D}$ und für a^* demnach dieselbe Ungleichung.

Wir dehnen jetzt unser Resultat auf beliebige ambige Complexe des Körpers K aus durch Beweis des folgenden Satzes:

Satz 20. Ist die Anzahl aller ambigen Ideale des Körpers K gleich l^t und machen die Einheiten in k, welche Relativnormen von Einheiten oder gebrochenen Zahlen in K sind, zusammen l^v Einheitenverbände aus, so gilt, wenn wir die Anzahl aller ambigen Complexe in K mit l^a bezeichnen:

$$a \leqq t + v - m' - 1 \qquad \left(m' = \frac{m(l-1)}{2}\right).$$

Beweis: Behalten wir die Bezeichnungen des vorigen Satzes bei, so treten zu den v^* Einheiten $\eta_1, \ldots \eta_{v^*}$ noch $v - v^*$ Einheiten $\vartheta_1, \ldots \vartheta_{v-v^*}$ hinzu, die Relativnormen von gebrochenen Zahlen in K sind:

$$\vartheta_1 = N_k(\Theta_1) \ldots \vartheta_{v-v^*} = N_k(\Theta_{v-v^*}),$$

so dass jede Einheit ε in k, die Relativnorm einer ganzen oder gebrochenen Zahl in K ist, eindeutig in die Form

$$\varepsilon = \eta_1^{e_1} \cdots \eta_{v^*}^{e_{v^*}} \cdot \vartheta_1^{f_1} \cdots \vartheta_{v-v^*}^{f_{v-v^*}} \xi^l$$

gebracht werden kann, wo die Exqonenten $e_1, \cdots e_{v^*}$, $f_1, \cdots f_{v-v^*}$ gewisse Werte $0, 1, \cdots l-1$ haben und ξ eine Einheit aus k bedeutet, wenn wir über μ zunächst dieselbe Voraussetzung wie im vorigen Satze machen. Wir setzen nun:

$$\Theta_i = \mathfrak{P}_{i_1}^{G_{i_1}(S)} \cdot \mathfrak{P}_{i_2}^{G_{i_2}(S)} \cdots \mathfrak{P}_{i_n}^{G_{i_n}(S)} \qquad (i = 1, 2, \ldots v - v^*)$$

wo $\mathfrak{P}_{i_1} \ldots \mathfrak{P}_{i_n}$ von einander verschiedene Primideale in K bedeuten, von denen ausserdem keine 2 zu einander relativ conjugiert sein sollen, und wo die Funktionen $G_{i_1}(S) \ldots G_{i_n}(S)$ ganzzahlige Funktionen vom $(l-1^{ten})$ Grade in S sind.

Da die Relativnorm von Θ_i eine Einheit in k ist, so folgt, dass alle Funktionen $G(S)$ durch $(1-S)$ teilbar sein müssen.

Wir können dann setzen:

$$\Theta_i = \mathfrak{A}_i^{(1-S)}$$

wo $\mathfrak{A}_i$ ein Ideal ist, dessen Wert leicht anzugeben ist. Dies Ideal bestimmt offenbar eine ambige Classe und somit auch einen ambigen Complex A_i. Wir wollen nun zeigen,

www.libtool.com.cn

dass sich alle ambigen Complexe in K als Produkte der aus den Idealen $\mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_{\nu\to\nu^*}$, $\mathfrak{D}_{m'\to\nu^*+1}, \ldots \mathfrak{D}_t$, entspringenden ambigen Complexe darstellen lassen. Es sei zu diesem Zweck $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Ideal des ambigen Complexes A, dann folgt aus der Thatsache, dass ein ambiger Complex in K bei unserer Voraussetzung über den Körper k nur ambige Classen enthält (vergl. Hilbert, Rel. quadr. Z. Satz 21 S. 31), dass eine Gleichung

$$\mathfrak{A}^{(1-s)} = (\Theta)$$

besteht, wo Θ eine Zahl aus K ist. Da die Relativnorm von Θ dann eine Einheit ϑ wird, so können wir setzen

$$N_k(\Theta) = \vartheta = \eta_1^{e_1} \ldots \eta_{\nu\to\nu^*}^{e_{\nu\to\nu^*}} \vartheta_1^{f_1} \ldots \vartheta_{\nu\to\nu^*}^{f_{\nu\to\nu^*}} \xi^l,$$

wo die Exponenten gewisse Werte $0, 1, \ldots l-1$ haben und ξ eine Einheit aus k bedeutet. Bilden wir dann die Zahl:

$$\Theta' = \Theta H_1^{-e_1} \ldots H_{\nu\to\nu^*}^{-e_{\nu\to\nu^*}} \Theta_1^{-f_1} \ldots \Theta_{\nu\to\nu^*}^{-f_{\nu\to\nu^*}} \xi^{-1} \tag{7}$$

so können wir, da ihre Relativnorm 1 ist,

$$\Theta' = A^{(1-s)}$$

setzen, wo A eine ganze Zahl aus K bedeutet. Wenn wir nun in der Gleichung (7) für Θ' seinen Wert $A^{(1-s)}$ setzen und zu den Idealen zurück gehen, so wird:

$$(A)^{1-s} = (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}_1^{-f_1} \ldots \mathfrak{A}_{\nu\to\nu^*}^{-f_{\nu\to\nu^*}})^{1-s}.$$

Wenn wir daher

$$\mathfrak{A}^{l-1} \mathfrak{A}_1^{f_1} \ldots \mathfrak{A}_{\nu\to\nu^*}^{f_{\nu\to\nu^*}} \cdot A = \mathfrak{D} \text{ setzen, so ist, da } \mathfrak{D} = S\mathfrak{D},$$

$\mathfrak{D}$ ein Produkt eines ambigen Ideals in K in ein Ideal aus k und daher ein Produkt aus Potenzen der Ideale $\mathfrak{D}_1 \ldots \mathfrak{D}_t$ in ein Ideal aus k. Wenn wir daher beachten, dass sich die Ideale $\mathfrak{D}_1, \ldots \mathfrak{D}_{m'\to\nu^*+1}$ durch $\mathfrak{D}_{m'\to\nu^*+2}, \ldots, \mathfrak{D}^t$ ausdrücken lassen, so folgt, dass jeder ambige Complex in K sich als ein Produkt aus den Complexen, die aus $\mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_{\nu\to\nu^*}$, $\mathfrak{D}_{m'\to\nu^*+2}, \ldots \mathfrak{D}_t$ entspringen, darstellen lässt. Sind nun die letzteren alle von einander unabhängig, so ist die Anzahl aller ambigen Complexe in K l^a, wo

$$a = t + v - m' - 1.$$

In jedem Falle ist aber:

$$a \leqq t + v - m' - 1.$$

In dem ausgeschlossenen Falle, dass μ das Produkt einer Einheit in die l^{te} Potenz einer ganzen Zahl aus k ist, gilt dieselbe Ungleichung.

www.libtool.com.cn

§ 6.

Die Geschlechter im Körper K.

Indem wir uns zunächst auf den Fall beschränken, dass die in der Relativdiscriminante des Körpers K aufgehenden Primideale $\mathfrak{d}_1, \ldots \mathfrak{d}_t$ zu l relativ prim sind, gelangen wir in ganz entsprechender Weise, wie es von Hilbert in § 17 der Rel. quadr. Z. ausgeführt ist, zu dem Begriffe des Charakterensystemes einer Zahl in k und eines Ideals in K und zu dem Begriff des Geschlechtes einer Idealclasse und eines Complexes in K.

Wir wollen im folgenden eine obere Grenze für die Anzahl der möglichen Geschlechter in K ableiten. Wir bezeichnen dabei die Anzahl der Charaktere eines Geschlechts mit r und beweisen zunächst folgenden Satz:

Satz 21. (Hülfssatz). Wenn t und v die frühere Bedeutung haben und r die Anzahl der Charaktere eines Complexes in K ist, so gilt:

$$t + v - m' \leqq r.$$

Beweis: Wenn $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{r^*}$ diejenigen $r^* = t - r$ Einheiten sind, die bei der Definition des Geschlechtes eingeführt werden, für die also gilt:

$$\begin{cases} \left(\frac{\varepsilon_1, \mu}{\mathfrak{d}_t}\right) \neq 1 \\ \left(\frac{\varepsilon_2, \mu}{\mathfrak{d}_t}\right) = 1 \qquad \left(\frac{\varepsilon_2, \mu}{\mathfrak{d}_{t-1}}\right) \neq 1 \\ \left(\frac{\varepsilon_3, \mu}{\mathfrak{d}_t}\right) = 1 \qquad \left(\frac{\varepsilon_3, \mu}{\mathfrak{d}_{t-1}}\right) = 1 \qquad \left(\frac{\varepsilon_3, \mu}{\mathfrak{d}_{t-2}}\right) \neq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(\frac{\varepsilon_{r^*}, \mu}{\mathfrak{d}_t}\right) = 1 \ldots \left(\frac{\varepsilon_{r^*}, \mu}{\mathfrak{d}_{t-r^*+2}}\right) = 1 \qquad \left(\frac{\varepsilon_{r^*}, \mu}{\mathfrak{d}_{t-r^*+1}}\right) \neq 1, \end{cases}$$

so beweist man leicht, dass die aus den Einheiten:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{r^*}, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{v^*}, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_{v-v^*}$$

entspringenden $r^* + v$ Einheitenverbände von einander unabhängig sind, wenn man die vorstehenden Gleichungen beachtet und ausserdem bedenkt, dass $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{v^*}, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_{v-v^*}$ Relativnormen von ganzen oder gebrochenen Zahlen in K sind. Da nun die Anzahl aller Einheitenverbände in K $l^{m'}$ ist, so ist

$$r^* + v \leqq m', \quad \text{also} \quad t + v - m' \leqq r.$$

Zieht man noch den Satz 20 heran und bedenkt, dass a nicht kleiner als Null ist, so folgt $r \geqq t + v - m' \geqq 1$.

www.libtool.com.cn

Das Charakterensystem eines Ideals enthält daher sicher immer einen Charakter.

Um eine obere Grenze für die Anzahl der Geschlechter in K zu finden, ziehen wir die ambigen Complexe heran und beweisen folgenden Satz:

Satz 22. Die Anzahl g der verschiedenen Geschlechter in K ist kleiner oder höchstens gleich der Anzahl A der ambigen Complexe.

Bezeichnet man mit f die Anzahl der Complexe des Hauptgeschlechts, so ist die Gesamtzahl der Komplexe in K, welche wir M nennen,

$$M = g \cdot f.$$

Für die Zahl M können wir noch einen zweiten Ausdruck finden, den wir auf folgende Weise ableiten.

Jede $(1-S)^{te}$ symbolische Potenz eines Complexes gehört dem Hauptgeschlecht an. Es seien nun

$$P_1, \ldots P_{f'}, \quad f' \leqq f$$

diejenigen Complexe des Hauptgeschlechts, die symbolische $(1-S)^{te}$ Potenzen von Complexen sind. Wir setzen:

$$P_1 = G_1^{(1-S)} \cdots P_{f'} = G_{f'}^{(1-S)}.$$

Ist dann P ein beliebiger Complex, so muss $P^{(1-S)}$ mit einem der hingeschriebenen f' Complexe identisch sein; es sei etwa

$$P^{(1-S)} = G_\nu^{(1-S)}, \quad \text{also} \quad (P G_\nu^{-1})^{(1-S)} = 1.$$

Der Complex $P G_\nu^{-1}$ hat daher die Eigenschaft, dass seine symbolische $(1-S)^{te}$ Potenz den Hauptcomplex ergiebt und hieraus folgt, da h zu l relativ prim ist, dass $P G_\nu^{-1}$ ein ambiger Complex A ist (A. Z. S. 468). Es ist also

$$P = A \cdot G_\nu.$$

Der Ausdruck $A G_\nu$ stellt deshalb, wenn A alle ambigen Complexe und G_ν alle Complexe $G_1, \ldots G_{f'}$ durchläuft, alle Complexe in K dar und jeden auch nur einmal. Wäre nämlich

$$A G_\nu = A' G_{\nu'}, \quad \text{und} \quad \nu \neq \nu', \quad \text{so wäre}$$

$$G_{\nu'} = A A'^{-1} G_\nu, \quad \text{folglich} \quad P_{\nu'} = P_\nu, \quad \text{was nicht möglich,}$$

wenn $$\nu \neq \nu'.$$

Es besteht daher die Gleichung:

$$M = A \cdot f'.$$

Da nun $f' \leqq f$, muss $A \geqq g$ sein.

www.libtool.com.cn

Satz 23. Wenn die Anzahl der Charaktere, die ein Geschlecht in K bestimmen, gleich r ist, so ist die Anzahl aller Geschlechter g kleiner oder höchstens gleich l^{r-1}.

Beweis:

$$g \leqq A \qquad \text{(Satz 22)}$$

$$\frac{A \leqq l^{t+v-m'-1}}{g \leqq l^{t+v-m'-1}} \qquad \text{(Satz 20)}$$

$$t + v - m' \leqq r \qquad \text{(Satz 21)}$$

$$g \leqq l^{r-1}.$$

III.

Die primären Ideale im Grundkörper k.

§ 7.

Definition des primären Ideals $\mathfrak{a}$ und des Symbols $\left(\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{a}}\right)$.

Definition 5. Ist das zu l prime Ideal $\mathfrak{a}$ in k so beschaffen, dass für jede Einheit ε in k das Symbol $\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{a}}\right)$ den Wert 1 hat, so heisst $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal. Alle Ideale, die diese Eigenschaft nicht haben, heissen nichtprimäre Ideale.

Definition 6. Ist $\mathfrak{a}$ ein primäres und $\mathfrak{j}$ ein beliebiges zu $\mathfrak{a}$ primes Ideal in k, so bestimmen wir den Wert des Symbols $\left(\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{a}}\right)$ in folgender Weise. Man bestimme eine Zahl h' so, dass $hh' \equiv 1\ (l)$ wird und bilde $\mathfrak{j}^{hh'} = (i)$. Dann setze man

$$\left(\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{i}{\mathfrak{a}}\right).$$

Auf diese Weise ist das Symbol eindeutig bestimmt und es gilt ausserdem: Sind $\mathfrak{j}_1$ und $\mathfrak{j}_2$ zwei beliebige zu $\mathfrak{a}$ prime Ideale, so ist

$$\left(\frac{\mathfrak{j}_1 \mathfrak{j}_2}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{\mathfrak{j}_1}{\mathfrak{a}}\right) \cdot \left(\frac{\mathfrak{j}_2}{\mathfrak{a}}\right).$$

Ist $\mathfrak{h}$ ein zu $\mathfrak{a}$ primes Hauptideal in k und $\mathfrak{h} = (\eta)$, so ist

$$\left(\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{\eta}{\mathfrak{a}}\right).$$

www.libtool.com.cn

Die letzte Gleichung ergiebt sich leicht mit Hülfe der Congruenz $hh' \equiv 1\ (l)$.

§ 8.

Ein System von $\frac{m(l-1)}{2}$ nichtprimären Primidealen in k.

Es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{m'-1}$ ein volles System von Grundeinheiten für den Körper k, wobei $m' = \frac{m(l-1)}{2}$. Ferner sei $\varepsilon_{m'}$ eine in k liegende Einheitswurzel, deren l^{te} Wurzel nicht in k liegt. Das System der Einheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{m'}$ hat dann die Eigenschaft, dass sich jede Einheit ε in k eindeutig in der Form

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{e_1} \cdots \varepsilon_{m'}^{e_{m'}} \xi^l$$

darstellen lässt, wo die Exponenten $e_1, \ldots e_{m'}$ bestimmte Werte 0, 1, $\cdots l-1$ haben und ξ eine Einheit aus k bedeutet.

Die aus den Einheiten $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{m'}$ hervorgehenden Verbände sind von einander unabhängig, so dass im ganzen $l^{m'}$ verschiedene Einheitenverbände in k existieren.

Wir wollen nun zwei Sätze beweisen, deren Gültigkeit wesentlich durch die Annahme bedingt ist, dass die Classenzahl h des Körpers k nicht durch l teilbar ist.

Satz 24. Die Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ ist von 1 verschieden.

Aus Satz 19 folgt, dass

$$t + v^* - m' \geqq 1 \quad \text{ist.}$$

Da nun $v^* \leqq m'$ ist, muss $t \geqq 1$, d. h. es giebt mindestens ein in der Relativdiscriminante von K aufgehendes Primideal.

Satz 25. Ist die Einheit ε in k der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k nach l^l congruent, so ist ε die l^{te} Potenz einer Einheit in k.

Zum Beweise wende man auf den Körper $K(\sqrt[l]{\varepsilon}, k)$ den vorigen Satz an.

Um die Eigenschaften der primären Ideale zu erkennen, ist es wichtig, ein gewisses System von m' nichtprimären Primidealen mit vorgeschriebenen Potenzcharakteren zu betrachten, dessen Existenz aus dem folgenden Satze folgt:

Satz 26. (Hülfssatz). Es seien $\alpha_1, \ldots \alpha_s$ irgend s ganze Zahlen des Körpers k, welche die Bedingung erfüllen, dass das Produkt

$$\alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \ldots \alpha_s^{m_s},$$

wenn man jeden der Exponenten $m_1, \cdots m_s$ die Werte 0, 1, $\cdots l-1$ durch-

www.libtool.com.cn

laufen lässt, jedoch das Wertsystem $m_1 = m_2 = \cdots m_s = 0$ ausschliesst, niemals die l^{te} Potenz einer Zahl in k wird; es seien ferner $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_s$ nach Belieben vorgeschriebene l^{te} Einheitswurzeln: dann giebt es im Körper k stets unendlich viele Primideale $\mathfrak{p}$, für die jedesmal bei einem gewissen zu l primen Exponenten m:

$$\left(\frac{\alpha_1}{\mathfrak{p}}\right)^m = \gamma_1 \qquad \left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{p}}\right)^m = \gamma_2 \cdots \left(\frac{\alpha_s}{\mathfrak{p}}\right)^m = \gamma_s$$

wird.

Bezüglich des Beweises dieses Satzes verweise ich auf Hilbert, A. Z. Satz 152 S. 426, wo der analoge Satz für den Kreiskörper $k(\zeta)$ bewiesen ist. Da der Beweis indessen gar keine speciellen Eigenschaften des Körpers $k(\zeta)$ benutzt und die zwischen einem Kummer'schen Körper und dem Körper $k(\zeta)$ geltenden Beziehungen im ersten Teil dieser Entwickelungen für einen beliebigen Oberkörper k des Kreiskörpers $k(\zeta)$ und einen relativ-cyclischen Oberkörper des Körpers k vom Primzahlrelativgrade l als gültig nachgewiesen sind, so gilt der Beweis ohne weiteres auch in unserem Falle.

Mit Benutzung des vorstehenden Satzes können wir jetzt das erwähnte System von m' nichtprimären Primidealen definieren und folgenden Satz von ihm beweisen:

Satz 27. Ist $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{m'}$ das definierte System von Einheiten in k und sind $\mathfrak{q}_1, \ldots \mathfrak{q}_{m'}$ zu $\mathfrak{l}$ prime Primideale in k, welche die Bedingungen befriedigen:

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i}\right)^m = \zeta \qquad \left(\frac{\varepsilon_k}{\mathfrak{q}_i}\right) = 1 \qquad (i \neq k);$$

$$(i, k = 1, 2 \ldots m')$$

setzt man ferner:

$$\mathfrak{q}_1^{hh'} = (\varkappa_1), \cdots \mathfrak{q}_{m'}^{hh'} = (\varkappa_{m'}),$$

wo $\varkappa_1, \ldots \varkappa_{m'}$ ganze Zahlen in k bedeuten, so gilt für jede zu $\mathfrak{l}$ prime Zahl ω in k eine Congruenz:

$$\omega \equiv \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \cdot \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_{m'}^{v_{m'}} \alpha^l (\mathfrak{l}^l),$$

worin die Exponenten $u_1, \ldots u_{m'}, v_1, \ldots v_{m'}$ gewisse Werte $0, 1 \cdots l-1$ haben und α eine geeignete ganze Zahl aus k ist.

Beweis. Wir weisen zunächst nach, dass eine Zahl

$$\mu = \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_{m'}^{v_{m'}}$$

nie der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl aus k nach $\mathfrak{l}^l$ congruent sein kann. Wäre dies nämlich der Fall, so würde der Körper $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ eine zu $\mathfrak{l}$ relativ prime

www.libtool.com.cn

Relativdiscriminante besitzen, die nur durch diejenigen unter den Primidealen $\mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_{m'}$ teilbar wäre, für die der zugehörige Exponent v ungleich Null ist.

Es seien dies die Primideale $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots \mathfrak{q}_t$. Für jede Einheit ε in k, die Relativnorm einer Einheit in K ist, gilt nun

$$\left(\frac{\varepsilon, \mu}{\mathfrak{q}_i}\right) = 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots t).$$

Stellen wir dann ε in der Form dar:

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{m'}^{e_{m'}} \cdot \xi^l,$$

so folgt aus den über die Primideale $\mathfrak{q}$ gemachten Voraussetzungen:

$$\left(\frac{\varepsilon, \mu}{\mathfrak{q}_i}\right) = \left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i}\right)^{e_i v_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots t).$$

Hieraus folgt

$$e_1 = e_2 \cdot \cdots = e_t = 0, \quad \text{das heisst,}$$

ε muss das Produkt aus Potenzen von $m' - t$ Einheiten in die l^{te} Potenz einer Einheit in k sein. Sämmtliche Einheiten in k, die Relativnormen von Einheiten in K sind, würden demnach höchstens $l^{m'-t}$ Einheitenverbände ausmachen. Es müsste demnach, wenn wir die früher angewandten Bezeichnungen beibehalten, $v^* \leqq m' - t$ oder $t + v^* - m' \leqq 0$ sein, was als unmöglich nachgewiesen ist. Deshalb kann die Zahl μ nicht der l^{ten} Potenz einer Zahl in k congruent sein.

Es sei nun $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_f$ ein volles System von $\varphi(\mathfrak{l})$ nach $\mathfrak{l}$ incongruenten zu $\mathfrak{l}$ primen Zahlen in k. Der Ausdruck:

$$\varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{m'}^{v_{m'}} \alpha_i^l \tag{1}$$

stellt dann, wenn die Zahlen $u_1, \ldots u_{m'}$, $v_1, \ldots v_{m'}$ alle Werte $0, 1 \ldots l-1$ und i die Werte $1, 2, \ldots f$ durchläuft $l^{2m'} \varphi(\mathfrak{l})$ Zahlen dar, welche, wie wir zeigen wollen, nach $\mathfrak{l}^l$ incongruent sind.

Wären zwei von ihnen einander congruent, etwa

$$\varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{m'}^{v_{m'}} \alpha_i^l \equiv \varepsilon_1^{u_1'} \ldots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}'} \varkappa_1^{v_1'} \ldots \varkappa_{m'}^{v_{m'}'} \alpha_h^l \qquad (\mathfrak{l}^l),$$

so würde zunächst aus den zu Anfang dieses Beweises gemachten Ausführungen folgen, dass

$$u_1 = u_1', \ldots u_{m'} = u_{m'}', \; v_1 = v_1', \ldots v_{m'} = v_{m'}'$$

sein müsste, also auch

$$\alpha_i^l \equiv \alpha_h^l \qquad (\mathfrak{l}^l).$$

Ist nun $\mathfrak{l}_1$ ein in $\mathfrak{l}$ zur l_1^{ten} Potenz aufgehendes Primideal, so würde aus der letzten Congruenz folgen:

www.libtool.com.cn

$$\prod_{(a)}(\alpha_i - \zeta^a \alpha_k) \equiv 0 \,(\mathfrak{l}_1^{l'_1}) \qquad (a = 0, 1, 2 \ldots l-1).$$

Es muss dann sicher auch die Congruenz bestehen:

$$\alpha_i - \zeta^a \alpha_k \equiv 0 \,(\mathfrak{l}_1^{l'_1}).$$ Da nun

$$\alpha_i - \zeta^a \alpha_k \equiv \alpha_i - \alpha_k \,(\mathfrak{l}_1^{l'_1}),$$ würde folgen

$$\alpha_i \equiv \alpha_k \,(\mathfrak{l}_1^{l'_1}).$$

Da man diesen Schluss für jeden Primfaktor von $\mathfrak{l}$ ausführen könnte, so müsste schliesslich:

$$\alpha_i \equiv \alpha_k \,(\mathfrak{l})$$

sein, dies widerspricht aber unserer Annahme. Alle $l^{2m'}\varphi(\mathfrak{l})$ Zahlen des Systems (1) sind also nach $\mathfrak{l}'$ einander incongruent. Weil nun

$$\varphi(\mathfrak{l}') = l^{2m'}\varphi(\mathfrak{l}) \quad \text{ist},$$

so bildet das System (1) ein volles System nach $\mathfrak{l}'$ incongruenter, zu $\mathfrak{l}$ primer Zahlen in k, was mit unserer Behauptung identisch ist.

§ 9.

Die unendliche Reihe $\sum_{(\mathfrak{w})}\sum_{(m)}\left(\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{a}}\right)^m \cdot \frac{1}{n(\mathfrak{w})^s}$.

Satz 28. Ist $\mathfrak{a}$ ein bestimmtes primäres Ideal in k, so stellt die über sämmtliche zu $\mathfrak{a}$ primen Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k und über $m = 1, 2, \cdots l-1$ zu erstreckende unendliche Summe:

$$\sum_{(\mathfrak{w})}\sum_{(m)}\left(\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{a}}\right)^m \frac{1}{n(\mathfrak{w})^s}$$

eine solche Funktion der reellen Veränderlichen s dar, die stets unterhalb einer positiven endlichen Grenze bleibt, wenn die reelle Veränderliche s sich der Grenze 1 nähert.

Beweis: Zu einem vollen System nach $\mathfrak{a}$ incongruenter zu $\mathfrak{a}$ primer Zahlen in k gehören $\varphi(\mathfrak{a})$ Zahlen und unter diesen giebt es genau $\frac{\varphi(\mathfrak{a})}{l}$ Zahlen β, für die das Symbol $\left(\frac{\beta}{\mathfrak{a}}\right)$ den gleichen Wert hat, wie man leicht erkennt, wenn man sich $\mathfrak{a}$ in Primfaktoren zerlegt denkt. Es sei nun C eine beliebige Idealclasse in k und $\mathfrak{b}$ ein zu $\mathfrak{a}$ primes Ideal der Classe C^{-1}; ferner sei $\varrho, \varrho', \varrho'' \ldots$ ein System von $\frac{\varphi(\mathfrak{a})}{l}$ nach $\mathfrak{a}$ incongruenten Zahlen, die sämmtlich durch $\mathfrak{b}$ teilbar und zu $\mathfrak{a}$ prim

www.libtool.com.cn

sind und für die $\left(\frac{\varrho^{(0)}}{\mathfrak{a}}\right)$ einen bestimmten Wert ζ^a hat. Wenn dann $\varkappa^{(1)}, \ldots \varkappa^{(r)}$ ein System von Basiszahlen für das Ideal $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ bilden und wenn $u_1, \ldots u_r$ ganze rationale Zahlen bedeuten, so lässt sich offenbar jede durch $\mathfrak{b}$ teilbare zu $\mathfrak{a}$ prime ganze Zahl γ in k, für welche $\left(\frac{\gamma}{\mathfrak{a}}\right) = \zeta^a$ ist, in einer der $\frac{\varphi(\mathfrak{a})}{l}$ Formen:

$$\begin{aligned} &u_1\varkappa^{(1)} + \cdots u_r\varkappa^{(r)} + \varrho \\ &u_1\varkappa^{(1)} + \cdots u_r\varkappa^{(r)} + \varrho' \\ &u_1\varkappa^{(1)} + \cdots u_r\varkappa^{(r)} + \varrho'' \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad r = m(l-1)$$

darstellen.

Wenn man diese Thatsache benutzt und ausserdem bedenkt, dass $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal sein soll, so lässt sich unter Benutzung des von Hilbert in Rel. quadr. Z. S. 53 angegebenen Satzes und auf demselben Wege, den Hilbert bei dem Beweise des analogen Satzes 31 in Rel. quadr. Z. S. 54 ff. eingeschlagen hat, nachweisen, dass für die Anzahl $F_a(t)$ aller durch $\mathfrak{b}$ teilbaren zu $\mathfrak{a}$ primen Hauptideale $\mathfrak{h}$ in k, für welche

$$\left(\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{a}}\right) = \zeta^a$$

und deren Normen die reelle positive Zahl t nicht überschreiten, die Gleichung gilt

$$(1) \qquad F_a(t) = \frac{\varphi(\mathfrak{a})}{l} \cdot K \cdot t + M_a \cdot t^{1-\frac{1}{r}}, \qquad (a = 0, 1, 2, \ldots l-1)$$

wo K eine gewisse von t unabhängige Constante bedeutet, während M_a eine von t abhängige Grösse bedeutet, die für unendlich wachsendes t stets zwischen endlichen Grenzen bleibt.

Bezeichnet man nun alle Hauptideale $\mathfrak{h}$, für die $\left(\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{a}}\right) = \zeta^a$ ist, mit $\mathfrak{h}_a$ und setzt $M_a t^{1-\frac{1}{r}} = \Phi_a(t)$, so folgt aus (1)

$$\sum_{(\mathfrak{h}_a)} \left(\frac{\mathfrak{h}_a}{\mathfrak{a}}\right) \cdot \frac{1}{n(\mathfrak{h}_a)^s} = \zeta^a \sum_{(t)} \frac{\varphi(\mathfrak{a}) \cdot K}{l t^s} + \zeta^a \sum_{(t)} \frac{\Phi_a(t) - \Phi_a(t-1)}{t^s} \qquad (s > 1)$$

wo die Summen rechts über $t = 1, 2, 3 \ldots \infty$ zu erstrecken sind.

Durch Umformung des zweiten Gliedes auf der rechten Seite folgt:

$$\sum_{(\mathfrak{h}_a)} \left(\frac{\mathfrak{h}_a}{\mathfrak{a}}\right) \cdot \frac{1}{n(\mathfrak{h}_a)^s} = \zeta^a \sum_{(t)} \frac{\varphi(\mathfrak{a}) \cdot K}{l t^s} + \zeta^a \sum_{(t)} M_a \frac{s\vartheta_a}{t^{s+\frac{1}{r}}}, \quad 0 < \vartheta_a < 1 \qquad (s > 1).$$

www.libtool.com.cn

Man erkennt hieraus, dass das zweite Glied der rechten Seite eine Funktion von s darstellt, die für $s = 1$ gegen einen endlichen Grenzwert convergiert. Bildet man nun die letzte Gleichung für $a = 0, 1, 2, \ldots l-1$ und addiert die entstehenden l Gleichungen, so geben die ersten Glieder rechter Hand die Summe 0, da $\sum_{(a)} \zeta^a = 0$ und es folgt daraus, dass

$$\sum_{(\mathfrak{h})} \left(\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{a}}\right) \cdot \frac{1}{n(\mathfrak{h})^s} \quad \text{eine Funktion von } s \text{ ist, die}$$

für $s = 1$ gegen einen endlichen Grenzwert convergiert.

Setzen wir jetzt $\mathfrak{h} = \mathfrak{b}\mathfrak{j}$, so ist $\mathfrak{j}$ ein zu $\mathfrak{a}$ primes Ideal der Classe C und es ergiebt sich aus der Gleichung:

$$\left(\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right) \cdot \left(\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{a}}\right),$$

dass die über alle zu $\mathfrak{a}$ primen Ideale $\mathfrak{j}$ der Classe C erstreckte Summe

$$\sum_{(\mathfrak{j})} \left(\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{a}}\right) \cdot \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s} \qquad (s > 1)$$

eine Funktion von s ist, die für $s = 1$ gegen einen endlichen Grenzwert convergiert. Dasselbe gilt dann auch, wie sofort ersichtlich, von der Summe:

$$\sum_{(\mathfrak{j})} \sum_{(m)} \left(\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{a}}\right)^m \cdot \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s} \qquad (m = 1, 2, \cdots l-1) \qquad (s > 1).$$

Bildet man die letzte Summe für alle h Idealclassen in k und addiert die h entstehenden Summen, so folgt, dass die über alle zu $\mathfrak{a}$ primen Ideale $\mathfrak{j}$ des Körpers k zu erstreckende Summe:

$$\sum_{(\mathfrak{j})} \sum_{(m)} \left(\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{a}}\right)^m \cdot \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s} \qquad (s > 1) \quad (m = 1, 2, \ldots l-1)$$

für $s = 1$ gegen einen endlichen Grenzwert convergiert.

Da anderseits die Gleichung besteht:

$$\log \sum_{(\mathfrak{j})} \sum_{(m)} \left(\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{a}}\right)^m \cdot \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s} = \sum_{(\mathfrak{w})} \sum_{(m)} \left(\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{a}}\right)^m \frac{1}{n(\mathfrak{w})^s} + f(s), \qquad (s > 1)$$

wo die Summe $\sum_{(\mathfrak{w})}$ über alle zu $\mathfrak{a}$ primen Primideale in k zu erstrecken ist und $f(s)$ eine Funktion darstellt, die für $s = 1$ gegen einen endlichen Grenzwert convergiert, so muss

$$\sum_{(\mathfrak{w})} \sum_{(m)} \left(\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{a}}\right)^m \cdot \frac{1}{n(\mathfrak{w})^s} \qquad (s > 1)$$

www.libtool.com.cn

für $s = 1$ entweder gegen einen endlichen Grenzwert convergieren oder negativ über alle Grenzen wachsen.

§ 10.

Eine Eigenschaft der primären Primideale.

Mit Hülfe der Entwickelungen des letzten Paragraphen gelangen wir zu folgenden Sätzen:

Satz 29. Ist $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal in k, so kann man stets in k eine ganze Zahl π finden, so dass $(\pi) = \mathfrak{p}^{h h'}$, und eine Congruenz von der Gestalt:

$$\pi \equiv \beta^l \quad (\mathfrak{l}^l)$$

besteht, wo β eine geeignete ganze Zahl in k bedeutet.

Beweis: Es sei $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots \mathfrak{q}_{m'}$ das in § 8 definierte System von nichtprimären Primidealen. Setzen wir dann:

$$\mathfrak{p}^{h h'} = (\pi^*) \quad \mathfrak{q}_1^{h h'} = (\varkappa_1) \cdot \cdot \cdot \mathfrak{q}_{m'}^{h h'} = (\varkappa_{m'}),$$

wo $\pi^*, \varkappa_1, \ldots \varkappa_{m'}$ ganze Zahlen aus k bedeuten, so können wir aus Satz 27 die Gültigkeit einer Congruenz:

$$\pi^* \equiv \varepsilon \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{m'}^{v_{m'}} \gamma^l \qquad (\mathfrak{l}^l)$$

folgern, wo ε eine Einheit und γ eine ganze Zahl aus k bedeutet. Wären hier die Exponenten $v_1 \ldots v_{m'}$ sämmtlich Null, so wäre bereits $\pi^* \varepsilon^{l-1}$ eine Zahl mit der verlangten Eigenschaft. Wir nehmen deshalb an, es seien eine Anzahl der Exponenten v, etwa e, von Null verschieden. Wir bilden jetzt die Zahl:

$$\mu = \pi^* (\varepsilon \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{m'}^{v_{m'}})^{l-1}$$

und betrachten den Körper $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$. Für diesen ist offenbar

$$t = e + 1, \quad r^* = e, \quad r = 1.$$

Es existiert also in K nur ein Geschlecht, das Hauptgeschlecht.

Bestimmen wir jetzt ein Primideal $\mathfrak{r}$ in k so, dass $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}}\right) = 1$, so wird $\mathfrak{r}$ in K zerlegbar und jeder Primfaktor von $\mathfrak{r}$ muss zum Hauptgeschlecht gehören. Wenn wir deshalb $\mathfrak{r}^{h h'} = (\varrho)$ setzen und mit ξ eine geeignete Einheit aus k bezeichnen, so muss

$$\left(\frac{\xi \varrho}{\mathfrak{p}}\right) = 1, \text{ folglich } \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \text{ sein.}$$

www.libtool.com.cn

Wir wählen jetzt ein zweites System von m' nichtprimären Primidealen $q_1', q_2', \ldots q_{m'}$, das vom ersten verschieden ist und die Eigenschaft hat, dass

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{q_i'}\right) \neq 1 \qquad \left(\frac{\varepsilon_k}{q_i'}\right) = 1 \qquad (k \neq i).$$

Für dieses führen wir dieselben Entwickelungen durch wie im ersten Falle und gelangen so zu einer Congruenz für π^*, in der entweder sämmtliche Exponenten verschwinden — in diesem Falle ist unser Satz bewiesen — oder eine Anzahl von Null verschieden ist. Wenn wir das letzte annehmen, so kommen wir dadurch zu einer Zahl

$$\mu' = \pi^* \left(\varepsilon' \varkappa_1'^{v_1'} \varkappa_2'^{v_2'} \ldots \varkappa_{m'}'^{v_{m'}'}\right)^{l-1}.$$

Betrachten wir dann den Körper $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$, so schliessen wir wieder, dass, wenn für ein Primideal $\mathfrak{r}$ in k das Symbol $\left(\frac{\mu'}{\mathfrak{r}}\right) = 1$ ist, auch $\left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ sein muss.

Bezeichnen wir jetzt alle Primideale, für die

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}_\mu}\right) = 1, \text{ mit } \mathfrak{r}_\mu$$

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}_{\mu\mu'}}\right) \neq 1 \qquad \left(\frac{\mu'}{\mathfrak{r}_{\mu\mu'}}\right) = 1, \text{ mit } \mathfrak{r}_{\mu\mu'}$$

$$\left(\frac{\mathfrak{r}^{(+)}}{\mathfrak{p}}\right) = 1, \text{ mit } \mathfrak{r}^{(+)}$$

$$\left(\frac{\mathfrak{r}^{(-)}}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1, \text{ mit } \mathfrak{r}^{(-)},$$

Die Existenz der Primideale $\mathfrak{r}_{\mu\mu'}$ ergiebt sich aus Satz 26, wenn man bedenkt, dass $\mu^a \mu'^b$ nur dann l^{te} Potenz einer ganzen Zahl aus k wird, wenn a und b durch l teilbar sind.

so ergiebt sich aus der bei Hilbert A. Z. in Satz 152 abgeleiteten Gleichung (104) S. 428, dass

$$\sum_{(\mathfrak{r}_\mu)} \frac{1}{n(\mathfrak{r}_\mu)^s} = \frac{1}{l} \log \frac{1}{s-1} + f_\mu(s) \qquad (s > 1)$$

$$\sum_{(\mathfrak{r}_{\mu\mu'})} \frac{1}{n(\mathfrak{r}_{\mu\mu'})^s} = \frac{l-1}{l^2} \log \frac{1}{s-1} + f_{\mu\mu'}(s) \qquad (s > 1),$$

wo $f_\mu(s)$, $f_{\mu\mu'}(s)$ Funktionen von s bedeuten, die stets zwischen endlichen Grenzen bleiben, wenn die reelle Veränderliche s sich der Grenze 1 nähert.

Hieraus folgt, da die Primideale $\mathfrak{r}_\mu$ sämmtlich von den Primidealen $\mathfrak{r}_{\mu\mu'}$ verschieden sind und beide Arten zu den Primidealen $\mathfrak{r}^{(+)}$ gehören:

$$\sum_{(\mathfrak{r}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{r}^{(+)})^s} \geqq \sum_{(\mathfrak{r}_\mu)} \frac{1}{n(\mathfrak{r}_\mu)^s} + \sum_{(\mathfrak{r}_{\mu\mu'})} \frac{1}{n(\mathfrak{r}_{\mu\mu'})^s} \qquad (s > 1)$$

www.libtool.com.cn

$$\sum_{(\mathfrak{r}^+)} \frac{1}{n(\mathfrak{r}^{(+)})^s} \geqq \frac{2l-1}{l^s} \log \frac{1}{s-1} + f_\mu(s) + f_{\mu\mu'}(s) \qquad (s > 1).$$

Es gilt ferner die bekannte Gleichung:

$$\sum_{(\mathfrak{r}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{r}^{(+)})^s} + \sum_{(\mathfrak{r}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{r}^{(-)})^s} = \log \frac{1}{s-1} + f(s), \qquad (s > 1)$$

wo $f(s)$ wieder eine Funktion bezeichnet, die zwischen endlichen Grenzen bleibt, wenn s sich der Grenze 1 nähert.

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

$$(l-1) \cdot \sum_{(\mathfrak{r}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{r}^{(+)})^s} - \sum_{(\mathfrak{r}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{r}^{(-)})^s} \geqq \frac{l-1}{l} \log \frac{1}{s-1} + l f_\mu(s) + l f_{\mu\mu'}(s) - f(s) \quad (s > 1).$$

Da nun die linke Seite dieser Ungleichung den Wert

$$\sum_{(\mathfrak{r})} \sum_{(m)} \left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{p}}\right)^m \cdot \frac{1}{n(\mathfrak{r})^s} \qquad \text{hat, so steht dieselbe}$$

offenbar mit Satz 28 in Widerspruch. Unsere Annahmen über die Exponenten v und v' sind deshalb zu verwerfen und wir haben in der Zahl $\pi^* \varepsilon^{-1}$ eine Zahl der gewünschten Art.

Satz 30. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus k und kann man $\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi)$ setzen, sodass π der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl aus k nach $\mathfrak{l}'$ congruent ist, so ist $\mathfrak{p}$ ein primäres Ideal.

Beweis: Der Beweis ergiebt sich durch Betrachtung des Körpers $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$. Für diesen ist $t = 1$, also $a^* \leqq v^* - m'$.

Da a^* mindestens Null und v^* höchstens gleich m' ist, muss $a^* = 0$, $v^* = m'$ sein, womit unser Satz bewiesen ist.

§ 11.

Zwei specielle Fälle des Reciprocitätsgesetzes.

Definition 7. Ist μ eine ganze Zahl aus k, die der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl nach $\mathfrak{l}'$ congruent ist, so soll μ eine primäre Zahl heissen. Ist $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal aus k und π eine primäre Zahl, so dass $(\pi) = \mathfrak{p}^{hh'}$, so soll π eine Primärzahl des Primideals $\mathfrak{p}$ heissen. π ist bis auf die l^{te} Potenz einer Einheit bestimmt.

Satz 31. Sind $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ zwei primäre Primideale mit den Primärzahlen π und π_1, so folgt aus $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right) = 1$ immer $\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ und umgekehrt.

www.libtool.com.cn

Beweis: Ist $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right) = 1$, so wird das Primideal $\mathfrak{p}_1$ im Körper $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$, der nur ein Geschlecht besitzt, zerlegbar. Ein Primfaktor desselben $\mathfrak{P}_1$ hat dann den Charakter

$$\left(\frac{\pi_1, \pi}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}}\right) = 1.$$

Entsprechendes gilt umgekehrt.

Satz 32. Ist $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal in k mit der Primärzahl π und $\mathfrak{r}$ ein beliebiges Primideal und $(\varrho) = \mathfrak{r}^{hh'}$, so ist

$$1) \text{ wenn } \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = 1, \text{ auch } \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

$$2) \text{ wenn } \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) \neq 1, \text{ auch } \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1.$$

Beweis: Der Beweis der ersten Behauptung ergiebt sich in entsprechender Weise wie bei dem vorhergehenden Satz. Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, bestimme man ein primäres Primideal $\mathfrak{p}_1$ mit der Primärzahl π_1 derart, dass $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right) \neq 1$ und $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right) \neq 1$. Dann folgt aus dem ersten Teil dieses Satzes, dass auch $\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right) \neq 1$ und dass man infolgedessen einen Exponenten e bestimmen kann, so dass

$$\left(\frac{\pi \pi_1^e}{\mathfrak{r}}\right) = 1.$$

Wir betrachten den Körper $K(\sqrt[l]{\pi \pi_1^e}, k)$, für den $r = 2$. Es existieren also höchstens l Geschlechter und auch sicher l Geschlechter in K.

Denn $\mathfrak{p}$ wird in K zerlegbar und ein Primfaktor $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ hat die Charaktere

$$\left(\frac{\pi, \pi \pi_1^e}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}}\right)^{-e} \qquad \left(\frac{\pi, \pi \pi_1^e}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right)^{e},$$

die offenbar beide von 1 verschieden sind. $\mathfrak{P}$ gehört deshalb nicht zum Hauptgeschlecht und die Ideale

$$\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}^3, \ldots \mathfrak{P}^l$$

definieren deshalb l verschiedene Geschlechter in K. Bezeichnet nun n eine solche zu l prime Zahl, dass

www.libtool.com.cn

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}}\right)^{-1}\left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right)^{n}=1,$$

so gilt offenbar für jedes Geschlecht in K, wenn man die Charaktere in bezug auf $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ mit c_1 und c_2 bezeichnet:

$$c_1 c_2^{m}=1.$$

$\mathfrak{r}$ wird ebenfalls in K zerlegbar und ein Primfaktor von $\mathfrak{r}$ erhält die Charaktere:

$$\left(\frac{\varrho,\ \pi\pi_1^{e}}{\mathfrak{p}}\right)=\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)\qquad\left(\frac{\varrho,\ \pi\pi_1^{e}}{\mathfrak{p}_1}\right)=\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right)^{e}.$$

Es gilt also:

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)\cdot\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right)^{em}=1.$$

Da nun $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right)\neq 1$ ist und der Exponent en zu l prim ist, so muss auch $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)\neq 1$ sein.

Wir können die in den beiden vorigen Sätzen bewiesenen Thatsachen in dem folgenden Satze zusammenfassen.

Satz 33. Ist $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal in k mit der Primärzahl π und $\mathfrak{r}$ ein beliebiges Primideal und ϱ eine solche ganze Zahl aus k, dass $(\varrho)=\mathfrak{r}^{hw}$, so gilt

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)=\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)^{n},$$

wo n einen gewissen zu l primen Exponenten bedeutet.

Anmerkung. Es ist mir nicht gelungen, lediglich auf Grund der bisher entwickelten Hülfsmittel ohne Hinzuziehung der für den Körper $k(\zeta)$ bewiesenen Reciprocitätsgesetze, also im Grunde genommen ohne Hinzuziehung des Eisenstein'schen Reciprocitätsgesetzes, nachzuweisen, dass in dem eben angeführten Satze n gleich 1 sein muss. Das genannte Gesetz ist vielmehr ein wesentliches, durch meine bisherigen und auch folgenden Entwickelungen noch nicht entbehrlich gemachtes Mittel, die verschiedenen Restsymbole, welche einen Nichtrestcharakter ausdrücken, von einander zu unterscheiden.

§ 12.

Das Reciprocitätsgesetz zwischen einem primären und einem beliebigen Primideal in gewissen relativ Galois'schen Körpern.

Wir nehmen in diesem Paragraphen an, dass der Grundkörper k

www.libtool.com.cn

1) in bezug auf den Kreiskörper $k(\zeta)$ ein relativ Galois'scher sei,

2) dass sein Relativgrad m zu l prim sei.

Ausserdem setzen wir voraus, dass die Klassenzahl des Körpers $k(\zeta)$ ebenso wie die des Körpers k nicht durch l teilbar sei, dass also l eine reguläre Primzahl sei.

Um das Reciprocitätsgesetz zwischen einem primären und einem beliebigen Primideal in k zu beweisen, schicken wir zunächst einige Hülfssätze vorweg.

Satz 34. (Hülfssatz). Ist α eine ganze Zahl und $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus k, so ist für einen beliebigen positiven Exponenten e:

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}^e}\right) \equiv \alpha^{\frac{n(\mathfrak{p}^e)-1}{l}} \quad (\mathfrak{p}).$$

Beweis: Ist $n(\mathfrak{p}) = p^f$, wo $p^f \equiv 1 (l)$, so gilt

$$\frac{n(\mathfrak{p}^e)-1}{n(\mathfrak{p})-1} = \frac{p^{ef}-1}{p^f-1} = p^{(e-1)f} + p^{(e-2)f} + \cdots p^f + 1 \equiv e \ (l).$$

Folglich kann man

$$\frac{n(\mathfrak{p}^e)-1}{n(\mathfrak{p})-1} = lx + e \quad \text{setzen},$$

wo x eine positive ganze rationale Zahl bedeutet. Es ist deshalb:

$$\frac{n(\mathfrak{p}^e)-1}{l} = (lx+e) \cdot \frac{n(\mathfrak{p})-1}{l}.$$

Hieraus folgt:

$$\alpha^{\frac{n(\mathfrak{p}_e)-1}{l}} \equiv \left[\alpha^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{l}}\right]^{lx+e} \equiv \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)^{lx+e} \equiv \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)^{e} \equiv \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}^e}\right) \quad (\mathfrak{p}).$$

Wir haben im Folgenden das Symbol $(-)$ sowohl in bezug auf den Körper k wie in bezug auf den Kreiskörper $k(\zeta)$ zu bilden. Wir unterscheiden deshalb beide durch die Bezeichnung mit unterem Index:

$(-)_k$ Symbol in bezug auf den Körper k

$(-)_{kr}$ Symbol in bezug auf den Kreiskörper $k(\zeta)$.

Mit Anwendung dieser Bezeichnungsweise gilt der folgende Satz:

Satz 35. (Hülfssatz). Es sei $\mathfrak{r}$ ein beliebiges Primideal des Körpers k und $\bar{\mathfrak{r}}$ seine Relativnorm in bezug auf $k(\zeta)$. Ist ferner $\bar{\pi}$ eine beliebige ganze Zahl des Kreiskörpers $k(\zeta)$, so gilt die Gleichung

$$\left(\frac{\bar{\pi}}{\bar{\mathfrak{r}}}\right)_{kr} = \left(\frac{\bar{\pi}}{\mathfrak{r}}\right)_k.$$

www.libtool.com.cn

Beweis: Bezeichnet man die Norm von Idealen in k mit n_k, die Norm von Idealen in $k(\zeta)$ mit n_{kr}, so ist, wenn

$$n_k(\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}', \quad \text{auch} \quad n_{kr}(\bar{\mathfrak{r}}) = \mathfrak{r}'.$$

Nun ist

$$\left(\frac{\bar{\pi}}{\mathfrak{r}}\right)_k \equiv \bar{\pi}^{\frac{\mathfrak{r}'-1}{l}} \quad (\mathfrak{r}).$$

Ferner ergiebt sich aus dem vorigen Hülfssatz, da $\bar{\mathfrak{r}}$ die Potenz eines Primideals in $k(\zeta)$ ist, dass

$$\left(\frac{\bar{\pi}}{\bar{\mathfrak{r}}}\right)_{kr} \equiv \bar{\pi}^{\frac{\mathfrak{r}'-1}{l}} \quad (\mathfrak{r}).$$

Es ist folglich:

$$\left(\frac{\bar{\pi}}{\mathfrak{r}}\right)_k \equiv \left(\frac{\bar{\pi}}{\bar{\mathfrak{r}}}\right)_{kr} \quad (\mathfrak{r}),$$

also, da $\mathfrak{r}$ zu l prim ist,

$$\left(\frac{\bar{\pi}}{\mathfrak{r}}\right)_k = \left(\frac{\bar{\pi}}{\bar{\mathfrak{r}}}\right)_{kr}.$$

Benutzt man in dem vorstehenden Beweise statt des Körpers $k(\zeta)$ einen beliebigen Unterkörper von k, so bleiben alle Schlüsse bestehen. Es gilt der angeführte Satz daher auch für einen beliebigen Unterkörper von k, natürlich vorausgesetzt, dass derselbe ebenfalls den Körper $k(\zeta)$ enthält.

Satz 36. (Hülfssatz). Sind $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ zwei beliebige nicht relativ conjugierte Primideale des Körpers k und ist $\mathfrak{p}_1^{hh'} = \pi_1$, $\mathfrak{p}_2^{hh'} = \pi_2$, so giebt es stets ein primäres Primideal $\mathfrak{r}$ in k mit der Primärzahl ϱ, so dass:

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right) \neq 1 \qquad \left(\frac{\pi_2}{\mathfrak{r}}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_2}\right) \neq 1.$$

Beweis: Es seien $\mathfrak{p}_1^{(1)} = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1^{(2)}, \ldots \mathfrak{p}_1^{(a_1)}$ und $\mathfrak{p}_2^{(1)} = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_2^{(2)}, \ldots \mathfrak{p}_2^{(a_2)}$ die zu $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ relativ conjugierten unter einander verschiedenen Primideale. Wir setzen dann

$$(\mathfrak{p}_1^{(1)})^{hh'} = (\pi_1^{(1)}) = (\pi_1), \quad (\mathfrak{p}_1^{(2)})^{hh'} = (\pi_1^{(2)}) \ldots (\mathfrak{p}_1^{(a_1)})^{hh'} = (\pi_1^{(a_1)})$$

$$(\mathfrak{p}_2^{(1)})^{hh'} = (\pi_2^{(1)}) = (\pi_2), \quad (\mathfrak{p}_2^{(2)})^{hh'} = (\pi_2^{(2)}) \ldots (\mathfrak{p}_2^{(a_2)})^{hh'} = (\pi_2^{(a_2)})$$

und bestimmen jetzt das Primideal $\mathfrak{r}$ in k primär so, dass

$$(1) \qquad \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right) = \zeta \neq 1, \qquad \left(\frac{\pi_1^{(i)}}{\mathfrak{r}}\right) = 1 \qquad (i = 2, 3, \ldots a_1)$$

www.libtool.com.cn

$$\left(\frac{\pi_2}{\mathfrak{r}}\right) = \zeta \neq 1, \qquad \left(\frac{\pi_2^{(k)}}{\mathfrak{r}}\right) = 1 \qquad (k = 2, 3, \ldots a_2),$$

wo ζ irgend eine l^{te} Einheitswurzel bedeutet.

Wir behaupten dann, dass $\mathfrak{r}$ die verlangte Eigenschaft hat.

Zum Beweise bezeichnen wir die Relativnormen von $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{r}$, π_1, π_2, ϱ in bezug auf $k(\zeta)$ mit $\overline{\mathfrak{p}}_1$, $\overline{\mathfrak{p}}_2$, $\overline{\mathfrak{r}}$, $\overline{\pi}_1$, $\overline{\pi}_2$, $\overline{\varrho}$ und finden dann aus (1) unter Benutzung von Hülfssatz 35:

$$\left(\frac{\overline{\pi}_1}{\mathfrak{r}}\right)_k = \zeta^{e_1} = \left(\frac{\overline{\pi}_1}{\overline{\mathfrak{r}}}\right)_{kr} \qquad \left(\frac{\overline{\pi}_2}{\mathfrak{r}}\right)_k = \zeta^{e_2} = \left(\frac{\overline{\pi}_2}{\overline{\mathfrak{r}}}\right)_{kr},$$

wo die Exponenten e_1 und e_2 notwendig zu l prim sind, da wir vorausgesetzt haben, dass der Relativgrad m von k in bezug auf $k(\zeta)$ zu l prim sei.

Bedenkt man nun, dass $\overline{\mathfrak{p}}_1$, $\overline{\mathfrak{p}}_2$, $\overline{\mathfrak{r}}$ Potenzen von Primidealen in $k(\zeta)$ sind und dass $\overline{\mathfrak{r}}$ ein primäres Ideal und $\overline{\varrho}$ eine primäre Zahl in $k(\zeta)$, so folgt aus dem in $k(\zeta)$ zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal gültigen Reciprocitätsgesetz, dass

$$\left(\frac{\overline{\varrho}}{\overline{\mathfrak{p}}_1}\right)_{kr} = \left(\frac{\overline{\pi}_1}{\overline{\mathfrak{r}}}\right)_{kr} = \zeta^{e_1} \qquad \left(\frac{\overline{\varrho}}{\overline{\mathfrak{p}}_2}\right)_{kr} = \left(\frac{\overline{\pi}_2}{\overline{\mathfrak{r}}}\right)_{kr} = \zeta^{e_2}.$$

Ferner folgt wieder aus Hülfssatz 35, dass auch.

$$\left(\frac{\overline{\varrho}}{\mathfrak{p}_1}\right)_k = \zeta^{e_1} \qquad \left(\frac{\overline{\varrho}}{\mathfrak{p}_2}\right)_k = \zeta^{e_2}.$$

Berücksichtigt man jetzt die aus (1) mit Hülfe von Satz 33 folgenden Relationen und beachtet ausserdem, dass stets

$$\left(\frac{\pi^{(i)}}{\mathfrak{r}}\right)_k = \left(\frac{S\pi^{(i)}}{S\mathfrak{r}}\right)_k$$

ist, wenn S eine beliebige Substitution bedeutet, die den Körper k in einen relativ conjugierten überführt, so folgt:

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right)_k = \zeta \qquad \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_2}\right)_k = \zeta.$$

Damit ist die Richtigkeit unseres Satzes bewiesen.

Mit Benutzung des letzten Hülfssatzes ist es uns jetzt möglich, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 37. Ist $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal in k mit der Primärzahl π und ist $\mathfrak{r}$ ein beliebiges Primideal in k und $(\varrho) = \mathfrak{r}^{hh'}$, so ist:

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right).$$

www.libtool.com.cn

Beweis: Ist $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = 1$, so gehen wir auf Satz 33 zurück. Wir setzen daher jetzt voraus, dass

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = \zeta \neq 1$$

sei, wo ζ eine l^{te} Einheitswurzel bedeutet und bestimmen dann ein primäres Primideal $\mathfrak{p}_1$ mit der Primärzahl π_1 so, dass

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1 \qquad \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right) \neq 1,$$

was nach dem letzten Hülfssatz möglich ist, wenn $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{r}$ nicht relativ conjugiert sind. Endlich wählen wir einen zu l primen Exponenten e so, dass

$$\left(\frac{\pi\pi_1'}{\mathfrak{r}}\right) = 1$$

wird und betrachten den Körper $K(\sqrt[l]{\pi\pi_1'}, k)$.

Dieser besitzt nach unseren Voraussetzungen über π und π_1 genau l verschiedene Geschlechter, und das Charakterenprodukt für jedes ist, da $\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right)^{-1} = 1$, selbst gleich 1. Da $\mathfrak{r}$ in K zerlegbar ist, so besitzt ein Primfaktor von $\mathfrak{r}$ die Charaktere:

$$\left(\frac{\varrho, \pi\pi_1'}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) \qquad \left(\frac{\varrho, \pi\pi_1'}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right)^e,$$

deren Produkt 1 sein muss. Es ist also:

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1'}\right) = 1 = \left(\frac{\pi\pi_1'}{\mathfrak{r}}\right)$$

und hieraus folgt

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right).$$

Der ausgeschlossene Fall, dass $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{p}$ relativ conjugiert sind, erledigt sich leicht mit Hülfe des Vorhergehenden.

Wir können den eben bewiesenen Satz auf beliebige Unterkörper k_1 von k ausdehnen, die ebenfalls den Körper $k(\zeta)$ enthalten und eine nicht durch l teilbare Classenzahl h_1 besitzen. Wir brauchen dazu den folgenden Satz:

Ist $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal in k und α eine primäre Zahl, so dass $\mathfrak{a}^{hh'} = (\alpha)$; ist ferner $\mathfrak{b}$ ein beliebiges Ideal in k und $\mathfrak{b}^{hh'} = (\beta)$, so gilt

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{a}}\right).$$

Wir gehen auf den Beweis dieses Satzes, um Wiederholungen zu vermeiden, an dieser Stelle nicht ein, da er später für jeden Körper k, für den Satz 37 gilt, ausführlich bewiesen wird (vergl. § 16). Wir setzen ihn hier vielmehr als bewiesen voraus und benutzen ihn zum Beweise des folgenden Satzes:

www.libtool.com.cn

Satz 38. Ist k_1 ein beliebiger Unterkörper des im vorigen Satze betrachteten relativ Galois'schen Körpers k, der ebenfalls den Kreiskörper $k(\zeta)$ enthält und dessen Klassenzahl h_1 zu l relativ prim ist, so gilt in ihm das Reciprocitätsgesetz zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal.

Beweis: Es sei $\mathfrak{P}$ ein primäres Primideal in k_1 mit der Primärzahl Π und $\mathfrak{R}$ ein beliebiges Primideal in k_1, ferner

$$\mathfrak{R}^{h_1 h_1'} = (P), \quad \text{wo } h_1 h_1' \equiv 1 \ (l).$$

Da Π auch in k eine primäre Zahl ist, so muss $\mathfrak{P}$ ein primäres Ideal in k sein (vergl. Satz 45 in § 16). Es gilt folglich in k nach dem eben angeführten Satze:

$$\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{R}}\right)_k = \left(\frac{P}{\mathfrak{P}}\right)_k. \tag{1}$$

Es sei nun die Zerlegung von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$ in k die folgende:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \ldots \mathfrak{p}_e$$
$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2 \cdot \ldots \mathfrak{r}_f$$

wo $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_e, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots \mathfrak{r}_f$ gleiche oder verschiedene Primideale in k bedeuten. Die Relativnorm von $\mathfrak{p}_1$ in bezug auf k_1 ist dann $\mathfrak{P}^{e'}$, wo offenbar $e\,e' = m_1$, wenn m_1 den Relativgrad von k in bezug auf k_1 bezeichnet.

Wir können nun schliessen:

$$\left(\frac{P}{\mathfrak{P}}\right)_k = \left(\frac{P}{\mathfrak{p}_1}\right)_k^e$$
$$\left(\frac{P}{\mathfrak{p}_1}\right)_k = \left(\frac{P}{\mathfrak{P}}\right)_{k_1}^{e'}$$
$$\left(\frac{P}{\mathfrak{P}}\right)_k = \left(\frac{P}{\mathfrak{P}}\right)_{k_1}^{ee'} = \left(\frac{P}{\mathfrak{P}}\right)_{k_1}^{m_1}. \tag{2}$$

In gleicher Weise schliessen wir:

$$\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{R}}\right)_k = \left(\frac{\Pi}{\mathfrak{R}}\right)_{k_1}^{m_1}. \tag{3}$$

Dann folgt offenbar aus (1) (2) (3), da $m_1 \not\equiv 0 \ (l)$

$$\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{R}}\right)_{k_1} = \left(\frac{P}{\mathfrak{P}}\right)_{k_1}.$$

www.libtool.com.cn

§ 13.

Fortsetzung.

Den Fall, dass der im vorigen Paragraphen genannte relativ Galois'sche Körper k einen durch l teilbaren Relativgrad besitzt, werde ich nicht allgemein behandeln. Ich werde nur den Fall erledigen, dass der Relativgrad desselben genau gleich l sei. Ich mache jetzt also folgende Annahmen:

1) k_1 sei ein beliebiger Zahlkörper, für den das Reciprocitätsgesetz zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal bewiesen ist. Seine zu l prime Klassenzahl sei h.

2) K_1 sei ein relativcyclischer Oberkörper über k_1 vom Primzahlrelativgrade l. Er möge definiert sein durch $\sqrt[l]{\mu}$, wo μ eine ganze Zahl aus k_1 bezeichnet, und möge ferner eine nicht durch l teilbare Klassenzahl H besitzen.

Es ist die Aufgabe dieses Paragraphen, das Reciprocitätsgesetz zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal in K_1 abzuleiten. Zu diesem Zweck beweisen wir zunächst folgenden Hülfssatz.

Hülfssatz 39. Es sei Π eine beliebige ganze Zahl aus K_1 und π die Relativnorm von Π in bezug auf k_1. Ferner sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal, das gleichzeitig in K_1 und k_1 liegt.

Es gilt dann:

$$\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{q}}\right)_{K_1} = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)_{k_1}.$$

Beweis: Es sei die Norm von $\mathfrak{q}$, als Ideal von k_1 aufgefasst, q', dann ist die Norm von $\mathfrak{q}$, als Ideal von K_1 aufgefasst, q''. Bezeichnet man die Relativgruppe von K_1 in bezug auf k_1 mit

$$S^1,\ S^2,\ \ldots\ S^{l-1},\ S^l = 1,$$

so folgt aus

$$\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{q}}\right)_{K_1} = \left(\frac{S^i\Pi}{\mathfrak{q}}\right)_{K_1}$$

das Bestehen der Congruenz:

$$\Pi^{\frac{q''-1}{l}} \equiv (S\Pi)^{\frac{q''-1}{l}} \quad (\mathfrak{q}).$$

Man erkennt nun leicht, dass folgende Gleichung gilt:

$$\frac{q''-1}{l} = (q'-1)(1+la),$$

www.libtool.com.cn

wo a eine ganze rationale Zahl bezeichnet. Es ist folglich auch $\frac{q'^{f}-1}{l^2}$ eine ganze Zahl und demnach gilt:

$$\Pi^{\frac{q'^{f}-1}{l^2}} \equiv \xi(S\Pi)^{\frac{q'^{f}-1}{l^2}} \quad (\mathfrak{q}),$$

wenn ξ eine l^{te} Einheitswurzel bedeutet. Daraus folgt dann:

$$\Pi^{\frac{q'^{f}-1}{l^2}} \equiv \xi^{i}(S^{i}\Pi)^{\frac{q'^{f}-1}{l^2}} \quad (\mathfrak{q}).$$

Bildet man die letzte Congruenz für $i = 0, 1, 2, \ldots . l-1$ und multipliciert die so erhaltenen Congruenzen, so folgt:

$$\Pi^{\frac{q'^{f}-1}{l}} \equiv \pi^{\frac{q'^{f}-1}{l^2}} \quad (\mathfrak{q}).$$

Es ist also

$$\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{q}}\right)_{K_1} \equiv \pi^{\frac{q'^{f}-1}{l^2}} \quad (\mathfrak{q});$$

andererseits ist

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)_{k_1} \equiv \pi^{\frac{q'^{f}-1}{l}} \quad (\mathfrak{q}).$$

Wenn wir daher nachweisen können, dass

$$\pi^{\frac{q'^{f}-1}{l^2}} \equiv \pi^{\frac{q'^{f}-1}{l}} \quad (\mathfrak{q}),$$

so ist unser Satz offenbar bewiesen.

Nun ist, wie oben angeführt:

$$\frac{q'^{f}-1}{l^2} = \frac{q'^{f}-1}{l} \quad (1+la).$$

Folglich ergiebt sich:

$$\pi^{\frac{q'^{f}-1}{l^2}} = \pi^{\frac{q'^{f}-1}{l}(1+la)} = \pi^{\frac{q'^{f}-1}{l}} \cdot \pi^{(q'^{f}-1)a} \equiv \pi^{\frac{q'^{f}-1}{l}} \quad (\mathfrak{q}).$$

Mit Hülfe des eben bewiesenen Satzes können wir jetzt die Richtigkeit des folgenden Satzes erkennen.

Satz 40: Ist $\mathfrak{P}$ ein primäres Primideal in K_1 mit der Primärzahl Π, so dass $(\Pi) = \mathfrak{P}^{HFh\mathfrak{h}'}$; ist ferner $\mathfrak{R}$ ein beliebiges Primideal in K_1 und $\mathfrak{R}^{HFh\mathfrak{h}'} = (P)$, so ist

www.libtool.com.cn

$$\left(\frac{P}{\mathfrak{P}}\right) = \left(\frac{\Pi}{\mathfrak{R}}\right).$$

Beweis: Wir unterscheiden bei dem Beweise mehrere Fälle, je nachdem die Primideale $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$ nur in K_1 oder gleichzeitig in K_1 und k_1 liegen. Wir denken uns dabei im folgenden das eine der betreffenden Primideale immer als primär und nehmen, ohne es ausdrücklich zu sagen, an, dass die dieses Primideal charakterisierende Körperzahl primär gewählt sei.

1) Beide Primideale $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{R} = \mathfrak{r}$ liegen auch in k_1. Ist dann

$$\mathfrak{p}^{HH'hh'} = (\pi), \quad \mathfrak{r}^{HH'hh'} = (\varrho),$$

so ist offenbar nach Satz 35:

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)_{K_1} = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)^{l}_{k_1} = 1 \qquad \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)_{K_1} = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)^{l}_{k_1} = 1.$$

2) Das eine Primideal $\mathfrak{R} = \mathfrak{r}$ liege auch in k_1, das andere $\mathfrak{P}$ nicht. Ist dann

$$\mathfrak{P}^{HH'hh'} = (\Pi), \quad \mathfrak{r}^{HH'hh'} = (\varrho)$$

und bezeichnet $\mathfrak{p}$, π die Relativnorm von $\mathfrak{P}$, Π in bezug auf k_1, so gilt nach Satz 35 und nach Satz 39:

$$\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{r}}\right)_{K_1} = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)_{k_1} = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)_{k_1} = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{P}}\right)_{K_1}.$$

Für diesen Schluss ist es gleichgültig, ob das primäre oder das nichtprimäre Primideal gleichzeitig in K_1 und k_1 liegt.

3) Beide Primideale $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$ liegen nicht in k_1.

Zum Beweise zeigen wir, dass man stets ein primäres Primideal $\mathfrak{P}_1$ bestimmen kann, so dass, wenn $\mathfrak{P}_1^{HH'hh'} = (\Pi_1)$ gesetzt wird:

$$(1) \qquad \left(\frac{\Pi_1}{\mathfrak{P}}\right)_{K_1} = \left(\frac{\Pi}{\mathfrak{P}_1}\right)_{K_1} \neq 1 \qquad \left(\frac{\Pi_1}{\mathfrak{R}}\right)_{K_1} = \left(\frac{P}{\mathfrak{P}_1}\right)_{K_1} \neq 1,$$

und verfahren dann wie bei dem Beweise von Satz 37.

Um die Existenz eines Primideals $\mathfrak{P}_1$ nachzuweisen, wähle man ein primäres Primideal $\mathfrak{p}_1$ in k_1 so, dass

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}_1}\right) \neq 1 \qquad \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right) \neq 1 \qquad \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1,$$

wo π und ϱ die Relativnormen von Π und P in bezug auf k_1 bedeuten.

Die hingeschriebenen Bedingungen widersprechen sich nicht und sind daher

www.libtool.com.cn

stets zu erfüllen[1]). Aus $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}_1}\right) \neq 1$ folgt, dass $\mathfrak{p}_1$ auch Primideal in K_1 ist.

Wenn man dann $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{p}_1$ setzt, so folgt offenbar nach Fall 2, dass die Bedingungen (1) erfüllt sind. Wir haben nur noch zu zeigen, dass $\mathfrak{p}_1$ ein primäres Primideal in K_1 ist. Bezeichnet E eine beliebige Einheit aus K_1 und ist ε die Relativnorm von E genommen in k_1, so ist nach Satz 39:

$$\left(\frac{E}{\mathfrak{p}_1}\right)_{K_1} = \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}_1}\right)_{k_1} = 1;$$

es ist also $\mathfrak{p}_1$ ein primäres Primideal in K_1.

Wir haben damit den Beweis unseres Satzes vollständig erbracht.

Die jetzt folgenden Entwickelungen setzen für den Grundkörper k keine anderen Annahmen voraus, als die bereits in § 4 eingeführten. Wir machen deshalb von jetzt ab in betreff des Grundkörpers k folgende Annahme:

1) Die Klassenzahl von k ist nicht durch l teilbar.

2) Für den Körper k ist das Reciprocitätsgesetz zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal bewiesen.

§ 14.

Die Anzahl der Geschlechter im relativ-cyclischen Körper K mit zu l primer Relativdiscriminante.

Satz 41. Es sei die Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ zu l prim und r die Anzahl der Charaktere, die ein Geschlecht in K bestimmen. Sind dann $c_1, c_2, \ldots c_r$ irgendwelche l^{te} Einheitswurzeln, deren Produkt 1 ist, so giebt es stets in K ein Geschlecht, dessen Charaktere mit $c_1, c_2, \ldots c_r$ übereinstimmen. Die Anzahl aller verschiedenen Geschlechter ist also l^{r-1}.

Beweis: Es seien $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots \mathfrak{d}_t$ die in der Relativdiscriminante von $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ aufgehenden Primideale und

$$\mathfrak{d}_1^{\lambda\lambda'} = (\delta_1) \quad \mathfrak{d}_2^{\lambda_2\lambda_2'} = (\delta_2) \cdots \mathfrak{d}_t^{\lambda_t\lambda_t'} = (\delta_t).$$

Man kann dann nach unserer Annahme über K setzen:

$$\mu = \varepsilon \delta_1^{\varkappa_1} \delta_2^{\varkappa_2} \cdots \delta_t^{\varkappa_t} \alpha^l,$$

1) Man beachte, dass nach Hilbert, A. Z. Satz 94, S. 279 μ nicht das Produkt einer Einheit mit der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl aus k sein kann.

www.libtool.com.cn

wo ε eine Einheit und α eine ganze Zahl aus k bedeutet und wo $e_1, e_2, \ldots e_r$ gewisse Werte $1, 2, \ldots l-1$ haben. Unter den Primidealen $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots \mathfrak{d}_t$ seien nun r, etwa $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots \mathfrak{d}_r$ nach den für die Geschlechtsbestimmung geltenden Vorschriften ausgewählt. Wir bestimmen dann, was stets möglich ist, ein primäres Primideal $\mathfrak{p}$ in k derart, dass

$$\left(\frac{\delta_1^{e_1}}{\mathfrak{p}}\right)^n = c_1, \left(\frac{\delta_2^{e_2}}{\mathfrak{p}}\right)^n = c_2, \ldots \left(\frac{\delta_r^{e_r}}{\mathfrak{p}}\right)^n = c_r; \left(\frac{\delta_{r+1}}{\mathfrak{p}}\right) = 1, \ldots \left(\frac{\delta_t}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \qquad n \not\equiv 0 \ (l).$$

Dann ist

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\delta_1^{e_1}}{\mathfrak{p}}\right) \left(\frac{\delta_2^{e_2}}{\mathfrak{p}}\right) \cdots \left(\frac{\delta_r^{e_r}}{\mathfrak{p}}\right) = 1;$$

folglich ist $\mathfrak{p}$ in K zerlegbar. Ist $\mathfrak{P}$ ein Primfaktor von $\mathfrak{p}$ in K und π eine Primärzahl von $\mathfrak{p}$, so hat $\mathfrak{P}^n$ die Charaktere

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{d}_1}\right)^{e_1 n} = c_1, \quad \left(\frac{\pi}{\mathfrak{d}_2}\right)^{e_2 n} = c_2 \cdots \left(\frac{\pi}{\mathfrak{d}_r}\right)^{e_r n} = c_r,$$

da

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{d}_{r+1}}\right) = 1 \cdots \left(\frac{\pi}{\mathfrak{d}_t}\right) = 1.$$

Damit ist gezeigt, dass ein Geschlecht mit dem Charakterensystem $c_1, c_2, \ldots c_r$ wirklich existiert. Da nun einerseits die Grössen $c_1, c_2, \ldots c_r$ auf l^{r-1} verschiedene Weisen bestimmt werden können, und da die Anzahl der Geschlechter anderseits nicht grösser als l^{r-1} sein kann, so folgt, dass genau l^{r-1} Geschlechter existieren, die die Eigenschaft haben, dass das Charakterenprodukt eines jeden 1 ist.

§ 15.

Das Produkt $\prod_{(\mathfrak{w})}' \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$.

Satz 42. Sind ν, μ zwei ganze zu l prime Zahlen in k und ist

$$\mu \equiv \gamma^{l^r} (l^r),$$

wo γ eine ganze Zahl aus k bedeutet, so ist das über alle zu l primen Primideale $\mathfrak{w}$ in k zu erstreckende Produkt

$$\prod_{(\mathfrak{w})}' \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = 1.$$

Beweis: Wir bemerken vorweg, dass die Relativdiscriminante des Kör-

www.libtool.com.cn

pers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ zu $\mathfrak{l}$ prim ist und dass daher der im vorigen § bewiesene Satz für K gilt.

Wir unterscheiden nun beim Beweise drei Fälle, indem wir von vornherein annehmen, dass ν und μ keinen gemeinsamen Teiler haben, weil wir die entgegengesetzte Annahme leicht auf die angegebene zurückführen können:

1) ν ist die Primärzahl π eines primären Primideals in k.

Wir behalten die Bezeichnungen des vorigen § bei und setzen

$$\mu = \varepsilon \delta_1^{\varkappa_1} \delta_2^{\varkappa_2} \ldots \delta_t^{\varkappa_t} \alpha^l.$$

Es ist dann:

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\pi, \varepsilon}{\mathfrak{w}}\right) \cdot \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\pi, \delta_1^{\varkappa_1}}{\mathfrak{w}}\right) \cdots \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\pi, \delta_t^{\varkappa_t}}{\mathfrak{w}}\right) \cdot \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\pi, \alpha^l}{\mathfrak{w}}\right).$$

Da nun alle Einzelprodukte rechts, wie man leicht erkennt, den Wert 1 haben ist auch:

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = 1.$$

2) ν ist eine Einheit η aus k.

Man bestimme ein primäres Primideal $\mathfrak{p}$ in k derart, dass

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

$$\left(\frac{\delta_{r+1}^{\varkappa_{r+1}}}{\mathfrak{p}}\right)^n = \left(\frac{\eta^{\varkappa_{r+1}}}{\mathfrak{d}_{r+1}}\right) \cdots \left(\frac{\delta_t^{\varkappa_t}}{\mathfrak{p}}\right)^n = \left(\frac{\eta^{\varkappa_t}}{\mathfrak{d}_t}\right).$$

$\mathfrak{p}$ ist in k zerlegbar. Ist π eine Primärzahl von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}$ ein Primfaktor von $\mathfrak{p}$ in K, so ist das Charakterenprodukt von $\mathfrak{P}^{n'}$ in K gleich 1, wo $n+n' \equiv 0\,(l)$ sein soll.

Da nun:

$$\left(\frac{\eta\pi^{n'}, \mu}{\mathfrak{d}_i}\right) = \left(\frac{\eta\pi^{n'}}{\mathfrak{d}_i}\right)^{\varkappa_i} = \left(\frac{\eta^{\varkappa_i}}{\mathfrak{d}_i}\right) \cdot \left(\frac{\pi^{\varkappa_i}}{\mathfrak{d}_i}\right)^{n'} = \left(\frac{\eta^{\varkappa_i}}{\mathfrak{d}_i}\right)\left(\frac{\delta_i^{\varkappa_i}}{\mathfrak{p}}\right)^{n'} = 1 \quad (i = r+1, r+2, \cdots t)$$

ist, so muss

$$\left(\frac{\eta\pi^{n'}, \mu}{\mathfrak{d}_1}\right)\left(\frac{\eta\pi^{n'}, \mu}{\mathfrak{d}_2}\right) \cdots \left(\frac{\eta\pi^{n'}, \mu}{\mathfrak{d}_r}\right) = 1 \quad \text{sein.}$$

Folglich ist:

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\eta\pi^{n'}, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = 1.$$ Da anderseits nach Fall 1

www.libtool.com.cn

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\pi^{n'}, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{w}}\right)^{n'} = 1$$

ist, so folgt

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\eta, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = 1.$$

3) Es sei $(\nu) = (\varkappa) = \mathfrak{q}^{hh'}$, wo $\mathfrak{q}$ ein nicht primäres Primideal in k ist.

a) Es sei $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right) = 1.$

$\mathfrak{q}$ ist dann in K zerlegbar und es folgt nach dem Satze des vorigen Paragraphen, wenn ξ eine geeignete Einheit bedeutet:

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\xi\varkappa, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = 1.$$

Da aber

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\xi, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = 1$$

ist, muss auch

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\varkappa, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = 1 \qquad \text{sein.}$$

b) $$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right) = \zeta^a \qquad a \not\equiv 0 \ (l).$$

Man bestimme ein primäres Primideal $\mathfrak{p}$ in k so, dass $\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)^h = \zeta^{-a}$ wird, dann ist auch, wenn π eine Primärzahl von $\mathfrak{p}$ bedeutet, $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)^h = \zeta^{-a}$, und es gilt:

$$\left(\frac{\mu\pi^h}{\mathfrak{q}}\right) = 1.$$

Folglich ergiebt sich nach 3a

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\varkappa, \mu\pi^h}{\mathfrak{w}}\right) = 1.$$

Da aber $$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\varkappa, \pi^h}{\mathfrak{w}}\right) = \left\{\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)^{-1}\right\}^h = 1$$

ist, so folgt $$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\varkappa, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = 1.$$

Bedenkt man endlich, dass

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu^{hh'}, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$$

www.libtool.com.cn

ist und dass sich $\nu^{hh'}$ immer als ein Produkt von solchen Zahlen darstellen lässt, wie sie in den 3 Fällen betrachtet worden sind, so erkennt man die allgemeine Gültigkeit des zu beweisenden Satzes.

Wir führen noch 2 Folgerungen des eben bewiesenen Satzes an:

Satz 43. Bedeuten ν, μ, ν^*, μ^* irgendwelche zu l prime ganze Zahl in k, die den Congruenzen

$$\nu\nu^* \equiv \alpha^l, \quad \mu\mu^* \equiv \beta^l \ (\mathfrak{l}^l) \qquad \text{genügen},$$

wo α und β ganze Zahlen aus k sind, und ist ν zu μ, ν^* zu μ^* relativprim, so ist

$$\left(\frac{\nu}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{-1} = \left(\frac{\nu^*}{\mu^*}\right)\left(\frac{\mu^*}{\nu^*}\right)^{-1}.$$

Bedeuten ν, μ zwei zu einander und zu l prime ganze Zahlen in k, von denen wenigstens eine der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}^l$ congruent ist, so ist

$$\left(\frac{\nu}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{-1} = 1.$$

Beweis: Es ist

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu\nu^*, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = 1 = \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) \cdot \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu^*, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$$

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu^*, \mu\mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = 1 = \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu^*, \mu}{\mathfrak{w}}\right) \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu^*, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right),$$

folglich

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu^*, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right), \text{ d. h. } \left(\frac{\nu}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{-1} = \left(\frac{\nu^*}{\mu^*}\right) \cdot \left(\frac{\mu^*}{\nu^*}\right)^{-1}.$$

Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus dem zu Anfang des Paragraphen aufgestellten Satz.

§ 16.

Das primäre Ideal.

Satz 44. Ist $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal, so kann man stets in k eine ganze Zahl α finden, so dass $(\alpha) = \mathfrak{a}^{hh'}$ wird und überdies α der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}^l$ congruent wird. α ist bis auf die l^{te} Potenz einer Einheit bestimmt; wir nennen α eine Primärzahl von $\mathfrak{a}$.

Beweis: Es sei $(\alpha^*) = \mathfrak{a}^{hh'}$. Haben dann $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots \mathfrak{q}_{m'}$, $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_m$, die früher angegebene Bedeutung, so können wir die Congruenz hinschreiben:

www.libtool.com.cn

$$\alpha^* \equiv \varepsilon^* \varkappa_1^{\nu_1} \ldots \varkappa_{m'}^{\nu_{m'}} \beta^l \ (\mathfrak{l}^l),$$

wo ε^* eine Einheit und β eine ganze Zahl aus k bedeutet und wo ferner $\nu_1, \ldots \nu_{m'}$ gewisse Werte $0, 1, \ldots l-1$ haben.

Es gilt dann für jede Einheit ξ in k

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\xi, \alpha^{*l-1} \varepsilon^* \varkappa_1^{\nu_1} \ldots \varkappa_{m'}^{\nu_{m'}}}{\mathfrak{w}} \right) = 1.$$

Wählen wir nun für ξ der Reihe nach $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{m'}$, so folgt:

$$\nu_1 = \nu_2 = \ldots \nu_{m'} = 0. \quad \text{Es ist daher } \alpha^* \varepsilon^{*l-1}$$

eine Zahl der gewünschten Art.

Satz 45. Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in k und kann man $\mathfrak{a}^{hh'} = (\alpha)$ setzen, wo α der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}^l$ congruent ist, so ist $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal.

Beweis: Man erhält den Beweis, indem man in Satz 42 μ gleich α setzt und für ν irgend eine Einheit aus k nimmt.

IV.

Das hyperprimäre Ideal.

§ 17.

Definition des hyperprimären Ideals und der hyperprimären Zahl in k.

Definition 8. Es seien $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots \mathfrak{l}_s$ die sämmtlichen von einander verschiedenen in $\mathfrak{l}$ aufgehenden Primideale und zwar möge $\mathfrak{l}_1$ genau zu l_1^{ten}, $\mathfrak{l}_2$ genau zur l_2^{ten}, $\ldots \mathfrak{l}_s$ genau zur l_s^{ten} Potenz in $\mathfrak{l}$ aufgehen, so dass

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1^{l_1} \mathfrak{l}_2^{l_2} \ldots \mathfrak{l}_s^{l_s} \quad \text{wird.}$$

Es sei ferner:

$$\mathfrak{l}_1^{hh'} = (\lambda_1) \qquad \mathfrak{l}_2^{hh'} = (\lambda_2) \ldots \mathfrak{l}_s^{hh'} = (\lambda_s).$$

Wenn dann das zu $\mathfrak{l}$ prime Ideal $\mathfrak{p}$ in k primär ist und überdies die Bedingungen erfüllt:

$$\left(\frac{\lambda_i}{\mathfrak{p}} \right) = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots s),$$

so soll $\mathfrak{p}$ ein hyperprimäres Ideal heissen.

www.libtool.com.cn

Definition 9. Eine ganze Zahl μ in k soll eine hyperprimäre Zahl heissen, wenn sie zu $\mathfrak{l}$ prim ist und der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{ll_1+1}\mathfrak{l}_2^{ll_2+1}\ldots\mathfrak{l}_s^{ll_s+1}$ congruent ist.

Ueber die hyperprimären Zahlen in k können wir folgenden Satz beweisen:

Satz 46. Ist μ eine hyperprimäre und ν eine beliebige Zahl in k, so ist das über alle zu $\mathfrak{l}$ primen Primideale in k zu erstreckende Produkt

$$\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=1.$$

Beweis: Es sei

$$\nu=\pi\cdot\mathfrak{l}_1^{e_1}\mathfrak{l}_2^{e_2}\cdots\mathfrak{l}_s^{e_s},$$

wo π ein zu $\mathfrak{l}$ primes Ideal und $e_1, e_2, \ldots e_s$ ganze rationale Zahlen bedeuten.

Die Ideale $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots \mathfrak{l}_s$ werden im Körper $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ sämmtlich zerlegbar; es sei $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots \mathfrak{L}_s$ je ein Primfaktor von $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots \mathfrak{l}_s$ in K. Es sei ferner A eine ganze Zahl aus K, so dass

$$\frac{A}{\mathfrak{L}_1^{e_1}\ldots\mathfrak{L}_s^{e_s}}$$

ein zu $\mathfrak{l}$ primes Ideal wird. Die Relativnorm α von A hat dann die Gestalt:

$$\alpha=\mathfrak{a}\mathfrak{l}_1^{e_1}\mathfrak{l}_2^{e_2}\ldots\mathfrak{l}_s^{e_s},\qquad \text{wo } \mathfrak{a} \text{ ein zu } \mathfrak{l}$$

primes Ideal bedeutet, und es lässt sich deshalb $\frac{\nu}{\alpha}$ als ein Bruch $\frac{\varrho}{\sigma}$ darstellen, dessen Zähler und Nenner zu $\mathfrak{l}$ prim ist.

Da nun:

$$\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\alpha,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=1\qquad\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\varrho,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=1\qquad\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\sigma,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=1,$$

so folgt

$$\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\nu\sigma,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\alpha\varrho,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=\prod_{(\mathfrak{w})}'\left(\frac{\alpha,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=1.$$

§ 18.

Ein gewisses System von $m'+s$ zu l primen Primidealen in k.

Satz 47. Es mögen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{m'}$, $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots \mathfrak{q}_{m'}$, $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_{m'}$ dieselbe Bedeutung wie in Satz 27 haben.

Wir bestimmen dann s primäre Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_s$ mit den Primärzahlen $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_s$ so, dass

www.libtool.com.cn

$$\left(\frac{\lambda_i}{\mathfrak{p}_i}\right) \neq 1 \qquad \left(\frac{\lambda_k}{\mathfrak{p}_i}\right) = 1 \qquad (i \neq k) \qquad \text{wird}$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots s).$$

Wir behaupten dann, dass für jede zu $\mathfrak{l}$ prime Zahl ω in k eine Congruenz von der Gestalt gilt:

$$\omega \equiv \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{w'}^{u_{w'}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{w'}^{v_{w'}} \pi_1^{w_1} \ldots \pi_s^{w_s} \cdot \alpha^l (\mathfrak{l}_1^{il_1+1} \mathfrak{l}_2^{il_2+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{il_s+1}),$$

wo die Exponenten $u_1, u_2, \ldots u_{w'}, v_1, \ldots v_{w'}, w_1, \ldots w_s$ gewisse Werte $0, 1, \ldots l-1$ haben und α eine geeignete ganze Zahl aus k bedeutet.

Beweis: Wir zeigen, dass eine Zahl

$$\mu = \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{w'}^{u_{w'}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{w'}^{v_{w'}} \pi_1^{w_1} \ldots \pi_s^{w_s}$$

nicht der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}_1^{il_1+1} \mathfrak{l}_2^{il_2+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{il_s+1}$ congruent werden kann, wenn nicht sämmtliche Exponenten, die wir kleiner als l annehmen, verschwinden.

Angenommen, es gäbe eine solche Zahl μ. Wir betrachten dann den Körper $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$, der eine zu $\mathfrak{l}$ prime Relativdiscriminante hat, und schliessen nach dem Beweise zu Satz 27, dass $u_1 = \ldots u_{w'} = v_1 = \ldots v_{w'} = 0$ sein muss. In der Relativdiscriminante von K können dann nur die Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_s$ vorkommen und zwar mögen

$$\mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_t$$

in derselben aufgehen, wo $t > 0$ ist. Es giebt dann in K genau l^{t-1} Geschlechter, deren jedes das Charakterenprodukt 1 besitzt.

Das Primideal $\mathfrak{l}_1$ zerfällt in K und wir erhalten als Charaktere eines Primfaktors von ihm:

$$\left(\frac{\lambda_1, \mu}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}_1}\right)^{w_1} \ldots \left(\frac{\lambda_1, \mu}{\mathfrak{p}_t}\right) = \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}_t}\right)^{w_t}.$$

Es müsste also:

$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}_1}\right)^{w_1} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}_2}\right)^{w_2} \ldots \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}_t}\right)^{w_t} = 1$$

sein, was unmöglich ist, da $w_1 \neq 0$ sein sollte. Es kann also eine Zahl μ von der angegebenen Beschaffenheit nicht existieren, wenn nicht sämmtliche Exponenten u, v, w verschwinden.

Wir setzen jetzt zur Abkürzung

$$N_1 = n\,(\mathfrak{l}_1)^{l_1}\,[n(\mathfrak{l}_1) - 1]$$

www.libtool.com.cn

und verstehen unter

$$\alpha_1^{(1)} \ldots \alpha_1^{(N_1)}$$

ein volles System von ganzen zu $\mathfrak{l}_1$ primen und nach $\mathfrak{l}_1^{l_1+1}$ einander incongruenten Zahlen, die überdies sämmtlich congruent 1 nach $\mathfrak{l}_2^{l_2+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{l_s+1}$ sein sollen.

Da offenbar

$$\alpha_1^{(i)} \not\equiv \zeta^a \alpha_1^{(i)} \ (\mathfrak{l}_1^{l_1+1}) \qquad (a = 1, 2, \ldots l-1),$$

so kann man aus der Reihe der Zahlen α zunächst $l-1$ Zahlen ausscheiden, die $\zeta^a \alpha_1^{(1)}$ $(a = 1, 2, \ldots l-1)$ congruent sind. Wenn man das Verfahren fortsetzt, so erhält man schliesslich ein System von $\frac{N_1}{l}$ Zahlen $\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \ldots \alpha_1^{\left(\frac{N_1}{l}\right)}$, die die Eigenschaft haben, dass

$$\alpha_1^{(i)} \not\equiv \zeta^a \alpha_1^{(k)} \quad \text{ist} \quad \left(i, k = 1, 2, \ldots \frac{N_1}{l}\right) \quad (a = 0, 1, 2 \ldots l-1).$$

In genau gleicher Weise verfahre ich in bezug auf $\mathfrak{l}_2, \ldots \mathfrak{l}_s$, indem ich die Zahlsysteme

$$\begin{matrix} \alpha_2^{(1)}, \ldots \alpha_2^{\left(\frac{N_2}{l}\right)} \\ \ldots\ldots \\ \alpha_s^{(1)}, \ldots \alpha_s^{\left(\frac{N_s}{l}\right)} \end{matrix}$$

aufstelle. Der Ausdruck:

$$(1) \qquad \varepsilon^{u_1} \ldots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{m'}^{v_{m'}} \pi_1^{w_1} \ldots \pi_s^{w_s} (\alpha_1^{(i_1)})^l \ldots (\alpha_s^{(i_s)})^l$$

$$u_1 \ldots u_{m'}, v_1 \ldots v_{m'}, w_1, \ldots w_s = 0, 1, \ldots l-1; \quad i = 1, 2 \ldots \frac{N}{l}$$

stellt dann ein System von $l^{2m'} N_1 . N_2 \ldots N_s$ ganzen Zahlen in k dar. Diese sind sämmtlich zu $\mathfrak{l}$ prim und nach $\mathfrak{l}_1^{ll_1+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{ll_s+1}$ einander incongruent. Denn aus dem Bestehen einer Congruenz zwischen zweien von ihnen würde, wenn wir die Ausführungen zu Anfang dieses Satzes berücksichtigen, folgen, dass eine Congruenz

$$(2) \qquad (\alpha_1^{(i_1)})^l \ldots (\alpha_s^{(i_s)})^l \equiv (\alpha_1^{(i'_1)})^l \ldots (\alpha_s^{(i'_s)})^l \qquad (\mathfrak{l}_1^{ll_1+1} \mathfrak{l}_2^{ll_2+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{ll_s+1})$$

besteht, wo die rechte und linke Seite von einander verschieden sind. Aus dieser Congruenz würde dann folgen:

www.libtool.com.cn

$$(\alpha_1^{(i_1)})^l \equiv (\alpha_1^{(i_1')})^l \quad (\mathfrak{l}_1^{l_1+1})$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(\alpha_s^{(i_s)})^l \equiv (\alpha_s^{(i_s')})^l \quad (\mathfrak{l}_s^{l_s+1}).$$

Aus der ersten Congruenz ergiebt sich weiter:

$$\alpha_1^{(i_1)} \equiv \zeta^a \alpha_1^{(i_1')} \quad (\mathfrak{l}_1^{l_1+1}),$$

wo a einen der Werte 0, 1, 2, ... $l-1$ hat. Es muss folglich $i_1 = i_1'$ sein. Ebenso würde folgen $i_2 = i_2', \ldots i_s = i_s'$. Dies widerspricht aber der Annahme, dass die linke und rechte Seite in (2) verschieden sind. Es können daher nicht 2 Zahlen des angegebenen Systems nach $\mathfrak{l}_1^{l_1+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{l_s+1}$ congruent sein. Anderseits giebt es nach dem genannten Modul genau $l^{2m'} \cdot N_1 \cdot N_2 \ldots N_s$ zu $\mathfrak{l}$ prime und einander incongruente Zahlen. Mithin ist unser Satz bewiesen.

§ 19.

Das hyperprimäre Ideal in k.

Satz 48. Ist $\mathfrak{a}$ ein hyperprimäres Ideal in k, so lässt sich stets eine hyperprimäre Zahl α in k bestimmen, so dass

$$\mathfrak{a}^{hh'} = (\alpha) \qquad \text{wird.}$$

Beweis: Es sei $\mathfrak{a}^{hh'} = (\alpha^*)$, dann kann man setzen:

$$\alpha^* \equiv \varepsilon^* \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_{m'}^{v_{m'}} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_s^{w_s} \gamma^l \qquad (\mathfrak{l}_1^{l_1+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{l_s+1});$$

es ist also

$$\mu = \alpha^{*l-1} \cdot \varepsilon^* \varkappa_1^{v_1} \cdots \varkappa_{m'}^{v_{m'}} \pi_1^{w_1} \cdots \pi_s^{w_s}$$

eine ganze Zahl in k, die der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl nach $\mathfrak{l}_1^{l_1+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{l_s+1}$ congruent ist. Folglich ist nach Satz 46:

$$\begin{cases} \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varepsilon_1, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = 1 \cdots \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varepsilon_{m'}, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = 1 \\ \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\lambda_1, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = 1 \cdots \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\lambda_s, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = 1. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt leicht:

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_{m_1} = 0 \qquad w_1 = w_2 = \cdots = w_s = 0.$$

Es ist demnach $\varepsilon^{*l-1}\alpha^*$ eine hyperprimäre Zahl der gewünschten Art.

www.libtool.com.cn

Satz 49. Ist α eine hyperprimäre Zahl in k, so ist

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1 \cdot \cdot \cdot \left(\frac{\varepsilon_{w'}}{\alpha}\right) = 1$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\alpha}\right) = 1 \cdot \cdot \cdot \left(\frac{\lambda_s}{\alpha}\right) = 1.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 46.

V.

Das allgemeine Reciprocitätsgesetz in k und der erste Ergänzungssatz zu demselben.

§. 20.

Definition des Symbols $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_i}\right)$ für irgend welche zu l prime ganze Zahlen ν, μ.

Definition 10. Es sei:

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_i^{l'_i}\mathfrak{L},$$

wo $\mathfrak{L}$ zu $\mathfrak{l}_i$ prim sein soll.

Wir definieren dann:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_i}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)^{-1},$$

indem wir μ^* aus den Congruenzen bestimmen:

$$\mu^* \equiv \mu \quad (\mathfrak{l}_i^{l'_i})$$

$$\mu^* \equiv \alpha^l \quad (\mathfrak{L}^l),$$

wo α eine beliebige ganze Zahl aus k bedeutet, und das Produkt Π' über alle zu $\mathfrak{l}$ primen Primideale in k zu erstrecken ist.

Die vorstehende Definition ist eindeutig. Denn ist etwa:

$$\mu_0^* \equiv \mu \quad (\mathfrak{l}_i^{l'_i})$$

$$\mu_0^* \equiv \alpha_0^l \quad (\mathfrak{L}^l),$$

so lässt sich eine ganze Zahl β aus k so bestimmen, dass

$$\mu^* \equiv \beta^l \mu_0^* \quad (\mathfrak{l}^l) \qquad \text{wird.}$$

www.libtool.com.cn

Dann ist aber nach Satz 42

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu, \mu^* \mu_0^{l-1}}{\mathfrak{w}}\right) = 1 \text{ oder } \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu, \mu_0^*}{\mathfrak{w}}\right).$$

Aus der vorstehenden Definition folgen für das definierte Symbol die Rechenregeln:

$$\left(\frac{\nu\nu', \mu}{\mathfrak{l}_i}\right) = \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_i}\right) \cdot \left(\frac{\nu', \mu}{\mathfrak{l}_i}\right)$$

$$\left(\frac{\nu, \mu\mu'}{\mathfrak{l}_i}\right) = \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_i}\right) \cdot \left(\frac{\nu, \mu'}{\mathfrak{l}_i}\right).$$

§ 21.

Zwei Hülfssätze über die Normenreste des Körpers K nach $\mathfrak{l}_1$.

Satz 50. (Hülfssatz). Sind ν, ν', μ, μ' beliebige zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahlen aus k und ist

a) $\nu \equiv \nu' \alpha^l \ (\mathfrak{l}_1^{l_1+1})$, wo α eine ganze Zahl aus k und $\mathfrak{l}_1$ ein Primideal bedeutet, das in $\mathfrak{l}$ genau zur l_1^{ten} Potenz aufgeht, so sind ν und ν' gleichzeitig Normenreste oder Normennichtreste des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$.

b) Ist $\mu \equiv \mu' \beta^l \ (\mathfrak{l}_1^{l_1+1})$, wo β wieder eine ganze Zahl aus k bedeutet, so ist ν gleichzeitig Normenrest oder Normennichtrest der Körper

$$K(\sqrt[l]{\mu}, k) \quad \text{und} \quad K'(\sqrt[l]{\mu'}, k) \quad \text{nach} \quad \mathfrak{l}_1.$$

Beweis:

a) Ist ν Normenrest von $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$, also

$$\nu \equiv N_k(A) \ (\mathfrak{l}_1^{l_1+1}),$$

so ist

$$\nu' \equiv N_k(A\alpha') \ (\mathfrak{l}_1^{l_1+1}),$$

wenn

$$\alpha\alpha' \equiv 1 \ (\mathfrak{l}_1^{l_1+1})$$

ist.

Folglich ist auch ν' Normenrest von $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$.

Das Analoge gilt umgekehrt.

b) Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich keine der beiden Zahlen oder eine der beiden Zahlen μ und μ' die l^{te} Potenz einer ganzen Zahl in k ist. Der dritte noch denkbare Fall, dass beide Zahlen μ und μ' l^{te} Potenzen von ganzen Zahlen in k sind, erledigt sich offenbar sofort.

1) Keine der beiden Zahlen μ und μ' ist die l^{te} Potenz einer ganzen Zahl in k.

www.libtool.com.cn

Soll ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$ sein, so muss eine Congruenz:

$$(1) \qquad \nu \equiv N_k \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \sqrt[l]{\mu} + \alpha_2 \sqrt[l]{\mu^2} + \cdots \alpha_{l-1} \sqrt[l]{\mu^{l-1}}}{\beta_0} \quad (\mathfrak{l}_1^n)$$

bestehen, wo $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{l-1}, \beta_0$ ganze Zahl aus k und N eine ganze rationale Zahl, die grösser als $ll_1 + 1$ ist, bezeichnet. Es sei nun β_0 genau durch $\mathfrak{l}_1^e$ teilbar. Wir bestimmen dann, was stets möglich ist, eine ganze Zahl β_N aus k, so dass

$$\mu \equiv \mu' \beta_N^l \quad (\mathfrak{l}_1^{N+le}),$$

und bilden die Zahl:

$$A^* = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \beta_N \sqrt[l]{\mu'} + \alpha_2 \beta_N^2 \sqrt[l]{\mu'^2} + \ldots \alpha_{l-1} \beta_N^{l-1} \sqrt[l]{\mu'^{l-1}}}{\beta_0} \cdot \delta,$$

wo δ zu $\mathfrak{l}_1$ prim und durch $\frac{\beta_0}{\mathfrak{l}_1^e}$ teilbar sein soll. A^* ist dann, wie leicht zu erkennen ist, eine ganze Zahl in $K(\sqrt[l]{\mu'}, k)$. Bestimmen wir nun δ' so, dass

$$\delta\delta' \equiv 1 \quad (\mathfrak{l}_1^n)$$

wird, so ist

$$N_k(A^*\delta') \equiv \nu \quad (\mathfrak{l}_1^n),$$

wie wir aus (1) schliessen, es ist also ν auch Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu'}, k)$ nach l_1.

2) μ' ist die l^{te} Potenz einer ganzen Zahl in k; es ist dann μ der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}_1^{ll_1+1}$ congruent und es muss gezeigt werden, dass unter dieser Voraussetzung jede ganze zu $\mathfrak{l}_1$ prime Zahl ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$ ist.

Zum Beweise bestimmen wir eine Zahl ganze μ^*, die nicht l^{te} Potenz einer Zahl aus k ist, derart, dass

$$\mu^* \equiv \mu \ (\mathfrak{l}_1^{ll_1+1})$$

$$\mu^* \equiv 1 \ (\mathfrak{l}_2^{ll_2} \ldots \mathfrak{l}_s^{ll_s})$$

wird.

Ferner bestimmen wir ein Primideal $\mathfrak{p}$ derart, dass:

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{p}}\right)^n = \left(\frac{\varepsilon_1}{\mu^*}\right)^{-1} \cdots \left(\frac{\varepsilon_{m'}}{\mathfrak{p}}\right)^n = \left(\frac{\varepsilon_{m'}}{\mu^*}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}}\right)^n = \left(\frac{\lambda_1}{\mu^*}\right)^{-1} \cdots \left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{p}}\right)^n = \left(\frac{\lambda_s}{\mu^*}\right)^{-1},$$

wo n einen durch l nicht teilbaren Exponenten bedeutet. Wir haben dann, wenn wir $\mathfrak{p}^n\mu^* = \mathfrak{a}$ setzen:

www.libtool.com.cn

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{a}\right) = 1 \cdots \left(\frac{\varepsilon_{m'}}{a}\right) = 1$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{a}\right) = 1 \cdots \left(\frac{\lambda_s}{a}\right) = 1$$

d. h. a ist ein hyperprimäres Ideal, und wir können deshalb eine hyperprimäre Zahl α bestimmen, so dass

$$(\alpha) = a^{hh'} = (\mathfrak{p}^n \mu^*)^{hh'}.$$

Setzen wir dann

$$\pi = \frac{\alpha}{\mu^{*hh'}}, \quad \text{so ist offenbar} \quad (\pi) = \mathfrak{p}^{nhh'}.$$

Wir bestimmen nun weiter das Primideal $\mathfrak{q}$ so, dass

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{q}}\right)^{n'} = \left(\frac{\varepsilon_1}{\nu}\right)^{-1} \cdots \left(\frac{\varepsilon_{m'}}{\mathfrak{q}}\right)^{n'} = \left(\frac{\varepsilon_{m'}}{\nu}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{q}}\right)^{n'} = \left(\frac{\lambda_1}{\nu}\right)^{-1} \cdots \left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{q}}\right)^{n'} = \left(\frac{\lambda_s}{\nu}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right) = +1.$$

Setzen wir dann $\mathfrak{q}^{n'}\nu = \mathfrak{b}$, so ist offenbar $\mathfrak{b}$ wieder ein hyperprimäres Ideal und wir können eine hyperprimäre Zahl β so bestimmen, dass

$$(\beta) = (\mathfrak{q}^{n'}\nu)^{hh'}$$

wird.

Setzen wir nun $\varkappa = \frac{\beta}{\nu^{hh'}}$, so wird

$$(\varkappa) = \mathfrak{q}^{n'hh'},$$

wo n' einen nicht durch l teilbaren Exponenten bedeutet.

Da jetzt:

$$\pi\mu^* = \frac{\alpha}{\mu^{*hh'-1}} \qquad \varkappa\nu = \frac{\beta}{\nu^{hh'-1}},$$

so folgt, nach dem bereits Bewiesenen, wenn wir die Eigenschaften der Zahlen α und β berücksichtigen, dass ν dann Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu^*}, k)$, also auch des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$ wird, wenn $\varkappa$ Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$ wird.

Da π der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}'$ congruent wird, so

www.libtool.com.cn

kann die Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$ nur den Primfaktor $\mathfrak{p}$ enthalten. Es ist also $t = 1$ und daher nach Satz 19:

$$v^* > m' - 1.$$

Hieraus folgt $v^* = m'$, d. h. jede Einheit in k ist Relativnorm einer Einheit in $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$.

Da auch $v = m'$ sein muss, so ist die Anzahl aller ambigen Complexe in K gleich 1; der einzige ambige Complex in K ist also der Hauptcomplex.

Diese Thatsache benutzen wir zum Beweise dafür, dass die Classenzahl des Körpers $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$ nicht durch l teilbar ist. Wäre dies nämlich der Fall, so müsste es (vergl. Hilbert, A. Z. Satz 57) ein Ideal $\mathfrak{J}$ in K geben, so dass

$$\mathfrak{J} \not\sim 1, \qquad \mathfrak{J}^l \sim 1$$

wäre.

Dieses Ideal könnte nicht dem Hauptcomplex angehören. Denn wäre $\mathfrak{J} \sim j$, wo j ein Ideal aus k bedeutet, so müsste $\mathfrak{J}^h \sim j^h \sim 1$ sein und da $h \not\equiv 0 \ (l)$ ist, müsste $\mathfrak{J} \sim 1$ sein, was nicht möglich ist.

Es sei nun C die Idealclasse in K, der $\mathfrak{J}$ angehört, dann ist

$$C \not\sim 1 \qquad C^l \sim 1.$$

Wir setzen dann

$$C \sim C^{(1)} SC$$

und behaupten, dass

$$C^{(1)} = C^{(1-s)}$$

nicht dem Hauptcomplex angehören kann. Wenn nämlich $C^{(1-s)}$ dem Hauptcomplexe angehörte, so müsste (vergl. Hilbert A. Z. S. 468) C eine ambige Klasse sein, also selbst dem Hauptcomplexe angehören, was gegen unsere Annahme ist. Fahren wir jetzt fort und bilden:

$$\begin{aligned}
C^{(2)} &= (C^{(1)})^{(1-s)} = C^{(1-s)^2} \\
C^{(3)} &= (C^{(2)})^{(1-s)} = (C^{(1)})^{(1-s)^2} = C^{(1-s)^3} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C^{(l)} &= (C^{(l-1)})^{(1-s)} = (C^{(l-2)})^{(1-s)^2} = \cdots C^{(1-s)},
\end{aligned}$$

so könnten alle diese Klassen $C^{(2)}, C^{(3)}, \ldots C^{(l)}$ nicht dem Hauptcomplex angehören, da C ihm nicht angehört. Andererseits ist aber sicher:

$$C^{(1-s)^l} \sim 1.$$

Unsere Annahme, dass die Klassenzahl von K durch l teilbar sei, führt also zu einem Widerspruch und ist deshalb zu verwerfen.

www.libtool.com.cn

Wegen $\left(\frac{\pi}{q}\right) = 1$, zerfällt q im Körper $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$.

Es sei $\mathfrak{Q}$ ein Primfaktor von q in K. Wir können dann, wenn wir die Klassenzahl in K mit H bezeichnen und H' so bestimmen, dass

$$HH' \equiv 1 \ (l)$$

wird,

$$\mathfrak{Q}^{n'hh'HH'} = (A)$$

setzen, wo A eine ganze Zahl aus K bedeutet. Dann ist aber $q^{n'hh'HH'}$ gleich der Relativnorm des Hauptideals (A), und wir haben folglich, wenn wir mit ε eine geeignete Einheit aus k bezeichnen:

$$\varepsilon \varkappa^{HH'} = N_k (A).$$

Da nun, wie bereits bewiesen, ε die Relativnorm einer Einheit E in K ist, so folgt, wenn wir $\varkappa'$ als ganze Zahl in k so bestimmen, dass

$$\varkappa\varkappa' \equiv 1 \ (\mathfrak{l}_1^{l_1+1})$$

ist, dass

$$\varkappa \equiv N_k (AE^{-1} . \varkappa'^{\frac{HH'-1}{l}}) \qquad (\mathfrak{l}_1^{l_1+1}).$$

Folglich ist $\varkappa$ Normenrest von $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$ und damit ist unser Satz bewiesen.

Satz 51. Sind ν und μ zwei zu $\mathfrak{l}_1$ prime ganze Zahlen in k und ist

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1,$$

so ist ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$.

Beweis: Wir setzen:

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1^{l_1} \mathfrak{L},$$

wo $\mathfrak{L}$ zu $\mathfrak{l}_1$ prim ist, und bestimmen eine Zahl μ^* derart, dass

$$\mu^* \equiv \mu \ (\mathfrak{l}_1^{l_1+1})$$

$$\mu^* \equiv 1 \ (\mathfrak{L}^l).$$

Darauf bestimmen wir ein Primideal $\mathfrak{p}$ in k derart, dass für einen geeigneten zu l primen Exponenten n:

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{p}^n \mu^*}\right) = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots m')$$

www.libtool.com.cn

$$\left(\frac{\lambda_k}{\mathfrak{p}^n\mu^*}\right) = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots s).$$

$\mathfrak{p}^n\mu^*$ ist dann ein hyperprimäres Ideal und wir können daher eine hyperprimäre Zahl α so wählen, dass

$$(\alpha) = \mathfrak{p}^{n\lambda\lambda'} \cdot \mu^{*\lambda\lambda'}.$$

Wir setzen

$$\varkappa = \frac{\alpha}{\mu^{*\lambda\lambda'}} \qquad \text{und haben dann} \qquad (\varkappa) = \mathfrak{p}^{\lambda\lambda' n}.$$

In entsprechender Weise bestimmen wir jetzt das Primideal $\mathfrak{q}$ derart, dass für einen geeigneten zu l primen Exponenten n':

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}^{n'}\nu}\right) = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots m')$$

$$\left(\frac{\lambda_k}{\mathfrak{q}^{n'}\nu}\right) = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots s)$$

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right) = 1.$$

$\mathfrak{q}^{n'}\nu$ ist wieder ein hyperprimäres Ideal und wir können deshalb die hyperprimäre Zahl β so bestimmen, dass

$$(\beta) = \mathfrak{q}^{n'\lambda\lambda'}\nu^{\lambda\lambda'}$$

ist. Setzen wir $\varkappa = \frac{\beta}{\nu^{\lambda\lambda'}}$, so wird $(\varkappa) = \mathfrak{q}^{n'\lambda\lambda'}$.

Nach Satz 46 ist dann:

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu, \alpha}{\mathfrak{w}}\right) = 1 \qquad \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\beta, \pi}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\pi, \beta}{\mathfrak{w}}\right) = 1.$$

Folglich ist:

$$\left(\frac{\nu, \alpha}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1 \qquad \left(\frac{\beta, \pi}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1.$$

Daraus folgt weiter:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\nu, \mu^{*\lambda\lambda'}}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\nu, \pi}{\mathfrak{l}_1}\right)^{-1}$$

und

$$\left(\frac{\nu, \pi}{\mathfrak{l}_1}\right)^{-1} = \left(\frac{\nu^{\lambda\lambda'}, \pi}{\mathfrak{l}_1}\right)^{-1} = \left(\frac{\varkappa, \pi}{\mathfrak{l}_1}\right).$$

www.libtool.com.cn

Es ergiebt sich also

$$\left(\frac{\varkappa, \pi}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)^{-1} = 1.$$

Folglich ist, da

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right) = 1, \qquad \text{auch} \qquad \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) = 1.$$

Wir betrachten jetzt den Körper $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$ und wollen zeigen, dass $\varkappa$ stets gleich der Relativnorm einer solchen Zahl dieses Körpers ist, deren Nenner zu $\mathfrak{l}_1$ prim ist. Wir unterscheiden bei dem Beweise 3 Fälle:

1) $\mathfrak{p}$ ist primär und $\varkappa$ eine primäre Zahl.

Die Relativdiscriminante von K enthält dann nur den Faktor $\mathfrak{p}$ und wir zeigen genau wie im vorigen Satze die Richtigkeit unserer Behauptung.

2) $\mathfrak{p}$ ist primär, aber $\varkappa$ ist keine primäre Zahl, sondern es ist

$$\varkappa = \varepsilon \varkappa^*,$$

wo $\varkappa^*$ eine primäre Zahl und ε eine Einheit aus k ist, die nicht l^{te} Potenz einer Einheit ist.

Die Relativdiscriminante von K enthält in diesem Falle die beiden Primfaktoren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{l}_1$.

Nach Satz 20 ist dann:

$$a \leqq 2 + v - m' - 1.$$

Da nun $v \leqq m'$, so ist $a \leqq 1$, d. h. die Anzahl A aller ambigen Complexe in K ist höchstens gleich l.

Es sei jetzt $\mathfrak{J}$ ein Ideal aus K und $j = N_k(\mathfrak{J})$. Ferner sei $j^{\lambda\lambda'} = (i)$. Ist dann $\left(\frac{i}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, so bezeichnen wir den Complex, zu dem $\mathfrak{J}$ gehört, als zum Hauptgeschlecht gehörig.

Es lässt sich nachweisen, dass nicht sämmtliche Complexe in K zum Hauptgeschlecht gehören. Es sei nämlich $\mathfrak{r}$ ein Primideal der Art, dass

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = 1 \qquad \left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{r}}\right) \neq 1.$$

$\mathfrak{r}$ ist in K zerlegbar und $\mathfrak{R}$ sei ein Primfaktor von $\mathfrak{r}$. Setzen wir dann:

$$\mathfrak{r}^{\lambda\lambda'} = (\varrho),$$

so wird

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{r}}\right) \neq 1.$$

www.libtool.com.cn

Der durch $\mathfrak{R}$ bestimmte Complex gehört also nicht zum Hauptgeschlecht. Es sei nun f die Anzahl aller Complexe des Hauptgeschlechtes in K und f' die Anzahl derjenigen Complexe in K, die symbolische $(1-S)^{te}$ Potenzen von Complexen sind. Wir erkennen dann genau wie früher die Richtigkeit der Gleichung

$$Af' = lf$$

(vergl. Satz 22).

Aus $A \leqq l$, folgt $f \leqq f'$. Andererseits ist $f' \leqq f$, da jede $(1-S)^{te}$ Potenz eines Complexes notwendig zum Hauptgeschlecht gehört; deshalb muss $f' = f$, $A = l$, $a = 1$, $v = m'$ sein, d. h. jeder Complex des Hauptgeschlechtes in K ist symbolische $(1-S)^{te}$ Potenz eines Complexes in K und jede Einheit in k ist Relativnorm einer Einheit oder gebrochenen Zahl in K.

Um nun zu zeigen, dass $\varkappa$ gleich der Relativnorm einer Zahl in K ist, bemerken wir, dass $\mathfrak{q}$ in K zerlegbar ist. Da $\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, gehört jeder Primfaktor $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{q}$ zum Hauptgeschlecht, und da jeder Complex des Hauptgeschlechts symbolische $(1-S)^{te}$ Potenz eines Complexes ist, können wir setzen:

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{J}^{(1-S)} \cdot A \cdot \mathfrak{j}$$

wo $\mathfrak{J}$ ein Ideal und A eine Zahl aus K und $\mathfrak{j}$ ein Ideal aus k bedeutet.

Bilden wir die Relativnorm von $\mathfrak{Q}$ und erheben in die $hh'n'^{te}$ Potenz, so wird, wenn wir

$$\mathfrak{j}^{hh'} = (\gamma)$$

setzen:

$$(\varkappa) = N_k (A\gamma)^{m'} ,$$

folglich $\xi\varkappa = N_k(A\gamma)^{m'}$, wenn ξ eine geeignete Einheit aus k ist. Da ξ die Relativnorm einer Zahl aus K ist, so folgt, dass auch $\varkappa$ die Relativnorm einer Zahl aus K ist. Um einzusehen, dass der Nenner der letzteren zu $\mathfrak{l}_1$ prim gewählt werden kann, braucht man nur zu beachten, dass $\mathfrak{l}_1$ in K in l gleiche Faktoren zerfällt.

Damit ist der zweite Fall vollständig erledigt.

3) $\mathfrak{p}$ ist nicht primär. Es sei dann ξ eine Einheit aus k, so dass $\left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$; ξ ist dann sicher nicht die Relativnorm einer ganzen oder gebrochenen Zahl aus K. Denn wäre

$$\xi = N_k\left(\frac{B}{B_1}\right)$$

wo B und B_1 ganze Zahlen aus K bezeichnen, so können wir diese als relativprim zu $\mathfrak{p}$ annehmen.

Es wäre dann

www.libtool.com.cn

$$\left(\frac{N_1(B), \pi}{\mathfrak{p}}\right) = 1, \quad \text{also auch} \quad \left(\frac{\xi N_1(B_1), \pi}{\mathfrak{p}}\right) = 1,$$

folglich

$$\left(\frac{\xi, \pi}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

gegen unsere Annahme.

Es ist also ξ sicher nicht Relativnorm einer Zahl aus K und deshalb

$$v \leqq m' - 1.$$

Da überdies t für den Körper K gleich 2 ist, so folgt aus Satz 20:

$$a \leqq 0, \quad \text{also} \quad a = 0 \quad v = m' - 1.$$

Es bilden nun alle Einheiten η, für die $\left(\frac{\eta}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, zusammen $l^{m'-1}$ Einheitenverbände, diejenigen Einheiten η', für welche $\left(\frac{\eta'}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$, $(l-1)\, l^{m'-1}$ Einheitenverbände. Die letzteren enthalten keine Einheiten aus k, welche Relativnormen von Zahlen aus K sind und daher sind alle Einheiten η, für die $\left(\frac{\eta}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, Relativnormen von Zahlen des Körpers K.

Aus der Gleichung $a = 0$ folgt, dass der einzige ambige Complex in K der Hauptcomplex ist. Wir schliessen dann wie früher, dass die Klassenzahl H von K nicht durch l teilbar ist und dass, wenn ε eine geeignete Einheit bezeichnet, $\varepsilon \varkappa^{HF}$ die Relativnorm einer Zahl aus K sein muss. Daraus folgt dann

$$\left(\frac{\varepsilon \varkappa^{HF}}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \quad \text{und wegen} \quad \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \quad \text{auch} \quad \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right) = 1,$$

d. h. ε ist ebenfalls Relativnorm einer Zahl aus K und dasselbe gilt folglich von $\varkappa$, wobei wir die Zahl, deren Relativnorm $\varkappa$ ist, offenbar wieder so annehmen können, dass ihr Nenner zu $\mathfrak{l}_1$ prim ist.

Wir haben also in allen 3 Fällen nachgewiesen, dass $\varkappa$ Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$ ist. Dann folgt aber aus Satz 50, dass auch ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$ ist.

Satz 52. Sind ν und μ zwei zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahlen aus k und ist ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$, so ist stets:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1.$$

Beweis: Wir bestimmen μ^* so, dass

www.libtool.com.cn

$$\mu^* \equiv \mu \ (\mathfrak{l}_1^{l_1+1})$$
$$\mu^* \equiv 1 \ (\mathfrak{l}_2^{l_2+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{l_s+1}).$$

Dann ist nach Voraussetzung, resp. nach Satz 50:

ν Normenrest von $K(\sqrt[l]{\mu^*}, k)$ und $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$

ν „ „ $K(\sqrt[l]{\mu^*}, k)$ nach $\mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3, \ldots \mathfrak{l}_s$.

Folglich giebt es ganze Zahlen $A_1, A_2, \ldots A_s$ im Körper $K(\sqrt[l]{\mu^*}, k)$, so dass:

$$\nu \equiv N_k(A_1) \quad (\mathfrak{l}_1^{l_1})$$
$$\nu \equiv N_k(A_2) \quad (\mathfrak{l}_2^{l_2})$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\nu \equiv N_k(A_s) \quad (\mathfrak{l}_s^{l_s}).$$

Bestimmen wir jetzt die ganze Zahl A in K so, dass

$$A \equiv A_1 \ (\mathfrak{l}_1^{l_1}) \ldots A \equiv A_s \ (\mathfrak{l}_s^{l_s}),$$

so wird

$$\nu \equiv N_k(A) \quad (\mathfrak{l}_1^{l_1} \mathfrak{l}_2^{l_2} \ldots \mathfrak{l}_s^{l_s}),$$

daher nach Satz 42:

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu N_k(A)^{l-1}, \mu^*}{\mathfrak{w}} \right) = 1$$

und folglich auch

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{w}} \right) = 1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1} \right) = 1.$$

§ 22.

Das Produkt $\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}} \right)$ für beliebige zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahlen aus k.

Wir beweisen zunächst noch einen Satz über das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1} \right)$.

Satz 53. Sind ν, μ zwei zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahlen aus k, so ist

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1} \right) \cdot \left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{l}_1} \right) = 1.$$

Beweis: Beachtet man, dass nach Satz 52

www.libtool.com.cn

$$\left(\frac{\alpha, \alpha}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1$$

ist, wenn α irgend eine zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahl in k bedeutet, so folgt:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\nu\mu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) \qquad \left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\nu\mu, \nu}{\mathfrak{l}_1}\right).$$

Folglich ist

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) \cdot \left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\nu\mu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) \cdot \left(\frac{\nu\mu, \nu}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\nu\mu, \nu\mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1.$$

Wir können jetzt folgende Verallgemeinerung des Satzes 46 beweisen.

Satz 54. Wenn ν, μ zwei zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahlen aus k sind, so ist stets:

$$\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = 1,$$

wo das Produkt $\prod_{(\mathfrak{w})}$ über sämmtliche Primideale $\mathfrak{w}$ in k zu erstrecken ist.

Beweis: Man bestimme s ganze Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_s$ aus k, die den Congruenzen genügen:

$$\begin{aligned}
&\mu_1 \equiv \mu \quad \mu_2 \equiv 1 \cdots \mu_s \equiv 1 \quad (\mathfrak{l}_1^{u_1}) \\
&\mu_1 \equiv 1 \quad \mu_2 \equiv \mu \cdots \mu_s \equiv 1 \quad (\mathfrak{l}_2^{u_2}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\mu_1 \equiv 1 \quad \mu_2 \equiv 1 \cdots \mu_s \equiv \mu \quad (\mathfrak{l}_s^{u_s}).
\end{aligned}$$

Dann ist:

$$\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_s \equiv \mu \quad (\mathfrak{l}').$$

Aus dieser Congruenz folgt:

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu, \mu(\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_s)^{l-1}}{\mathfrak{w}}\right) = 1.$$

Ferner ist nach Definition:

$$\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) \cdot \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_2}\right) \cdots \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_s}\right)$$

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu, \mu_1}{\mathfrak{w}}\right)^{l-1} \cdots \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_s}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu, \mu_s}{\mathfrak{w}}\right)^{l-1}.$$

Hieraus folgt:

www.libtool.com.cn

$$\prod_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)\cdot\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu,\mu_1^{l-1}}{\mathfrak{w}}\right)\cdots\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu,\mu_s^{l-1}}{\mathfrak{w}}\right)$$

$$= \prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu,\mu(\mu_1\mu_2\cdots\mu_s)^{l-1}}{\mathfrak{w}}\right) = 1.$$

§ 23.

Das allgemeine Reciprocitätsgesetz und der erste Ergänzungssatz zu demselben.

Aus dem letzten Satze des vorigen Paragraphen leiten wir leicht die folgenden beiden Sätze ab:

Satz 55. Das allgemeine Reciprocitätsgesetz für l^{te} Potenzreste im Körper k.

Es seien $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots \mathfrak{l}_s$ die in $\mathfrak{l} = (1-\zeta)$ aufgehenden Primideale des Körpers k; ferner seien $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ zwei zu $\mathfrak{l}$ prime Primideale in k und $\pi, \varkappa$ zwei ganze Zahlen in k, so dass

$$(\pi) = \mathfrak{p}^{hh'} \qquad (\varkappa) = \mathfrak{q}^{hh'};$$

dann gilt die Gleichung:

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)^{-1} = \left(\frac{\pi,\varkappa}{\mathfrak{l}_1}\right)\cdot\left(\frac{\pi,\varkappa}{\mathfrak{l}_2}\right)\cdots\left(\frac{\pi,\varkappa}{\mathfrak{l}_s}\right).$$

Satz 56. Der erste Ergänzungssatz zum allgemeinen Reciprocitätssatz.

Es seien $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots \mathfrak{l}_s$ die in $\mathfrak{l}$ aufgehenden Primideale des Körpers k und ε eine beliebige Einheit aus k; ferner sei $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{l}$ primes Primideal in k und π eine ganze Zahl aus k, so dass $(\pi) = \mathfrak{p}^{hN}$ wird; dann gilt die Gleichung:

$$\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right)^{-1} = \left(\frac{\varepsilon,\pi}{\mathfrak{l}_1}\right)\left(\frac{\varepsilon,\pi}{\mathfrak{l}_2}\right)\cdots\left(\frac{\varepsilon,\pi}{\mathfrak{l}_s}\right).$$

VI.

Das Produkt $\prod_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)$ für beliebige ganze Zahlen aus k.

§ 24.

Das Symbol $\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}_i}\right)$ für beliebige ganze Zahlen in k.

Definition 11. Es seien ν, μ zwei beliebige ganze Zahlen aus k und

www.libtool.com.cn

$\mathfrak{l}_1$ sei ein Primideal, das in $\mathfrak{l}$ genau zur l_1^{ten} und in μ genau zur a^{ten} Potenz aufgeht. Wir bestimmen dann die ganze Zahl μ^* aus k so, dass

$$\mu^* \equiv \mu \qquad (\mathfrak{l}_1^{\mu_1+1+a})$$
$$\mu^* \equiv \alpha^{l} \qquad (\mathfrak{l}_2^{l l_2+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{l l_s+1}),$$

wo α eine zu $\mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3 \ldots \mathfrak{l}_s$ prime ganze Zahl aus k bedeutet.

Wir setzen dann:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)^{-1},$$

wo das Produkt über alle zu $\mathfrak{l}$ primen Primideale in k zu erstrecken ist.

Mit Benutzung des Satzes 46 folgt die Eindeutigkeit dieser Definition.

Es gelten auch jetzt die Formeln:

$$\left(\frac{\nu_1 \nu_2, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\nu_1, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) \cdot \left(\frac{\nu_2, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)$$
$$\left(\frac{\nu, \mu_1 \mu_2}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\nu, \mu_1}{\mathfrak{l}_1}\right) \cdot \left(\frac{\nu, \mu_2}{\mathfrak{l}_1}\right)$$

in denen $\mu, \mu_1, \mu_2, \nu, \nu_1, \nu_2$ beliebige ganze Zahlen aus k bedeuten.

§ 25.

Die Fundamentalsätze für das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)$, wenn ν, μ beliebige ganze Zahlen aus k sind.

Mit denselben Hülfsmitteln, die wir beim Beweise des Satzes 50 verwandt haben, gelingt es, den folgenden verallgemeinerten Satz zu beweisen:

Satz 57. Hülfssatz. Es seien ν_1, ν_2, μ_1, μ_2 ganze Zahlen in k und es gehe $\mathfrak{l}_1$ in diesen Zahlen resp. zur $b_1, b_2, a_1, a_2^{\text{ten}}$ Potenz auf, wobei $b_2 \leqq b_1, a_2 \leqq a_1$ sei. Wenn es dann in k ganze Zahlen α, β giebt, so dass:

$$\nu_1 \equiv \alpha^{l} \nu_2 \qquad (\mathfrak{l}_1^{l l_1+1+b_1})$$
$$\mu_1 \equiv \beta^{l} \mu_2 \qquad (\mathfrak{l}_1^{l l_1+1+a_1}),$$

so ist, wenn ν_1 Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu_1}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$ ist, auch ν_2 Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu_2}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$ und umgekehrt.

Mit Hülfe des vorstehenden Satzes sind wir im Stande, die folgenden beiden fundamentalen Sätze zu beweisen.

www.libtool.com.cn

Satz 58. Sind ν, μ zwei beliebige ganze Zahlen aus k und ist $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1$, so ist ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$.

Beweis: Es sei ν durch die b^{te} und μ durch die a^{te} Potenz von $\mathfrak{l}_1$ teilbar. Wir haben dann 2 Fälle zu unterscheiden, je nachdem a durch l teilbar ist oder nicht.

1) $a \equiv 0\ (l)$. Bedeutet dann $\bar{\lambda}_1$ eine durch $\mathfrak{l}_1^{\frac{a}{l}}$, aber durch keine höhere Potenz von $\mathfrak{l}_1$ teilbare ganze Zahl aus k, so bestimme man μ^* so, dass

$$(1) \qquad \begin{aligned} \bar{\lambda}_1^l \mu^* &\equiv \mu \qquad (\mathfrak{l}_1^{\mu_1+1+\alpha}) \\ \mu^* &\equiv 1 \qquad (\mathfrak{l}_2^{\mu_2+1} \dots \mathfrak{l}_z^{\mu_z+1}). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{l}_1}\right),$$

folglich nach Voraussetzung

$$(2) \qquad \left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1.$$

Es soll jetzt gezeigt werden, dass der Exponent b stets incongruent Null nach l ist, wenn $\mathfrak{l}_1$ im Körper $K(\sqrt[l]{\mu^*}, k)$ unzerlegbar ist. Wir nehmen letzteres an und bestimmen das Primideal $\mathfrak{p}$ so, dass für einen gewissen zu l primen Exponenten n:

$$(3) \qquad \left(\frac{\varepsilon_1}{\mu^* \mathfrak{p}^n}\right) = 1 \cdots \left(\frac{\varepsilon_{m'}}{\mu^* \mathfrak{p}^n}\right) = 1$$

$$(4) \qquad \left(\frac{\lambda_1}{\mu^* \mathfrak{p}^n}\right) = 1 \cdots \left(\frac{\lambda_z}{\mu^* \mathfrak{p}^n}\right) = 1.$$

Da $\mathfrak{l}_1$ in $K(\sqrt[l]{\mu^*}, k)$ unzerlegbar ist, ist μ^* der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{l}_1^{\mu_1}$ congruent und deshalb wegen (1) auch nach dem Modul $\mathfrak{l}'$. Dann ist aber $\left(\frac{\varepsilon_i}{\mu^*}\right) = 1$ $(i = 1, 2, \dots m')$ und folglich $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal. Bedeutet π eine Primärzahl desselben, so folgt aus (3) und (4), dass $\mu^* \pi^n$ eine hyperprimäre Zahl ist. Folglich ergiebt sich aus (1), dass π^n, also auch π, der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl nach $\mathfrak{l}_2^{\mu_2+1} \dots \mathfrak{l}_z^{\mu_z+1}$ congruent ist und nach Satz 13 sind deshalb alle Primideale $\mathfrak{l}_2, \dots \mathfrak{l}_z$ im Körper $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$ zerlegbar. Da bereits früher gezeigt ist, dass alle Ideale eines Körpers $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$ dem Hauptgeschlecht angehören, so gilt:

$$(5) \qquad \left(\frac{\lambda_2}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \qquad \left(\frac{\lambda_3}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \dots \left(\frac{\lambda_z}{\mathfrak{p}}\right) = 1,$$

wenn

www.libtool.com.cn

$$\mathfrak{l}_1^{\lambda\lambda'} = (\lambda_1) \qquad \mathfrak{l}_2^{\lambda\lambda'} = (\lambda_2) \cdots \mathfrak{l}_s^{\lambda\lambda'} = (\lambda_s)$$

gesetzt wird.

Wäre nun auch $\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, so müsste π und folglich auch μ^* eine hyperprimäre Zahl sein; dann zerfiele aber $\mathfrak{l}_1$ im Körper $K(\sqrt[l]{\mu^*}, k)$, was gegen unsere Annahme ist;
folglich ist

$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1.$$

Wir setzen nun:

$$(\nu) = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{l}_1^{b_1} \mathfrak{l}_2^{b_2} \cdots \mathfrak{l}_s^{b_s},$$

wo $\mathfrak{n}$ zu $\mathfrak{l}$ prim sein soll und haben dann:

$$\nu^{\lambda\lambda'} = \nu^* \lambda_1^{b_1} \lambda_2^{b_2} \cdots \lambda_s^{b_s},$$

wo

$$\mathfrak{n}^{\lambda\lambda'} = (\nu^*).$$

Nach Satz 46 ist

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu^{\lambda\lambda'}, \mu^* \pi^n}{\mathfrak{w}}\right) = 1,$$

daraus folgt

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu^{\lambda\lambda'}, \pi}{\mathfrak{w}}\right) = 1. \tag{6}$$

Nun ist nach Definition:

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu^{\lambda\lambda'}, \pi}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu^*, \pi}{\mathfrak{w}}\right) \cdot \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\lambda_1, \pi}{\mathfrak{w}}\right)^{b_1} \cdot \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\lambda_2, \pi}{\mathfrak{w}}\right)^{b_2} \cdots \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\lambda_s, \pi}{\mathfrak{w}}\right)^{b_s}.$$

Daraus folgt leicht, da nach Satz 42

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu^*, \pi}{\mathfrak{w}}\right) = 1,$$

wenn wir (5) und (6) berücksichtigen, dass

$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}}\right)^b = 1$$

sein muss.

Es sind daher nur die beiden Fälle denkbar: entweder ist $\mathfrak{l}_1$ im Körper $K(\sqrt[l]{\mu^*}, k)$ zerlegbar oder es ist b durch l teilbar.

In beiden Fällen erkennt man leicht die Möglichkeit, eine Zahl A in K zu finden, so dass

www.libtool.com.cn

$\frac{\nu}{N_k(A)}$ gleich einem Bruch $\frac{\varrho}{\sigma}$ wird,

dessen Zähler und Nenner ganze zu $\mathfrak{l}$ prime Zahlen in k sind. Es folgt dann aus (2), dass

$$\left(\frac{N_k(A) \cdot \frac{\varrho}{\sigma}, \mu^*}{\mathfrak{l}_1}\right) = \left(\frac{\varrho\sigma^{l-1}, \mu^*}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1.$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass $\varrho\sigma^{l-1}$, und folglich auch ν, Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu^*}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$ ist. Dasselbe gilt dann nach Satz 57 für den Körper $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$.

2) $\quad a \not\equiv 0 \ (l).$

Wir bestimmen μ^* zu $\mathfrak{l}$ prim so, dass

$$\lambda_1^a \mu^* \equiv \mu^{hh'} \quad (\mathfrak{l}_1^{ll_1+1+ahh'})$$

$$\lambda_1^a \mu^* \equiv 1 \quad (\mathfrak{l}_2^{ll_2+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{ll_s+1})$$

wird.

Es sei ferner $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so dass für einen gewissen zu l primen Exponenten n

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mu^* \mathfrak{p}^n}\right) = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots m')$$

$$\left(\frac{\lambda_k}{\mu^* \mathfrak{p}^n}\right) = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots s).$$

Dann kann man eine hyperprimäre Zahl $\mu^* \pi^{*n}$ bestimmen, so dass

$$(\pi^*) = \mathfrak{p}^{hh'}.$$

Ferner lässt sich im Körper $K(\sqrt[l]{\mu^* \lambda_1^a}, k)$ sicher eine ganze Zahl A finden, so dass $\frac{\nu}{N_k(A)}$ gleich einem Bruch $\frac{\varrho}{\sigma}$ wird, dessen Zähler und Nenner zu $\mathfrak{l}$ prim sind.

Endlich bestimme man das Primideal $\mathfrak{q}$ so, dass für einen gewissen zu l primen Exponenten n':

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\varrho\sigma^{l-1}\mathfrak{q}^{n'}}\right) = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots m')$$

$$\left(\frac{\lambda_k}{\varrho\sigma^{l-1}\mathfrak{q}^{n'}}\right) = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots s)$$

www.libtool.com.cn

$$\left(\frac{\lambda_1^a \pi^{*\bar{n}}}{\mathfrak{q}}\right) = 1 \qquad \bar{n} + n \equiv 0 \ (l).$$

Nach Satz 48 giebt es dann eine Zahl $\varkappa$, so dass $(\varkappa) = \mathfrak{q}^{lh'}$ und $\varrho\sigma^{l-1}\varkappa^n$ eine hyperprimäre Zahl wird.

Nach Definition 11 ist nun:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu, \lambda_1^a \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)^{-1}.$$

Ferner ist

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu, \lambda_1^a \mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varrho\sigma^{l-1}, \lambda_1^a \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)$$

und nach Satz 46:

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varrho\sigma^{l-1}, \lambda_1^a \mu^*}{\mathfrak{w}}\right) \cdot \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varkappa^{n'}, \lambda_1^a \mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = 1$$

und nach Satz 42:

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varkappa^{n'}, \lambda_1^a \mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varkappa^{n'}, \lambda_1^a \pi^{*\bar{n}}}{\mathfrak{w}}\right).$$

Fasst man diese Beziehungen zusammen, so ergiebt sich, da nach Voraussetzung

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1,$$

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varkappa^{n'}, \lambda_1^a \pi^{*\bar{n}}}{\mathfrak{w}}\right) = 1.$$

Da nun

$$\left(\frac{\lambda_1^a \pi^{*\bar{n}}}{\mathfrak{q}}\right) = 1$$

ist, so muss deshalb auch

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

sein.

Wir ziehen jetzt den Körper $K(\sqrt[l]{\lambda_1^a \pi^{*\bar{n}}}, k)$ heran und zeigen genau wie im Beweise zum Satz 51, dass $\varkappa$ stets Normenrest dieses Körpers nach $\mathfrak{l}_1$ ist. Beachten wir endlich, dass

$$\varrho\sigma^{l-1}\varkappa^{n'} \quad \text{und} \quad \mu^* \pi^{*\nu}$$

hyperprimäre Zahlen sind und dass

www.libtool.com.cn

$$\frac{\nu}{N_k(A)} = \frac{\varrho}{\sigma},$$

so ergiebt sich, dass auch ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$ ist.

Satz 59. Sind ν und μ zwei beliebige ganze Zahlen aus k und ist ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1$, so ist:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1.$$

Beweis: Wir behalten die Bezeichnungen des vorigen Satzes bei und bestimmen μ^* so, dass:

$$\mu^* \equiv \mu \quad (\mathfrak{l}_1^{ll_1+1+a})$$
$$\mu^* \equiv 1 \quad (\mathfrak{l}_2^{ll_2+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{ll_s+1})$$

und dass μ^* keine l^{te} Potenz einer Zahl aus k wird.

Dann ist ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu^*}, k)$ nach $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots \mathfrak{l}_s$. Es giebt daher ganze Zahlen $A_1, \ldots A_s$ in $K(\sqrt[l]{\mu^*}, k)$, so dass

$$\nu \equiv N_k(A_1) \quad (\mathfrak{l}_1^{ll_1+1+b})$$
$$\nu \equiv N_k(A_2) \quad (\mathfrak{l}_2^{ll_2+1+b_2})$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\nu \equiv N_k(A_s) \quad (\mathfrak{l}_s^{ll_s+1+b_s}).$$

Wir schliessen hieraus auf die Existenz einer ganzen Zahl A in K, so dass

$$\nu \equiv N_k(A) \quad (\mathfrak{l}_1^{ll_1+1+b} \quad \mathfrak{l}_2^{ll_2+1+b_2} \ldots \mathfrak{l}_s^{ll_s+1+b_s}).$$

Wir können nun $\frac{\nu}{N_k(A)}$ als einen Bruch $\frac{\varrho}{\sigma}$ darstellen, dessen Zähler und Nenner ganze zu $\mathfrak{l}$ prime Zahlen aus k sind.

Es gilt dann die Congruenz:

$$\varrho\sigma^{l-1} \equiv \frac{\nu\sigma^l}{N_k(A)} \equiv \sigma^l \quad (\mathfrak{l}_1^{ll_1+1} \mathfrak{l}_2^{ll_2+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{ll_s+1})$$

und hieraus folgt nach Satz 46:

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\varrho\sigma^{l-1}, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right) = 1.$$

www.libtool.com.cn

Folglich ist auch:

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)^{-1} = \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1.$$

Aus dem Bewiesenen ergiebt sich leicht die Richtigkeit der Formel:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) \cdot \left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1$$

für beliebige ganze Zahlen ν, μ. Es zeigt sich daher, dass alle Eigenschaften, die für das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)$ gelten, wenn ν, μ zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahlen sind, auch dann ihre Gültigkeit behalten, wenn ν, μ beliebige ganze Zahlen aus k sind.

§ 26.

Das Produkt $\prod_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ für beliebige ganze Zahlen ν, μ aus k und der zweite Ergänzungssatz zum Reciprocitätsgesetz.

Wir sind jetzt im Stande, folgenden allgemeinen Satz auszusprechen:

Satz 60. Sind ν, μ zwei beliebige ganze Zahlen aus k, so ist das über alle Primideale $\mathfrak{w}$ von k zu erstreckende Produkt

$$\prod_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$$

gleich 1.

Der Beweis dieses Satzes ist ganz analog dem für den Satz 54 geltenden; ich gehe deshalb darauf nicht weiter ein, sondern gebe nur noch einen Specialfall des angeführten Satzes, für $\nu = \lambda_1$, $\mu = \pi$ an, der als zweiter Ergänzungssatz zum allgemeinen Reciprocitätsgesetz zu bezeichnen ist.

Satz 61. Sind $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots \mathfrak{l}_s$ die in $\mathfrak{l}$ aufgehenden Primideale in k und ist

$$\mathfrak{l}_1^{\lambda\lambda'} = (\lambda_1),$$

so gilt, wenn $\mathfrak{p}$ ein beliebiges zu $\mathfrak{l}$ primes Primideal aus k bedeutet und

$$\mathfrak{p}^{\lambda\lambda} = (\pi)$$

ist:

$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}}\right)^{-1} = \left(\frac{\lambda_1, \pi}{\mathfrak{l}_1}\right)\left(\frac{\lambda_1, \pi}{\mathfrak{l}_2}\right) \cdots \left(\frac{\lambda_1, \pi}{\mathfrak{l}_s}\right).$$

www.libtool.com.cn

Zum Schluss füge ich noch hinzu, dass der dem Satze 16 entsprechende Satz über die Anzahl der Normenreste nach einem in $\mathfrak{l}$ aufgehenden Primideale ebenfalls gilt und dass man für einen beliebigen Körper $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ eine Einteilung der Ideale in Geschlechter entwickeln kann. Es gilt dann wieder die fundamentale Thatsache, dass genau l^{r-1} Geschlechter, von denen jedes das Charakterenprodukt 1 besitzt, in K existieren.

Auf die Beweise dieser Behauptungen gehe ich nicht mehr ein, da dieselben ganz analog den von Hilbert in Rel. quadr. Z. § 40—42 gegebenen sind, und da die geringfügigen Abänderungen, die an denselben anzubringen sind, sich zur Genüge aus den vorstehenden Entwickelungen ergeben.

§ 27.

Ein Beispiel.

Zur Illustration unserer Entwickelungen mögen die cubischen Reste im Körper $k(i, \varrho)$ herangezogen werden, wo ϱ eine von 1 verschiedene 3. Einheitswurzel bedeutet. Der Körper gehört zu denjenigen, für die die Resultate der vorstehenden Abhandlung gültig sind; er ist ein Galois'scher Körper vom 4. Grade und besitzt in bezug auf den Körper der dritten Einheitswurzeln den Relativgrad 2. Seine Discriminante ist 144 und die Klassenzahl $h = 1$. Als definierende Zahl für k kann $i + \varrho$ angenommen werden, wofür die Gleichungen:

$$x^3 - 2\varrho x - \varrho = 0$$

oder

$$x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1 = 0$$

gelten. Gleichzeitig ist $i + \varrho$ eine von einer dritten Einheitswurzel verschiedene Einheit, die nicht dritte Potenz einer Einheit in k ist. Es existieren in k 9 Einheitenverbände, welche durch:

$$\varrho^u (i + \varrho)^v \qquad u, v = 1, 2, 3$$

dargestellt werden.

Es gelten in k folgende Zerlegungen in Primfaktoren:

$$\begin{aligned} 2 &= (1 + i)\,(1 - i) \\ 3 &= -(\varrho - \varrho^2)^2 \\ 5 &= (2 + i)\,(2 - i) \\ 7 &= (3 + \varrho)\,(3 + \varrho^2) \\ 11 &= 11 \end{aligned}$$

www.libtool.com.cn

$$13 = (2+i+i\varrho)\,(2-i-i\varrho)\,(2+i+i\varrho^2)\,(2-i-i\varrho^2)$$
$$19 = (5+2\varrho)\,(5+2\varrho^2)$$
$$53 = (7+2i)\,(7-2i)$$
$$71 = 71$$
$$181 = (1-3\varrho+2i)\,(1-3\varrho-2i)\,(1-3\varrho^2+2i)\,(1-3\varrho^2-2i)$$

Ferner seien noch die Werte folgender cubischer Restsymbole angeführt:

$$\left(\frac{\varrho}{1+i}\right) = \varrho \qquad \left(\frac{i+\varrho}{1+i}\right) = \varrho^2 \qquad \left(\frac{1-\varrho}{1+i}\right) = \varrho^2$$

$$\left(\frac{\varrho}{2+i}\right) = \varrho^2 \qquad \left(\frac{i+\varrho}{2+i}\right) = 1 \qquad \left(\frac{1-\varrho}{2+i}\right) = \varrho$$

$$\left(\frac{\varrho}{3+\varrho}\right) = \varrho \qquad \left(\frac{i+\varrho}{3+\varrho}\right) = \varrho^2 \qquad \left(\frac{1-\varrho}{3+\varrho}\right) = \varrho$$

$$\left(\frac{\varrho}{11}\right) = \varrho^2 \qquad \left(\frac{i+\varrho}{11}\right) = \varrho \qquad \left(\frac{1-\varrho}{11}\right) = \varrho$$

$$\left(\frac{\varrho}{2+i+i\varrho}\right) = \varrho \qquad \left(\frac{i+\varrho}{2+i+i\varrho}\right) = 1 \qquad \left(\frac{1-\varrho}{2+i+i\varrho}\right) = \varrho$$

$$\left(\frac{\varrho}{5+2\varrho}\right) = 1 \qquad \left(\frac{i+\varrho}{5+2\varrho}\right) = 1 \qquad \left(\frac{1-\varrho}{5+2\varrho}\right) = \varrho$$

$$\left(\frac{\varrho}{7+2i}\right) = 1 \qquad \left(\frac{i+\varrho}{7+2i}\right) = 1 \qquad \left(\frac{1-\varrho}{7+2i}\right) = 1$$

$$\left(\frac{\varrho}{71}\right) = 1 \qquad \left(\frac{i+\varrho}{71}\right) = 1 \qquad \left(\frac{1-\varrho}{71}\right) = 1$$

$$\left(\frac{\varrho}{1-3\varrho+2i}\right) = 1 \qquad \left(\frac{i+\varrho}{1-3\varrho+2i}\right) = 1 \qquad \left(\frac{1-\varrho}{1-3\varrho+2i}\right) = \varrho.$$

Aus dem vorstehenden Material schöpfen wir folgende Bestätigungen von früher bewiesenen Sätzen:

1) Satz 29 und 30. (Primäres Primideal).

Die Primideale $5+2\varrho$ und $1-3\varrho+2i$ sind primär; dementsprechend gelten folgende Congruenzen:

$$5+2\varrho \equiv -\varrho^2(5+3\varrho) \equiv -8\varrho^2 \pmod{(3-3\varrho)}$$
$$1-3\varrho+2i \equiv (1+i)^3 \pmod{(3-3\varrho)}.$$

www.libtool.com.cn

Die Zahlen $5 + 3\varrho$ und $1 - 3\varrho + 2i$ sind also primär.

2) Satz 44 und 45 (Primäres Ideal).

Die Ideale $(2 + i)(2 + i + \varrho)$ und $(1 + i)^3(3 + \varrho)$ sind primär; dementsprechend gelten folgende Congruenzen:

$$(2 + i)(2 + i + i\varrho) \equiv (i - \varrho^2)(i - 1)^3 \qquad (3 - 3\varrho)$$

$$(1 + i)^3(3\varrho^2 + 1) \equiv (i - 1)^6 \qquad (3 - 3\varrho).$$

Die Zahlen $\varrho(i + \varrho^2)(2 + i + i\varrho)(2 + i)$ und $(1 + i)^3(3\varrho^2 + 1)$ sind folglich primär.

3) Satz 48 und 49 (Hyperprimäres Ideal).

Die Ideale $11(1 + i)$, $7 + 2i$ und 71 sind hyperprimär; dementsprechend gelten folgende Congruenzen;

$$11(1 + i) \equiv (i - 1)^8 \qquad (9)$$

$$(7 + 2i) \equiv (i - 2)^3 \qquad (9)$$

$$71 \equiv (-1)^3 \qquad (9).$$

Die Zahlen $11(1 + i)$, $7 + 2i$, 71 sind also hyperprimär.

4) Satz 37.

Von den beiden Primidealen $1 + i$ und $7 + 2i$ ist das letzte primär; es muss demnach das Reciprocitätsgesetz zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal gelten, also

$$\left(\frac{1 + i}{7 + 2i}\right)\left(\frac{7 + 2i}{1 + i}\right)^{-1} = 1$$

sein, da $7 + 2i$ eine primäre Zahl ist. In der That findet man:

$$\left(\frac{1 + i}{7 + 2i}\right) = 1 \qquad \left(\frac{7 + 2i}{1 + i}\right) = 1.$$

5) Satz 43.

Da für $5 + 3\varrho$ die Congruenz

$$5 + 3\varrho \equiv 8 \qquad ((1-\varrho)^3)$$

gilt, muss

www.libtool.com.cn

$$\left(\frac{1+3i}{5+3\varrho}\right)\left(\frac{5+3\varrho}{1+3i}\right)^{-1} = 1$$

sein.

In der That ist:

$$\left(\frac{1+3i}{5+3\varrho}\right) = \varrho \qquad \left(\frac{5+3\varrho}{1+3i}\right) = \varrho.$$

Berichtigung.

S. 7, Zeile 3 v. u. lies $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}'$ statt $\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{P}'$.

---

www.libtool.com.cn

Inhalt.

Seite

Einleitung 3

I. Definitionen und vorbereitende Sätze.

§ 1. Das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ im Grundkörper k 4

§ 2. Der relativ-cyclische Körper K vom Primzahlrelativgrade l in bezug auf k. Seine Relativdiscriminante und die Zerlegung der Primideale des Grundkörpers in ihm 7

§ 3. Das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)$ 14

II. Die ambigen Complexe des Körpers K.

§ 4. Die relativen Grundeinheiten des Körpers K 20

§ 5. Die ambigen Complexe des Körpers K 20

§ 6. Die Geschlechter im Körper K. 25

III. Die primären Ideale im Grundkörper k.

§ 7. Definition des primären Ideals $\mathfrak{a}$ und des Symbols $\left(\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{a}}\right)$ 27

§ 8. Ein System von $\frac{m(l-1)}{2}$ nichtprimären Primidealen in k. 28

§ 9. Die unendliche Reihe $\sum_{(\mathfrak{w})} \sum_{(m)} \left(\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{a}}\right)^m \cdot \frac{1}{n(\mathfrak{w})^s}$ 31

§ 10. Eine Eigenschaft der primären Primideale. 34

§ 11. Zwei specielle Fälle des Reciprocitätsgesetzes. 36

§ 12. Das Reciprocitätsgesetz zwischen einem primären und einem beliebigen Primideal in gewissen relativ Galois'schen Körpern 38

§ 13. Fortsetzung 44

§ 14. Die Anzahl der Geschlechter im relativ-cyclischen Körper K mit zu l primer Relativdiscriminante 47

www.libtool.com.cn

§ 15. Das Produkt $\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ 48

§ 16. Das primäre Ideal 51

IV. Das hyperprimäre Ideal.

§ 17. Definition des hyperprimären Ideals und der hyperprimären Zahl in k . . . 52

§ 18. Ein gewisses System von $m' + s$ zu l primen Primidealen in k 53

§ 19. Das hyperprimäre Ideal in k 56

V. Das allgemeine Reciprocitätsgesetz in k und der erste Ergänzungssatz zu demselben.

§ 20. Definition des Symbols $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_i}\right)$ für irgend welche zu $\mathfrak{l}$ prime Zahlen ν, μ . 57

§ 21. Zwei Hülfssätze über die Normenreste des Körpers K nach $\mathfrak{l}_i$ 58

§ 22. Das Produkt $\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ für beliebige zu $\mathfrak{l}$ prime ganze Zahlen aus k . . . 67

§ 23. Das allgemeine Reciprocitätsgesetz und der erste Ergänzungssatz zu demselben . 69

VI. Das Produkt $\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ für beliebige ganze Zahlen aus k.

§ 24. Das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_i}\right)$ für beliebige ganze Zahlen in k 69

§ 25. Die Fundamentalsätze für das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_i}\right)$, wenn ν, μ beliebige ganze Zahlen aus k sind 70

§ 26. Das Produkt $\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ für beliebige ganze Zahlen ν, μ aus k und der zweite Ergänzungssatz zum Reciprocitätsgesetz 76

§ 27. Ein Beispiel 77

Inhalt 81

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

www.libtool.com.cn

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND II. Nro. 4.

FEB 13 1904
CAMBRIDGE, MASS.

Constitution

of

Matter and Analytical Theories

of Heat.

An Essay in four Parts.

By

G. Prasad.

Berlin.
Weidmannsche Buchhandlung.
1903.

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND II. Nro. 4.

Constitution

of

Matter and Analytical Theories

of Heat.

An Essay in four Parts.

By

G. Prasad.

Berlin.
Weidmannsche Buchhandlung.
1903.

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

[illegible] 10 1904

Constitution of Matter and Analytical Theories of Heat.

An Essay in four Parts.

By

Ganesh Prasad of Balia (India).

Communicated by F. Klein, July 11, 1903.

Preface.

„Mathematical analysis has no marks to express confused notions.“ J. Fourier.

The following essay was undertaken with the object of utilising the recent advances in mathematical analysis for working out analytical theories of heat, each theory being based on definite suppositions as to the constitution of matter.

In carrying on the investigation embodied in this essay I consulted a very large number of authorities. I am chiefly indebted to the writings of G. Cantor, Fourier, Du Bois Reymond, Lord Kelvin, Larmor, Maxwell, Poisson, Brodén, Karl Pearson, Poincaré and Weierstrass. To these I must add Dini-Lüroth's „Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse“, from which my knowledge of continuous analysis is chiefly derived. I am also indebted to Fitzgerald's scientific papers[1]) and Sommerfeld's dissertation[2]). Finally, I must mention that in the early stage of this investigation I received great encouragement from the views of F. Klein as given in his Evanston Colloquium and „Gutachten der Göttinger philosophischen Facultät betreffend die Beneke-Preisaufgabe für 1901“ (Göttinger Nachrichten 1901, Geschäftliche Mitteilungen; Math. Ann. Bd. 55).

The essay in its present form was completed in the year 1902, with the exception of certain purely verbal alterations and a few unimportant corrections.

1) „The Scientific Writings of George Francis Fitzgerald“, Dublin 1902.

2) „Die willkürlichen Functionen in der Mathematischen Physik“, Inaugural-Dissertation, Königsberg 1891.

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

Introduction.

(1)

The object of this essay is to show how the recent advances in mathematical analysis may be used for working out analytical theories of the linear conduction of heat in a homogeneous solid; each theory being based on definite suppositions as to the constitution of the solid. The essay is divided into four parts. In Part I. we give a theory which treats the solid as a continuum with the same properties in all its points. Part II. contains a carefully worked out theory which treats the solid as molecular in structure but takes no account of the constitution of the molecules; at the end of this part a criticism of Fourier's theory is given. In Part III. is worked out a theory which regards the solid as *improperly continuous*, i. e., as a continuum in which an everywhere dense but enumerable aggregate of points is marked out to distinguish the solid from all other solids; this part concludes with a discussion of the question of the „uniqueness of the solution." Part IV. contains a brief discussion of the theories expounded in the previous parts.

(2)

We restrict ourselves throughout this essay to the simple problem of linear conduction in an infinite slab bounded by two parallel planes impermeable to heat and at distance 2π from each other, the initial temperature being an even function of the distance from the central plane of the slab. The first step towards the solution of this problem is to define the conditions of the phenomenon. We take the fundamental condition to be the satisfaction of the principle of the conservation of energy; the other condition is that if with varying *time* any physical quantity passes from one value to another it assumes all the intermediate values. The next step is to transform the problem from a physical into an analytical one; and this is done by translating, with the help of suitable hypotheses, the above two conditions, and the supposition of the impermeability of the faces, into analytical language. We then find without difficulty an ex-

www.libtool.com.cn

tensive class of solutions in terms of functions of the type

$$V(x, t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty a_m \cos mx\, e^{-m^2 t}, \qquad t > 0,$$

where $a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x') \cos mx'\, dx'$, $f(x)$ being any integrable function; such functions $V(x, t)$ we call, for the sake of convenience, functions of *Fourier's type.*

(3)

In Part I. we first find the analytical representations of the conditions of the phenomenon. These are the conditions (A), (B) and (C) of Art. 4. In Art. 5 attention is drawn to the fact that there may be solutions of the problem other than functions of Fourier's type. Throughout the remainder of this part we discuss solutions of Fourier's type. We begin by expressing (A), (B) and (C) in terms of $V(x, t)$, $f(x)$ being the initial temperature. We thus obtain in Art. 10 the group of conditions which is necessary and sufficient in order that $V(x, t)$ be the solution of the problem. These conditions are the following:

i. For every value of x or, at least, for an everywhere dense aggregate of its values, there exists a finite constant P such that, for any value of t, however small, $\left|\frac{\partial}{\partial x} V(x, t)\right| < P$, $-\pi < x < \pi$.

ii. $\lim_{t=+0} V(x, t) = f(x)$ if the limit exists; or, the limit does not exist, and then $f(x)$ is contained in the aggregate of values assumed by $V(x, t)$ as t approaches zero.

In order to find the nature of the restrictions which these conditions impose on $f(x)$, we carefully investigate in Arts. 11—21 the behaviour of $V'(x, t)$ and $V(x, t)$ when t approaches zero. The final results of this investigation, in which we make use of Du Bois Reymond's Infinital Calculus (Infinitärcalcül), are given in Arts. 19 and 21 [1]). Making use of these results, we give in Art. 22

1) It would be convenient to explain the notation which we use: If $A(y)$ and $B(y)$ be two functions of y such that $\frac{A(y)}{B(y)}$ is positive and monoton in the neighbourhood of y_0; then it is said that $A(y) \gtrless B(y)$, as y approaches y_0, according as $\frac{A(y)}{B(y)}$ has a limit which is infinite, finite or zero. This is Du Bois Reymond's notation. We have found it convenient to introduce four new symbols, viz., $\succ\!\!\succ$, $\backsim$, $\prec\!\!\prec$ and $\pm\!\succ$. By $L(y) \gtrless M(y)$, we mean $L(y) \gtrless M(y)N(y)$ where $N(y)$ is finite and positive (different from zero) but *not* necessarily monoton. For example, $\frac{1}{y^2} \succ\!\!\succ l\left(\frac{1}{y}\right)\left(2 + \cos\frac{1}{y}\right)$ as y approaches zero. If, with the approach of y to y_0, $C(y)$ makes an indefinitely large number of oscillations, from positive to negative values, with indefinitely increasing amplitude; then we say that $C(y) \pm\!\succ 1$ as y approaches y_0. For example, $\frac{1}{y}\cos\left(\frac{1}{y}\right) \pm\!\succ 1$ as y approaches zero.

www.libtool.com.cn

certain necessary and sufficient conditions for $f(x)$, which are of extensive applicability. These conditions at once indicate the classification of initial states as stable or unstable, non-oscillatory or oscillatory, admissible or inadmissible. This classification is discussed in Art. 23. We conclude this part with Art. 24 in which five examples[1]) of initial states are given; the solution of the problem corresponding to each of these being of Fourier's type. In the first the initial state is continuous, stable and non-oscillatory; in the second, discontinuous but stable and non-oscillatory; in the third, discontinuous, stable and oscillatory; in the fourth as well as in the fifth, discontinuous and unstable.

(4)

In Part II. we give a carefully worked out theory which treats the solid as molecular in structure but takes no account of the constitution of the molecule. The scheme of our exposition is as follows: —

In Art. 25 we begin by specifying clearly and in detail the molecular oscillations in the solid. The solid is thus supposed to contain rows of molecules parallel to the axis of x; the molecular oscillations in each row being the same. Each row contains r assemblages, the number of molecules in each assemblage being s. Now, with each assemblage in a row is associated a quantity which is a function of time and which depends only on the molecular oscillations in the assemblage; this quantity we call the *temperature* of the assemblage. At the end of Art. 25 is given the following formulation of the problem: —

The initial temperatures, $T_1(0)$, $T_2(0)$, ... $T_r(0)$, of the assemblages A_1, A_2, ... A_r in any particular row being given, find their subsequent temperatures.

The investigation embodied in Arts. 26—31 requires very delicate considerations and is the most difficult portion of the exposition. In these Articles we show how, by means of the hypotheses (α_1), (β_1) and (γ_1) of Art. 27, approximate analytical representations of the actual conditions of the phenomenon can be obtained in terms of a continuous function $Y(x, t)$ which we call the *auxiliary function* of the problem; this function is such that $Y(x_{\varrho,s}, t) = T_\varrho(t)$ where $x_{\varrho,s}$ is the x-coordinate of the centre, and $T_\varrho(t)$ the temperature, of the assemblage A_ϱ at time t. As the first step to this end, we find in Art. 28 an approximation to the quantity of heat which flows across a unit area, placed at right angles to the axis of x, in any interval $(t, t+\tau)$: the result is given in the equation (I). As the next step we obtain in Art. 29 an approximation to the quantity of heat absorbed by a cylinder, with its axis parallel to the axis of x and its faces, of unit area, $x = x_1$, $x = x_2$, in any interval: the result is given in the equation (II).

1) It is hardly necessary to mention that the functions $f(x)$ used in the examples (iii) and (iv) belong to a new type which was suggested to the present writer by the procedure in Arts. 110*—11* of Dini-Lüroth's „Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse." The investigation given there is, with evident modifications, applicable to these functions.

www.libtool.com.cn

In Art. 30 we discuss these two results and attention is drawn to the fact that in order that approximations be at all possible it is necessary that the periphery of the unit area be of restricted size and shape. For example, when the area is a rectangle $\left(\frac{\lambda}{2} \times \frac{2}{\lambda}\right)$ no approximation is possible, λ being the length of the molecule. Making use of (I) and (II) we obtain in Art. 31 the approximate conditions of the phenomenon. These are (A_1), (B_1) and (C_1). (A_1) corresponds to the principle of energy; (B_1), to the condition that as $T_\varrho(t)$ passes from one value to another it assumes all the intermediate values; and (C_1), to the supposition of the impermeability of the faces. The remaining portion of the exposition is much simpler; in it we find what conditions $f(x)$ must satisfy in order that the auxiliary function be of Fourier's type, where $f(x) = Y(x, 0)$ and $f(x)$, $f'(x)$ and $f''(x)$ are finite and continuous. We show in Art. 32 that, as (A_1), (B_1) and (C_1) are in form the same as (A), (B) and (C), the only conditions to be satisfied are those which are necessary in order that (A_1), (B_1) and (C_1) be approximations to the actual conditions. These necessary conditions are given in the end of the article.

The final result, regarding the condition to be satisfied by $f(x)$, may be thus stated:

If it be supposed that

$$\lambda_1 < 10^{-3},$$
$$\lambda_2 \leq 10^{-3}\lambda_1,$$
$$\lambda_1 \geq \frac{2}{s};$$

then it is sufficient that

$$\frac{\lambda_1}{2\pi\bar{f}}\left\{43|f'(\pi)| + 67b + \tfrac{8}{5}\sum_1^\infty \frac{|b_m|}{m}\right\}$$

be negligible. This is the condition $(\mathfrak{B}_1)$ given at the end of Art. 37. Here $2\lambda_1$ is the quantity which first appears on page 26 and may be called the radius of the sphere of influence of any assemblage, λ_2 is the greatest length that an assemblage can have, $\bar{f} = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi f(x')\,dx'\right|$, $b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f''(x')\cos mx'\,dx'$ and b is the greatest value of $|b_m|$. In Art. 38 attention is drawn to the fact that, in a professedly inexact theory like the present one, the important thing is the *nature of the restriction* imposed on $f(x)$; and, as the quasi-necessary condition $(\mathfrak{B}_1)$ clearly shows, this is purely arithmetical. We conclude the exposition of this theory with Art. 39 in which illustrative examples are given; in each example we start with *definite* suppositions as to the magnitudes of λ, λ_2, λ_1, and find out the corresponding superior limit of error. The table given in the fourth example draws attention to the fact that the error increases very rapidly as the change of initial temperature from assemblage to assemblage increases; in

www.libtool.com.cn

the fifth example this change is so great that the theory fails to give any approximation to the solution.

In Arts. 40—43 we give a brief criticism of Fourier's theory. We begin by pointing out that Fourier's theory is a continuous one; we then find in Art. 41 the conditions which are necessary and sufficient in order that the conditions given by Fourier's theory may have any meaning and, further, follow from the conditions (A), (B) and (C) of our theory. In Art. 42 we consider the solutions of Fourier's type and prove the following result: —

In order that the conditions given by Fourier's theory viz.,

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t),$$

$T(x, t)$ is continuous in t, and $T'(\pi, t) = 0$, $T'(-\pi, t) = 0$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $0 \leq t$, may have meaning and necessarily follow from (A), (B) and (C), it is necessary that $f''(x)$ exist and be finite; and it is sufficient that $f''(x)$ be finite and continuous, and $f'(\pi)$, $f'(-\pi)$ be zero.

We conclude this part with Art. 43 which contains seven examples specially selected to illustrate the limited scope of Fourier's theory.

(5)

Part III. contains a theory which regards the solid as improperly continuous; to work out this theory we have to employ an *improperly continuous analysis*, i. e., an analysis in which one of the independent variables has for its domain an everywhere dense but enumerable aggregate. We begin by carefully specifying in Art. 44 the notation which we employ. In Art. 45 we formulate the following improperly continuous theory of solids:

With the slab is associated an enumerable aggregate G, of positive numbers, which is everywhere dense in the interval $(0, \pi)$ and contains π: we call G the *discriminating aggregate* of the slab. Also, two slabs differ only in this that they have different discriminating aggregates. Taking ξ for a variable with the aggregates $-G$ and G as its domain, we define the temperature $T(x, t)$ at any point x by the equations

$$T(x, t) = \frac{1}{2l} \int_{x-l}^{x+l} C(\xi, t)\, d\xi, \quad 0 \leq x \leq \pi - l,$$

$$T(x, t) = \frac{1}{(\pi - x + l)} \int_{x-l}^{\pi} C(\xi, t)\, d\xi, \quad \pi - l \leq x \leq \pi,$$

where l is dependent on G and is less than, say, 10^{-7}.

These are the equations $(\mathfrak{A}_3)$ of page 50: $C(\xi, t)$ is called the *characteristic function* of the slab. At the end of Art. 45 the problem of linear conduction is thus formulated:

www.libtool.com.cn

Given the initial characteristic function $C(\xi, 0)$, find the characteristic function at any subsequent time.

We then go on to obtain the analytical representations of the conditions of the phenomenon; these are the conditions (A_2), (B_2), (C_2) and (D_2) of Art. 47. In Art. 48 attention is drawn to the definition of temperature, as given by $(\mathfrak{A}_2)$, which indicates the classification of initial temperatures as possible or impossible. In Arts. 49—53 we discuss characteristic functions of Fourier's type. We begin by expressing (A_2), (B_2), (C_2) and (D_2) in terms of $V(x, t)$ and in the notation of continuous analysis; we thus obtain in Art. 51 the group of conditions which is necessary and sufficient in order that $C(\xi, t) = \chi(\xi, t)$, $C(\xi, 0)$ being $\varphi(\xi)$: here $\chi(\xi, t) = V(\xi, t)$ and $\varphi(\xi) = f(\xi)$.

These conditions are as follows:

i. For every value of ξ, there exists a finite constant P such that, for any value of t, however small, $\left|\left\{\frac{\partial}{\partial x} V(x, t)\right\}_{x=\xi}\right|$ is less than P, $-\pi < \xi < \pi$.

ii. $\lim_{t=+0} V(\xi, t) = \varphi(\xi)$ if the limit exists; or, the limit does not exist, and then $\varphi(\xi)$ is contained in the aggregate of values assumed by $V(\xi, t)$ as t approaches zero.

Making use of the results of Arts. 19 and 21 we find in Art. 52 necessary and sufficient conditions, for $\varphi(\xi)$, of an extensive applicability. These conditions at once indicate the classification of initial states as stable or unstable, oscillatory or non-oscillatory, admissible or inadmissible. This classification is discussed in Art. 53. In Arts. 54 and 55 we discuss approximations to impossible initial temperatures. We conclude the exposition of the theory with Art. 56 in which nine examples are given to illustrate the salient features of the theory.

This part ends with Arts. 57—59 in which we give a careful discussion of the question of „the uniqueness of the solution", specially bearing in mind the fact that there *may* be solutions other than functions of Fourier's type.

(6)

In Part IV. we discuss briefly the theories, expounded in the previous parts, in so far as they illustrate the nature of the relation of mathematical analysis to physics.

www.libtool.com.cn

Part I.

Continuous Theory [1]).

Formulation of the Problem.

1. In the present part I propose to examine the phenomenon of the linear conduction of heat in a homogeneous solid from the point of view of the continuous theory of matter; I will, therefore, treat the slab *as a continuum with the same properties in all its points.*

Analytical representation of the conditions of the Phenomenon.

2. Take a straight line perpendicular to the faces of the solid as the axis of x. Let the faces be given by

$$x = -\pi, \quad x = +\pi.$$

Let t be another continuous variable; and, unless the contrary is mentioned, suppose that $0 \leq t$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

Then the temperature of any point of the solid at time t is a function of x and t only. Let $T(x, t)$ be this function.

3. Let S be *any* closed surface in the solid. Then the principle of the conservation of energy requires the equality of the quantity of heat which flows into S in *any* interval $(t, t+\tau)$ and the quantity of heat absorbed by the enclosed solid in the same interval. It is evident that the principle is satisfied if the equality is proved for the case when S is *any* cylindrical surface with the axis of x as its axis.

1) In working out this theory I have received very great help from Fourier's „Théorie Analytique de la Chaleur". I am also greatly indebted to Du Bois Reymond's „Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln" (Abhandlungen der k. bayer. Akademie, Bd. XII).

www.libtool.com.cn

The following *two hypotheses* suffice for an analytical representation of the principle of energy as stated above:

i. The quantity of heat which flows across unit area, placed at x at right angles to the axis of x, along this axis in any interval $(t, t+\tau)$ is equal to

$$-K\int_t^{t+\tau} T'(x, t')\,dt',$$

where $T'(x, t')$ stands for $\frac{\partial}{\partial x} T(x, t')$ and K is a constant called the thermal conductivity of the solid,

$$-\pi < x < \pi. \qquad (\alpha)$$

ii. The quantity of heat which is absorbed by a cylinder, with the axis of x as its axis and its faces, of unit area, $x = x_1$, $x = x_2$, in any interval $(t, t+\tau)$ is equal to

$$c\int_{x_1}^{x_2} \{T(x', t+\tau) - T(x', t)\}\,dx',$$

where c is a constant called the thermal capacity of the solid. (β)

It would be convenient to consider the units so chosen that $\frac{K}{c} = 1$.

4. Thus the principle of the conservation of energy together with the supposition of the impermeability of the face, $x = -\pi$, of the solid finds expression in the equation

$$\int_{-\pi}^{x} \{T(x', t) - T(x', 0)\}\,dx' = \int_0^t T'(x, t')\,dt', \qquad -\pi < x < \pi. \qquad (A)$$

This is the *first and the fundamental condition* of the phenomenon.

The *second condition* is the following:

$T(x, t)$ is continuous in t, or, if it has any discontinuities they are of the second kind; further, if t_ω is a point of discontinuity, $T(x, t_\omega)$ is contained in the aggregate of values assumed by $T(x, t)$ as t approaches t_ω. (B)

This is merely the analytical representation of the supposition that when, with a given x, $T(x, t)$ passes from one value to another it assumes all the intermediate values.

The *third condition*,

$$\lim_{x = -\pi + 0} Q(x, t) = 0, \qquad \lim_{x = \pi - 0} Q(x, t) = 0, \qquad (C)$$

expresses the impermeability of the faces, $Q(x, t)$ being the quantity of heat which flows across unit area, at x, in the interval $(0, t)$.

www.libtool.com.cn

5. It should be noted that $T(x, t)$ need not satisfy any conditions other than those necessary to make the conditions (A), (B) and (C) intelligible and these conditions themselves. For example, $T'(x, t)$ need only be finite and integrable in t; thus it may not be possible to obtain an interval of time, however small, in which there are not an infinite number of instants at which the rate of flow of heat does not exist. Also $T'(x, t)$ may be meaningless for an aggregate of values of t, of zero content; in particular $T'(x, 0)$ may not exist.

Solutions of Fourier's Type.

6. Let the initial temperature be $f(x)$, a finite, integrable, and even function of x. I will find the necessary and sufficient conditions, that $f(x)$ must satisfy, in order that the temperature at any *subsequent* time be given by $V(x, t)$, where

$$V(x, t) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_1^{m=\infty} a_m \cos mx\, e^{-m^2 t},$$

a_m being given by

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x') \cos mx'\, dx'.$$

It should be noted that $V(x, t)$ is defined *only* for $t > 0$.

7. Substitute in (A) and (B)

$$T(x, t) = V(x, t),$$
$$T(x, 0) = f(x).$$

Then these conditions become

$$\int_{-\pi}^{x} \{V(x', t) - f(x')\}\, dx' = \int_0^t V'(x, t')\, dt', \qquad -\pi < x < \pi; \tag{A'}$$

$\lim_{t=+0} V(x, t) = f(x)$ if the limit exists, or, the limit does not exist, and then $f(x)$ is contained in the aggregate of values assumed by $V(x, t)$ as t approaches zero. (B')

Consider (A'). The series for $V(x', t)$ is uniformly convergent in x' and is consequently integrable term by term; also it is easily seen that

$$\int_{-\pi}^{x} \{f(x') - \tfrac{1}{2} a_0\}\, dx' = \sum_1^{\infty} \frac{a_m}{m} \sin mx.$$

Therefore the left side of (A') is equal to

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_m}{m} \sin mx\, e^{-m^2 t} - \sum_1^{\infty} \frac{a_m}{m} \sin mx. \tag{1}$$

www.libtool.com.cn

Now,

$$\int_0^t V'(x, t')\,dt' = \int_{t_0}^t + \int_0^{t_0} V'(x, t')\,dt'$$

where $t_0 > 0$ but arbitrarily small and fixed.

$$V'(x, t') = -\sum_1^\infty m a_m \sin mx\, e^{-m^2 t'};$$

and, since this series is uniformly convergent in t' for $t' > 0$, it is integrable term by term in the interval (t_0, t).

Therefore the right side of (A′) is equal to

$$\sum_1^\infty \frac{a_m}{m} \sin mx\, e^{-m^2 t} - \sum_1^\infty \frac{a_m}{m} \sin mx\, e^{-m^2 t_0} + \int_0^{t_0} V'(x, t')\,dt'.$$

But it is well known that a_m becomes indefinitely small with $\frac{1}{m}$. Therefore

$$\sum_1^\infty \frac{a_m}{m} \sin mx\, e^{-m^2 t_0} = \sum_1^\infty \frac{a_m}{m} \sin mx + \sigma_1(t_0)$$

where $\sigma_1(t_0)$ becomes indefinitely small with t_0. Thus, if for any value of t', however small, $|V'(x, t')|$ is less than a finite quantity $P(x)$, the right side of (A′) is equal to

$$\sum_1^\infty \frac{a_m}{m} \sin mx\, e^{-m^2 t} - \sum_1^\infty \frac{a_m}{m} \sin mx - \sigma_1(t_0) + \theta t_0 P(x)$$

where $0 \leq |\theta| < 1$. (2)

Therefore, by choosing t_0 sufficiently small, the difference between (1) and (2) can be made as small as we please. Therefore (A′) is satisfied.

8. When $|V'(x, t')|$ does not remain less than a finite quantity $P(x)$, as t' approaches zero, then $\int_0^t V'(x, t')\,dt'$ is meaningless and, consequently, $Q(x, t)$, the quantity of heat which flows across unit area, at x, in the interval $(0, t)$, is indeterminate. I will, therefore, supplement the hypothesis (α) by the following hypothesis:

If the values of x, for which $P(x)$ exists and, consequently, according to (α), $Q(x, t)$ becomes indefinitely small with t, form an aggregate which is everywhere dense within the domain of x, i. e. the continuum $(-\pi, +\pi)$, then $Q(x, t)$ becomes indefinitely small with t for every value of x within the domain. (γ)

9. Consider the condition (C). It follows from the two preceding articles that, if the values of x, for which P exists, form an aggregate everywhere dense within the interval $(-\pi, \pi)$,

$$-\frac{1}{K} Q(x, t) = \sum_1^\infty \frac{a_m}{m} \sin mx\, e^{-m^2 t} - \sum_1^\infty \frac{a_m}{m} \sin mx, \qquad -\pi < x < \pi.$$

www.libtool.com.cn

Since both the series on the right side of the above equation are uniformly convergent in x,

$$\lim_{x=\pi-0} Q(x, t) = 0,$$

$$\lim_{x=-\pi+0} Q(x, t) = 0.$$

10. Thus the *group of conditions which is necessary and sufficient, in order that $V(x, t)$ be the solution of the problem*, is the following:

i. For every value of x or, at least, for an everywhere dense aggregate of its values, there exists a finite constant P such that, for any value of t, however small, $|V'(x, t)| < P$, $-\pi < x < \pi$.

ii. $\operatorname{Lim}_{t=+0} V(x, t) = f(x)$ if the limit exists, or, the limit does not exist, and then $f(x)$ is contained in the aggregate of values assumed by $V(x, t)$ as t approaches zero.

Behaviour of $V'(x, t)$ for t small.

11. As $V'(x, t)$ is an odd function of x and $V'(0, t) = 0$, it would be sufficient to consider the case $0 < x < \pi$.

Let $\Theta(y, t)$ stand for

$$1 + 2\sum_1^\infty \cos my\, e^{-m^2 t}, \qquad t > 0, \qquad 0 \leq y \leq 2\pi.$$

Then

$$\Theta'(y, t) = -2\sum_1^\infty m \sin my\, e^{-m^2 t}.$$

Now,

$$\begin{aligned} V'(x, t) &= -\sum_1^\infty m a_m \sin mx\, e^{-m^2 t} \\ &= -\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \int_0^\pi m \sin mx \cos mx'\, e^{-m^2 t} f(x')\, dx' \\ &= -\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \int_0^\pi m \sin m(x+x')\, e^{-m^2 t} f(x')\, dx' \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \int_0^\pi m \sin m(x'-x)\, e^{-m^2 t} f(x')\, dx'. \end{aligned}$$

Since the series $\sum_1^\infty m \sin my\, e^{-m^2 t}$ is uniformly convergent in y in the interval $(0, 2\pi)$, it follows that

$$\sum_1^\infty m \sin m(x'+x)\, e^{-m^2 t} \quad \text{and} \quad \sum_1^\infty m \sin m(x'-x)\, e^{-m^2 t}$$

www.libtool.com.cn

are also uniformly convergent in x' in the interval $(0, \pi)$. Again $f(x')$ is finite and integrable.

Therefore

$$-\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \int_0^\pi m \sin m(x+x') e^{-m^2 t} f(x')\, dx'$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x') \left\{\sum_1^\infty m \sin m(x+x') e^{-m^2 t}\right\} dx'$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x') \Theta'(x+x')\, dx'.$$

Similarly,

$$\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \int_0^\pi m \sin m(x'-x) e^{-m^2 t} f(x')\, dx'$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x') \Theta'(x'-x)\, dx'.$$

Therefore

$$V'(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x') \Theta'(x'+x)\, dx'$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x') \Theta'(x'-x)\, dx'.$$

12. It is well-known that

$$\Theta(y, t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \left\{\sum_1^\infty e^{\frac{-(y-2n\pi)^2}{4t}} + \sum_1^\infty e^{\frac{-(y+2n\pi)^2}{4t}}\right\} + \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{y^2}{4t}}.$$

Therefore, when y differs from 0 and 2π by quantities which are numerically greater than a positive quantity d, $|\Theta'(y, t)| \lessapprox [1] \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{d^2}{4t}}$ as t approaches zero.

Therefore

$$V'(x, t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{x-\sigma}^{x+\sigma} f(x') \Theta'(x'-x)\, dx' + r(t),$$

where σ is an arbitrarily small but fixed quantity and

$$|r(t)| \lessapprox \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\sigma^2}{4t}}.$$

---

1) $L \gtrapprox M$ stands for $L \gtrsim MN$ where N is finite and positive (different from zero) but *not* necessarily monoton.

www.libtool.com.cn

Therefore

$$V'(x,t) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\sigma \{f(x+x')-f(x-x')\}\,\Theta'(x')\,dx' + r(t).$$

Now

$$\Theta'(x') = -\frac{\sqrt{\pi}\,x'}{2t^{\frac{3}{2}}}\,e^{-\frac{x'^2}{4t}} + r_1(t)$$

where

$$|r_1(t)| \lesssim \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,e^{-\frac{(2\pi-\sigma)^2}{4t}}.$$

Therefore

$$V'(x,t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}\asymp t}\int_0^\sigma \left\{\frac{f(x+x')-f(x-x')}{x'}\right\} x'^2\,e^{-\frac{x'^2}{4t}}\,dx' + R(t)$$

where

$$|R(t)| \asymp \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,e^{-\frac{\sigma^2}{4t}}.$$

Let $D(x,x')$ stand for $\frac{f(x+x')-f(x-x')}{2x'}$. Then,

$$V'(x,t) \text{ behaves as } \frac{1}{2\sqrt{\pi t}\asymp t}\int_0^\sigma D(x,x')\,x'^2\,e^{-\frac{x'^2}{4t}}\,dx' \qquad \text{(I)}$$

when t approaches zero.

13. If $|D(x,x')| < A$, a finite quantity, as x' approaches zero, then it follows from (I) that

$$|V'(x,t)| < \frac{A}{2\sqrt{\pi t}\asymp t}\int_0^\sigma x'^2\,e^{-\frac{x'^2}{4t}}\,dx'$$

as t approaches zero. But $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}\asymp t}\int_0^\sigma x'^2\,e^{-\frac{x'^2}{4t}}\,dx'$ approaches 1 as t approaches zero. Therefore $|V'(x,t)| < A$ as t approaches zero.

If $D(x,x')$ becomes indefinitely large as x' approaches zero, then it is easily seen that $V'(x,t)$ becomes indefinitely large, as t approaches zero, and has the same sign as $D(x,x')$. In particular, when $D(x,x') \backsim x'^{k-1}$ as x' approaches zero, $0 \leq k < 1$, $V'(x,t) \backsim (\sqrt{t})^{k-1}$.

I proceed now to consider the case when $D(x,x')$ makes an indefinitely large number of fluctuations, with indefinitely increasing amplitude, as x' approaches zero. It would be sufficient for the purposes of this essay to investigate

www.libtool.com.cn

the case when

$$D(x, x') \sim x'^{k-1} \cos\{\psi(x')\},$$

where $\psi(x') > 1$; the investigation naturally divides itself under three heads: 1. $\psi(x') \prec l\left(\frac{1}{x'}\right)$, 2. $\psi(x') \sim l\left(\frac{1}{x'}\right)$, 3. $\psi(x') \succ l\left(\frac{1}{x'}\right)$.

1. $\psi(x') \prec l\left(\frac{1}{x'}\right)$.

14. It follows from (I) that $t^{\frac{k}{2}} V'(x, t) \sim \int_0^\sigma x'^{1+k} \cos\{\psi(x')\} e^{-\frac{x'^2}{4t}} dx'$.

Let I, I_1, I_2 stand for $\int_0^\sigma$, $\int_0^{C \times 2\sqrt{t}}$, $\int_{C \times 2\sqrt{t}}^\sigma x'^{1+k} \cos\{\psi(x')\} e^{-\frac{x'^2}{4t}} dx'$ respectively, C being an arbitrarily large but fixed quantity.

Consider I_1.

Put $x' = 2\sqrt{t}\, y$.

Then

$$I_1 = (2\sqrt{t})^{2+k} \int_0^C y^{1+k} \cos\{\psi(2\sqrt{t}\, y)\} e^{-y^2} dy.$$

Let $\psi(2\sqrt{t}\, y) = \psi(2\sqrt{t}\, \varepsilon) - v = u - v$, ε being an arbitrarily small but fixed quantity [1].

Then $\int_0^C = \int_\varepsilon^C + \int_0^\varepsilon$.

And

$$\int_\varepsilon^C = \cos u \int_\varepsilon^C y^{1+k} \cos v\, e^{-y^2} dy + \sin u \int_\varepsilon^C y^{1+k} \sin v\, e^{-y^2} dy.$$

Now

$$\psi(2\sqrt{t}\, y) - \psi(2\sqrt{t}\, \varepsilon) = 2(y - \varepsilon)\sqrt{t}\, \psi'(2\sqrt{t}\, \bar{y}),$$

where

$$\varepsilon < \bar{y} < y.$$

Since $\psi(x') \prec l\left(\frac{1}{x'}\right)$ it follows that $-\psi'(x') \prec \frac{1}{x'}$. Therefore

$$-\sqrt{t}\, \psi'(2\sqrt{t}\, \bar{y}) \prec 1$$

and, for every value of y in the interval (ε, C), v approaches zero with t.

Therefore

$$\int_\varepsilon^C y^{1+k} \cos v\, e^{-y^2} dy \quad \text{and} \quad \int_\varepsilon^C y^{1+k} \sin v\, e^{-y^2} dy$$

approach $\int_\varepsilon^C y^{1+k} e^{-y^2} dy$ and 0, respectively, as t approaches zero.

1) This artifice was suggested to me by the procedure in Art. 4 of Du Bois Reymond's Memoir.

www.libtool.com.cn

Therefore, since $\int_0^{\varepsilon} y^{1+k} \cos\{\psi(2\sqrt{t}\,y)\} e^{-y^2} dy$ can be made as small as we please, by choosing ε sufficiently small, and $\{\psi(2\varepsilon\sqrt{t}) - \psi(2\sqrt{t})\} \prec 1$, it follows that

$$I_1 \backsim (\sqrt{t})^{2+k} \cos\{\psi(2\sqrt{t})\}$$

for those values of t for which $\cos\{\psi(2\sqrt{t})\}$ is not zero.

15. Consider I_2. Put $\psi(x') = \eta$. Then

$$I_2 = \int_{\psi(C \prec 2\sqrt{t})}^{\psi(\sigma)} P(x') \cos\eta \, d\eta,$$

where $P(x')$ stands for $\dfrac{x'^{1+k} e^{-\frac{x'^2}{4t}}}{\psi'(x')}$.

Put $\dfrac{x'^{1+k}}{\psi'(x')} = X(x')$ and let d be the value of x' for which $-P(x')$ attains its maximum.

Then d is given by the equation

$$\frac{X'(d)}{X(d)} = \frac{d}{2t}.$$

Now,

$$\frac{1}{x'} \succ \{-\psi'(x')\} \succ 1$$

since

$$l\left(\frac{1}{x'}\right) \succ \psi(x') \succ 1.$$

Therefore

$$x'^{2+k} \prec \{-X(x')\} \prec x'^{1+k}.$$

Therefore $l\{-X(x')\} \sim l(x')$ and, consequently,

$$\frac{X'(x')}{X(x')} \sim \frac{1}{x'}.$$

Therefore $\dfrac{d}{2t} \sim \dfrac{1}{d}$ and, consequently, $d \sim \sqrt{t}$.

Let C be chosen to be sufficiently large; then,

$$d \prec C \prec 2\sqrt{t}$$

and $-P(x')$ constantly decreases as x' increases from $C \prec 2\sqrt{t}$ to σ.

Let $\psi(d) = \eta_1$; then it is evident that

$$\{\eta_1 - \psi(C \prec 2\sqrt{t})\} \prec 1.$$

www.libtool.com.cn

Now, putting $-P(x') = Q(\eta)$,

$$I_2 = \int_{\psi(\sigma)}^{\psi(C\times 2\sqrt{t})} Q(\eta)\cos\eta\, d\eta$$

$$= \int_{\eta_1-\frac{\pi}{2}}^{\psi(C\times 2\sqrt{t})} + \int_{\eta_1-\frac{3\pi}{2}}^{\eta_1-\frac{\pi}{2}} + \int_{\eta_1-\frac{5\pi}{2}}^{\eta_1-\frac{3\pi}{2}} + \cdots + \int_{\psi(\sigma)}^{\eta_1-\frac{2r-1}{2}\pi},$$

where $\eta_1-\frac{2r+1}{2}\pi \leq \psi(\sigma) < \eta_1-\frac{2r-1}{2}\pi$, r being integral.

Suppose $t = t_m$ so that $\eta_1 = m\pi$, where m is integral. Then $\int_{\eta_1-\frac{\pi}{2}}^{\psi(C\times 2\sqrt{t})}$ is numerically greater than $(-1)^m\int_{\eta_1-\frac{3\pi}{8}}^{\eta_1-\frac{\pi}{8}}$ and therefore still greater than

$$\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{8}\,Q\left(\eta_1-\frac{3\pi}{8}\right);$$

and it has the sign $(-1)^m$.

$\int_{\eta_1-\frac{3\pi}{2}}^{\eta_1-\frac{\pi}{2}}$ is numerically less than $\pi Q\left(\eta_1-\frac{\pi}{2}\right)$ and has the sign $(-1)^{m+1}$.

$$\int_{\eta_1-\frac{5\pi}{2}}^{\eta_1-\frac{3\pi}{2}} + \int_{\eta_1-\frac{7\pi}{2}}^{\eta_1-\frac{5\pi}{2}} + \cdots + \int_{\psi(\sigma)}^{\eta_1-\frac{2r-1}{2}\pi}$$

$$= (-1)^m \times 2\left\{Q(\bar{\eta}_2) - Q(\bar{\eta}_3) + \cdots + (-1)^{r-1}Q(\bar{\eta}_{r-1}) + (-1)^r k_r Q(\bar{\eta}_r)\right\}$$

where $\bar{\eta}_2$, $\bar{\eta}_3$, etc. lie within the intervals $\left(\eta_1-\frac{3\pi}{2},\ \eta_1-\frac{5\pi}{2}\right)$, $\left(\eta_1-\frac{5\pi}{2},\ \eta_1-\frac{7\pi}{2}\right)$, etc. respectively, and $0 < k_r \leq 1$.

Therefore $Q(\bar{\eta}_2)$, $Q(\bar{\eta}_3)$, etc. form a decreasing series; and, consequently, I_2 has the sign $(-1)^m$ and is numerically greater than

$$\left\{\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{8}\,Q\left(\eta_1-\frac{3\pi}{8}\right) - \pi Q\left(\eta_1-\frac{\pi}{2}\right)\right\},$$

provided that this expression is positive.

Now, let

$$\psi(\chi) = \eta_1-\frac{3\pi}{8},$$

$$\psi(\chi+\theta) = \eta_1-\frac{\pi}{2}.$$

www.libtool.com.cn

Then

$$\psi(\chi+\theta)-\psi(\chi) = \theta\psi'(\bar{\chi}) = -\frac{\pi}{8},$$

where $\chi < \bar{\chi} < \chi+\theta$.

Therefore $\frac{\theta}{\chi} = -\frac{\pi}{8\chi\psi'(\bar{\chi})}$ is greater than $-\frac{\pi}{8\chi\psi'(\chi)}$ since evidently $-\psi'(x')$ decreases as x' increases. But $-x'\psi'(x') < 1$ since $\psi(x') < l\left(\frac{1}{x'}\right)$.

Therefore $\frac{\theta}{\chi} > 1$ as χ approaches zero. (1)

Now, it is easily seen that as t approaches zero

$$Q\left(\eta_1-\frac{\pi}{2}\right) > Q\left(\eta_1-\frac{3\pi}{8}\right) \quad \text{if} \quad \frac{(\chi+\theta)^2-\chi^2}{t} > \frac{\theta^2}{\chi^2}.$$

But

$$\frac{(\chi+\theta)^2-\chi^2}{t} = \frac{2\chi\theta+\theta^2}{t} \sim \frac{\theta^2}{d^2}$$

according to (1).

And $\chi > d$. Therefore $\frac{\theta^2}{d^2} > \frac{\theta^2}{\chi^2}$ and, consequently,

$$Q\left(\eta_1-\frac{\pi}{2}\right) < Q\left(\eta_1-\frac{3\pi}{8}\right).$$

Therefore $I_2(t_m)$ has the sign $(-1)^m$.

16. Since $\{\psi(2\sqrt{t_m})-m\pi\}$ approaches zero as t_m approaches zero and, consequently, m approaches infinity, it follows from Art. 14 that

$I_1(t_m)$ has the sign $(-1)^m$.

Therefore $I(t_m) = I_1(t_m)+I_2(t_m)$ has the sign $(-1)^m$.

Therefore it is proved that, *as t approaches zero, $V'(x, t)$ makes an indefinitely large number of fluctuations, from positive to negative values, with indefinitely increasing amplitude.* For the sake of brevity I will, hereafter, express such behaviour by the symbolism

$$V'(x, t) \pm > 1.$$

2. $\psi(x') \sim l\left(\frac{1}{x'}\right)$.

17.
$$I_1 = \int_0^{C\times 2\sqrt{t}} x'^{1+k} \cos\left\{l\left(\frac{1}{x'}\right)\right\} e^{-\frac{x'^2}{4t}}\, dx'$$
$$= (2\sqrt{t})^{2+k} \int_0^C y^{1+k} \cos\left\{l\left(\frac{1}{y}\right)+l\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\right\} e^{-y^2}\, dy$$
$$= (2\sqrt{t})^{2+k} R \cos\left\{\left(l\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)+\gamma\right\},$$

www.libtool.com.cn

where

$$R\cos\gamma = \int_0^C y^{1+k}\cos\left\{l\left(\frac{1}{y}\right)\right\}e^{-y^2}dy,$$
$$R\sin\gamma = \int_0^C y^{1+k}\sin\left\{l\left(\frac{1}{y}\right)\right\}e^{-y^2}dy. \qquad (1)$$

Consider $I_2 = \int_{l(1/C\times 2\sqrt{t})}^{l(1/\sigma)} P(x')\cos\eta d\eta$ where $P(x')$ and η are equal to $-x'^{2+k}e^{-\frac{x'^2}{4t}}$ and $l\left(\frac{1}{x'}\right)$ respectively.

The value of x' for which $-P(x')$ attains its maximum is

$$x' = d = \sqrt{2(2+k)t}.$$

Therefore, when C is sufficiently large, $-P(x')$ constantly decreases as x' increases from $C\times 2\sqrt{t}$ to σ.

Putting $l(1/C\times 2\sqrt{t}) = \eta_0$, let

$$(m+\tfrac{1}{2})\pi \geq \eta_0 > (m-\tfrac{1}{2})\pi,$$
$$(m-r+\tfrac{1}{2})\pi > l(1/\sigma) \geq (m-r-\tfrac{1}{2})\pi.$$

Then

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{l(1/\sigma)}^{\eta_0} Q(\eta)\cos\eta d\eta \\ &= \int_{(m-\frac{1}{2})\pi}^{\eta_0} + \int_{(m-\frac{3}{2})\pi}^{(m-\frac{1}{2})\pi} + \int_{(m-\frac{5}{2}\pi)}^{(m-\frac{3}{2})\pi} + \cdots + \int_{l(1/\sigma)}^{(m-r+\frac{1}{2})\pi} \\ &= (-1)^m \times 2\left\{k_0 Q(\bar{\eta}_0) - Q(\bar{\eta}_1) + Q(\bar{\eta}_2) - \cdots + (-1)^{r-1}Q(\bar{\eta}_{r-1}) + (-1)^r k_r Q(\bar{\eta}_r)\right\} \end{aligned}$$

where $\bar{\eta}_0$, $\bar{\eta}_1$, etc. lie within the limits of the first, second, etc. integrals respectively, and $0 < (k_0, k_r) \leq 1$.

Since the Q's form a decreasing series it is easily seen that

$$I_2 = (-1)^m \times 2\left\{k_0 Q(\bar{\eta}_0) - \bar{k}Q(\bar{\eta}_1)\right\}$$

where $0 < \bar{k} < 1$. Therefore

$$|I_2| < 4Q(\bar{\eta}_0) < 4Q(\eta_0) \quad \text{i. e.} \quad -4P(C\times 2\sqrt{t}).$$

Thus

$$|I_2| < 4(C\times 2\sqrt{t})^{2+k}e^{-C^2}.$$

Therefore, by choosing C sufficiently large, I_2 can be made as small as we please, in comparison with I_1, provided that I_1 is not zero.

Therefore, γ_0 being the value of γ when C is made infinite in (1),

www.libtool.com.cn

$$V'(x, t) \backsim (\sqrt{t})^{-1+k} \cos\left\{l\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)+\gamma_0\right\}$$

for those values of t for which the cosine is not zero.

Therefore $V'(x, t) \pm\!\!> 1$.

3. $\psi(x') \succ l\left(\frac{1}{x'}\right)$.

18. $I = \int_0^\sigma x'^{1+k} \cos\{\psi(x')\} e^{-\frac{x'^2}{4t}} dx' = \int_d^\sigma + \int_0^d$.

Proceeding as in the case of I_3 of the last article, it is easily seen that each of the integrals $\int_d^\sigma$ and $\int_0^d$ is numerically less than $4P(d)$.

Therefore $|I| < 8|P(d)|$ and, consequently, $|I| \precsim |P(d)|$ as t approaches zero.

Case I: $\psi(x') \succ \frac{1}{x'}$.

As shown in the beginning of Art. 15, d is given by the equation

$$\frac{X'(d)}{X(d)} = \frac{d}{2t};$$

and since

$$\psi(x') \succ \frac{1}{x'}, \qquad -\psi'(x') \succ \frac{1}{x'^2}.$$

Therefore $-X(x') \prec x'^{3+k}$ and, consequently, $l\{-X(x')\} \precsim l(x')$.

Therefore

$$\frac{X'(x')}{X(x')} \precsim \frac{1}{x'};$$

hence $\frac{d}{2t} \precsim \frac{1}{d}$ and, consequently, $d \precsim \sqrt{t}$.

Now,

$$P(d) = X(d) e^{-\frac{d^2}{4t}};$$

$$\text{hence } -P(d) \prec d^{3+k} e^{-\frac{d^2}{4t}}.$$

Since $|I| \precsim -P(d)$, it follows that

$$|V'(x, t)| \prec t^{-\frac{3}{2}} d^{3+k} e^{-\frac{d^2}{4t}} \text{ and, consequently, } \prec 1.$$

www.libtool.com.cn

Case II:

$$\frac{1}{x'} \gtrsim \psi(x') \succ l\left(\frac{1}{x'}\right).$$

Therefore $x'^{3+k} \precsim \{-X(x')\} \prec x'^{2+k}$;

hence $l\{-X(x')\} \sim l(x')$.

Therefore $\dfrac{X'(x')}{X(x')} \sim \dfrac{1}{x'}$ and, consequently, $d \sim \sqrt{t}$.

Therefore

$$|V'(x,t)| \gtrsim -t^{-\frac{1}{2}} X(\sqrt{t}), \quad \text{i. e.} \quad \frac{-(\sqrt{t})^{k-2}}{\psi'(\sqrt{t})}. \tag{1}$$

Thus, when $\psi(x') \gtrsim \dfrac{1}{x'^{\nu}}$, it follows from (1) that $|V'(x,t)| \prec 1$ if $k+\nu > 1$. When $\psi(x') \sim \dfrac{1}{x'}$ or $k+\nu = 1$, $|V'(x,t)| \gtrsim 1$. In all other cases (1) leaves it uncertain whether

$$|V'(x,t)| \underset{\pm}{\gtrless} 1.$$

Summary relating to the behaviour of $V'(x,t)$ for t small.

19. The results obtained in Arts. 11—18 may be summed up as follows:

i. $|V'(x,t)| \backsim 1$ if $|D(x,x')| \backsim 1$.

In particular $\{|V'(x,t)| - A\} \prec 1$ if $\{|D(x,x')| - A\} \prec 1$, A being a finite positive quantity.

ii. $|V'(x,t)| \succ 1$ if $|D(x,x')| \succ 1$.

iii. When $D(x,x') \sim x'^{-1+k} \cos\{\psi(x')\}$, $\psi(x')$ being $\succ 1$ and $0 \leq k < 1$,

$$V'(x,t) \pm \succ 1, \quad |V'(x,t)| \prec 1, \quad \text{or} \quad |V'(x,t)| \gtrsim \frac{-(\sqrt{t})^{k-2}}{\psi'(\sqrt{t})}$$

according as $\psi(x') \precsim l\left(\dfrac{1}{x'}\right)$, $\succ \dfrac{1}{x'}$, or $\succ l\left(\dfrac{1}{x'}\right)$ but $\precsim \dfrac{1}{x'}$.

Behaviour of $V(x,t)$ for t small.

20. As $V(x,t)$ is an even function of x it would be sufficient to consider the case $0 \leq x \leq \pi$.

Proceeding as in Art. 11, it is found without difficulty that

$$V(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x')\,\Theta(x'+x)\,dx' + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x')\,\Theta(x'-x)\,dx'.$$

It is easily found, by the method of Art. 12, that as t approaches zero

www.libtool.com.cn

$$V(x, t) \text{ behaves as } \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\sigma M(x, x') e^{-\frac{x'^2}{4t}} dx' \qquad \text{(II)}$$

where

$$M(x, x') = \frac{f(x+x') + f(x-x')}{2}, \qquad x < \pi,$$
$$= f(x-x'), \qquad x = \pi.$$

21. It follows from (II) that $\lim_{t=+0} V(x, t) = \lim_{x'=+0} M(x, x')$.

When $\lim_{x'=+0} M(x, x')$ does not exist, i. e., when $M(x, x')$ has a discontinuity of the second kind at $x' = 0$, it would be sufficient for the purposes of this essay to consider the case, $M(x, x') \sim \cos\{\psi(x')\}$, where $\psi(x') > 1$.

Case I: $\psi(x') \precsim l\left(\frac{1}{x'}\right)$.

Noting that $\frac{X'(x')}{X(x')} \sim \frac{1}{x'}$, where $X(x') = \frac{1}{\psi'(x')}$, it is easily found by the methods of Arts. 14—17 that $\lim_{t=+0} V(x, t)$ does not exist.

Case II: $\psi(x') > l\left(\frac{1}{x'}\right)$.

It is easily found, by the method of Art. 18, that

$|V(x, t)| < 1$, or $\precsim \{-t^{-\frac{1}{2}} X(\sqrt{t})\}$, i. e. $\frac{-t^{-\frac{1}{2}}}{\psi'(\sqrt{t})}$, according as $\psi(x') > \frac{1}{x'}$, or $\precsim \frac{1}{x'}$.

Since $-\psi'(x') > \frac{1}{x'}$, it follows that $|V(x, t)|$ is always < 1.

Necessary and sufficient conditions for $f(x)$.

22. The group of conditions, of Art. 10, which is necessary and sufficient in order that $V(x, t)$ be the solution of the problem leads, with the help of the results given in Arts. 19 and 21, to certain necessary and sufficient conditions, for $f(x)$, of an applicability sufficiently extensive for the purposes of this essay. I give the simplest and most important of these conditions below.

i. If $f(x)$ is continuous in the interval $(-\pi, \pi)$ then, in order that $V(x, t)$ be the solution of the problem, it is sufficient that there exist values of x, forming an aggregate everywhere dense within the interval $(-\pi, \pi)$, for which either $|D(x, x')| \backsim 1$ or $\pm D(x, x') \sim x'^{-1+k} \cos\{\psi(x')\}$ where $\psi(x') > \frac{1}{x'^{\nu}}$, $k + \nu > 1$.

ii. If $f(x)$ is discontinuous in the interval $(-\pi, \pi)$ then the condition relating to $D(x, x')$, given in i., together with one of the following conditions is sufficient:

www.libtool.com.cn

(a) If $\lim_{x'=+0} M(x, x')$ exists, it is equal to $f(x)$.

(b) If $M(x, x') = M_1(x, x') + M_2(x, x')$ such that $\lim_{x'=+0} M_1$ exists and $M_2 \sim \cos\{\psi(x')\}$ where $\psi(x') \succ l\left(\frac{1}{x'}\right)$, then the condition is that $\lim_{x'=+0} M_1 = f(x)$.

(c) $M(x, x') \sim \cos\{\psi(x')\}$ where $\psi(x') \precsim l\left(\frac{1}{x'}\right)$; further, $f(x) = 0$.

iii. $V(x, t)$ ceases to be the solution, if at any point $\lim_{x'=+0} M(x, x')$ exists and is different from $f(x)$.

iv. $V(x, t)$ ceases to be the solution if, at every point within the interval $(-\pi, \pi)$, $\pm D(x, x')$ either $\succ 1$ or $\sim x'^{-1+k} \cos\{\psi(x')\}$ where $\psi(x') \precsim l\left(\frac{1}{x'}\right)$.

Stable, unstable, and inadmissible initial states.

23. I will call an initial state, $T(x, 0) = f(x)$, *stable* or *unstable* according as both the conditions of Art. 10 are satisfied or only the first. An initial state $f(x)$ is considered *inadmissible* if it is not known that the first condition is satisfied. A stable initial state is called *non-oscillatory* if $T(x, t)$ is continuous, i. e., $\lim_{t=+0} V(x, t) = f(x)$; it is called *oscillatory* if there exists at least one point in the interval $(-\pi, \pi)$ where $V(x, t)$ makes, within any indefinitely small interval $(0, t_0)$, an infinite number of finite oscillations about $f(x)$, i. e., $T(x, t)$ has a discontinuity of the second kind at $t = 0$ and $f(x)$ is contained in the aggregate of values assumed by $V(x, t)$ as t approaches zero.

A continuous initial state, if admissible, is always stable and non-oscillatory. A discontinuous initial state, if admissible, may be stable or unstable, non-oscillatory or oscillatory: for example, if it satisfies ii. of the last article it is stable; but it is non-oscillatory or oscillatory according as it corresponds to one of the two (a), (b), or, for at least one value of x, to (c). If an admissible initial state corresponds to iii. it is unstable. Remembering the conditions involved in the integrability of $f(x)$, it is easily seen that an unstable initial state can be replaced by a stable one without changing $V(x, t)$.

An initial state is inadmissible if it corresponds to iv. For, $Q(x, t)$ is indeterminate and, consequently, it is not known whether the principle of the conservation of energy, as stated in Art. 3, is satisfied or not. It should be noted that this is a case of failure *not* of mathematical analysis but of our physical conceptions.

Illustrative Examples.

24. The following simple examples suffice to illustrate the salient features of the theory:

www.libtool.com.cn

(i) Let $T(x, 0) = f(x) = \sum_{1}^{n=\infty} a^n \cos(b^n x)$, where a is a positive constant less than 1, b is an odd integer, and $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. This is Weierstrass's function.

Consider the aggregate $\left\{\frac{M\pi}{b^m}\right\}$ where m and $|M|$ are positive integers and $|M|$ is prime to b and less than b^m. The aggregate is everywhere dense within the interval $(-\pi, \pi)$.

For any point $x_m = \frac{M\pi}{b^m}$ of this aggregate,

$$|D(x, x')| = \left| \sum_{1}^{n=m-1} \frac{a^n \sin(b^n x) \sin(b^n x')}{x'} \right| < \left| \frac{(ab)^m - ab}{ab-1} \right|;$$

hence $|D(x_m, x')| \backsim 1$, and consequently $|V'(x_m, t)| \backsim 1$.

Also $f(x)$ is continuous. Therefore $V(x, t)$ is the solution of the problem and the initial state, $T(x, 0) = f(x)$, is stable and non-oscillatory.

(ii) Let $T(x, 0) = f(x) = \sum_{1}^{n=\infty} \frac{(nx)}{n^s}$, $s > 2$, $0 \leq x \leq \pi$, where (nx) represents zero, when nx is an integer or half an odd integer, and in all other cases, the positive or negative difference between nx and the whole number nearest to it.

At any rational point $\frac{\nu}{2\mu+1}$ with odd denominator,

$$\lim_{x'=+0} D(x, x') = \sum_{1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{s-1}};$$

$$\text{hence } \lim_{t=+0} V'(x, t) = \sum_{1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{s-1}},$$

and, consequently, $V'(x, t) \backsim 1$.

Also $f(x)$ is continuous at any irrational point or rational point $\frac{\nu}{2\mu+1}$; at any rational point, $\frac{\nu}{2\mu}$, with even denominator, $f(x)$ has a discontinuity of the first kind but such that

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\} = \lim_{x'=+0} M(x, x').$$

$$\text{Therefore } f(x) = \lim_{t=+0} V(x, t).$$

Therefore $V(x, t)$ is the solution of the problem and the initial state $f(x)$, though discontinuous, is stable and non-oscillatory.

(iii) Let $T(x, 0) = f(x) = \sum_{1}^{r=\infty} \frac{\Psi(x - \omega_{n_r})}{n_r^{s+1}}$, $s > 1$, $0 \leq x \leq \pi$, where

www.libtool.com.cn

$$\Psi(y) = \cos\left\{l\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}, \qquad |y| > 0,$$
$$\Psi(y) = 0, \qquad y = 0;$$

further, $G_1 = \{\omega_{n_r}\}$, $G_2 = \{\omega_{n_\lambda}\}$ are everywhere dense subaggregates of $\overline{G} = \{\omega_n\}$, the aggregate of rational numbers, arranged according to *Cantor*, such that $\overline{G} = G_1 + G_2$ and the rth and λth terms of G_1 and G_2 are the n_rth and n_λth terms of $\overline{G}$, respectively.

At any point $x = \omega_{n_\lambda}$ of G_2,

$$|\lim_{t=+0} V'(x, t)| = |\lim_{x'=+0} D(x, x')| = \left|\sum_1^{r=\infty} \frac{\Psi'(x-\omega_{n_r})}{n_r^{r+1}}\right| < 2n_\lambda \sum_1^{r=\infty} \frac{1}{n_r^r}$$
$$< 2n_\lambda \sum_1^{r=\infty} \frac{1}{r^r};$$

hence $|V'(x, t)| \backsim 1$.

Also $f(x)$ is continuous at any irrational point or any point belonging to G_2; at any point ω_{n_r}, of G_1, $f(x)$ has a discontinuity of the second kind and behaves as $f_0(x) + \frac{\Psi(x-\omega_{n_r})}{n_r^{r+1}}$, where $f_0(x) = f(x) - \frac{\Psi(x-\omega_{n_r})}{n_r^{r+1}}$ and is continuous.

Therefore at any irrational point or any point of G_2

$$\lim_{t=+0} V(x, t) = f(x);$$

at any point ω_{n_r}, of G_1, $V(x, t)$ makes, within any indefinitely small interval $(0, t_0)$, an infinite number of oscillations, about $f(x)$, of finite amplitude not greater than $\frac{2}{n_r^{r+1}}$.

Therefore $V(x, t)$ is the solution of the problem and the initial state $f(x)$ is stable and oscillatory.

(iv) Let $T(x, 0) = f(x) = \sum_1^{r=\infty} \frac{\Psi_1(x-\omega_{n_r})}{n_r^{s+1}}$, $s > 1$, $0 \leq x \leq \pi$, where

$$\Psi_1(y) = \cos\left\{l\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}, \qquad |y| > 0,$$
$$\Psi_1(y) = 4, \qquad y = 0.$$

$V(x, t)$ is the same as the $V(x, t)$ of (iii). Since $\Psi_1(0) > 2$, $f(\omega_{n_r})$ is not contained in the aggregate of values assumed by $V(\omega_{n_r}, t)$ as t approaches zero. Therefore the initial state is unstable, and, so to speak, runs down *instantaneously* to the initial state of (iii).

(v) Let $T(x, 0) = f(x)$ where $f(x)$ is equal to the $f(x)$ of (ii) at all the points in the interval $(-\pi, \pi)$ with the exception of an aggregate of points of zero content. Then $V(x, t)$ is the same as the $V(x, t)$ of (ii); and the initial state, being unstable, instantaneously goes into the initial state of (ii).

www.libtool.com.cn

Part II.

Discontinuous Theory[1]).

Formulation of a discontinuous theory of solids.

25. In the present part I propose to examine the phenomenon from the point of view of *those theories which postulate the existence of molecules but take no account of their constitution*. With this end in view, I proceed to formulate a simple and typical *discontinuous theory*, of solids, in which, for the sake of clearness, certain unessential points are detailed.

Taking a centimetre as the unit of length, suppose that each molecule is a circular cylinder, with its axis parallel to the axis of x, of length λ and cross-section of diameter λ; further, suppose that each molecule oscillates, parallel to the axis of x, about its mean position, the length covered by its axis in any oscillation being less than 2λ. Thus the slab consists of rows of molecules, parallel to the axis of x; and the motion in each row is the same. Suppose that the rows are most closely packed; also suppose that the distance between two contiguous molecules in a row is never greater than 2λ.

Consider one of these rows. Suppose that it contains r assemblages,

$$A_1, A_2, \ldots A_r,$$

the number of molecules in each assemblage being s. Then with any assemblage A_ϱ is associated a quantity $T_\varrho(t)$ which depends only on the molecular motions in A_ϱ at time t and which may be called the *temperature* of the assemblage at that time.

The *problem of the linear conduction of heat* may now be thus formulated:

---

1) In working out this theory I have received great help from the writings of Lord Kelvin, Larmor, Maxwell, and Poisson. And of these writings the following have been specially useful to me:

Lord Kelvin's „Popular Lectures and Addresses," Vol. I, The Size of Atoms.

Larmor's „A Dynamical Theory of the electric and luminiferous Medium," Part III. (Phil. Trans. Vol. 190) Arts. 11—12 and 48—51.

Poisson's „Théorie Mathématique de la Chaleur," Chapter IV.

www.libtool.com.cn

The initial temperatures, $T_1(0), T_2(0), \ldots T_r(0)$, *of the assemblages* $A_1, A_2, \ldots A_r$ *being given, find their subsequent temperatures.*

Approximate analytical representation of the conditions of the phenomenon.

26. The conditions of the phenomenon are the same in the present theory as in the theory expounded in the previous part; but an exact analytical representation of these conditions, in terms of the temperatures of the assemblages, is impossible because the precise circumstances of the phenomenon are not known. For example, even if the exact law according to which the molecules oscillate were known, the fact of the conservation of the energy in the volume, initially occupied by a molecule, would still be incapable of exact analytical representation, as such a representation would involve considerations regarding the internal constitution of the molecule and the distribution of the energy inside it; and these considerations are essentially foreign to the theory. Thus it is an essential feature of the theory that an *exact solution of the problem is impossible.*

27. The following *three hypotheses* suffice for an approximate analytical representation of the principle of the conservation of energy; in formulating them I will detail, for the sake of clearness, certain unimportant points which are easily distinguishable:

i. The resultant effect of the molecular radiations, in A_ϱ, $A_{\varrho'}$, in any interval $(t, t+\tau)$ is the flow of a quantity of heat equal to

$$\int_t^{t+\tau} \{T_\varrho(t') - T_{\varrho'}(t')\} R_{\varrho,\varrho'}\, dt'$$

from A_ϱ to $A_{\varrho'}$ along the line which joins the centres of A_ϱ and $A_{\varrho'}$ at time $t+\frac{\tau}{2}$. Here $R_{\varrho,\varrho'}$ is a finite and positive function of the positions of the centres of A_ϱ and $A_{\varrho'}$, when the distance between them is less than a certain length $2\lambda_1$, and vanishes when the distance equals or exceeds $2\lambda_1$; further, the greatest values of

$$\left|\frac{\frac{\partial}{\partial x_{\varrho,\varepsilon}}(R_{\varrho,\varrho'})}{R_{\varrho,\varrho'}}\right| \quad \text{and} \quad \left|\frac{\frac{\partial}{\partial x_{\varrho',\varepsilon}}(R_{\varrho,\varrho'})}{R_{\varrho,\varrho'}}\right|$$

are less than $\frac{\lambda_1}{\lambda}$ whatever ϱ and ϱ' may be, $x_{\varrho,\varepsilon}$ and $x_{\varrho',\varepsilon}$ being the x-coordinates of the centres of A_ϱ and $A_{\varrho'}$, respectively, at time t. (α_1)

ii. Conduction is wholly due to molecular radiations. (β_1)

iii. The quantity of heat absorbed by A_ϱ in any interval $(t, t+\tau)$ is equal to

$$cO_\varrho\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\{T_\varrho(t+\tau) - T_\varrho(t)\},$$

www.libtool.com.cn

where c is a constant called the thermal capacity of the solid and $O_\varrho\left(t+\frac{\tau}{2}\right)$ is the volume occupied by A_ϱ at time $t+\frac{\tau}{2}$. (γ_1)

28. Let $Y(x, t)$ be a function of x and t such that $T_\varrho(t)$ equals $Y(x_{\varrho,\varepsilon}, t)$. I will call $Y(x, t)$ the *auxiliary function.*

Let $\overline{R}_{\varrho,\varrho'}$ stand for the value of $R_{\varrho,\varrho'}$ when $\bar{x}_\varrho, \bar{x}_{\varrho'}$ are substituted for $x_{\varrho,\varepsilon}$, $x_{\varrho',\varepsilon}$, $\bar{x}_\varrho, \bar{x}_{\varrho'}$ being the values about which $x_{\varrho,\varepsilon}, x_{\varrho',\varepsilon}$ fluctuate.

Then, noting that $x_{\varrho,\varepsilon}-\bar{x}_\varrho$ and $x_{\varrho',\varepsilon}-\bar{x}_{\varrho'}$ are each numerically less than λ, it follows from the end of (α_1) that

$$R_{\varrho,\varrho'} = \overline{R}_{\varrho,\varrho'}(1+2\theta_1\lambda_1), \qquad |\theta_1|<1.$$

Also

$$T_\varrho(t')-T_{\varrho'}(t') = (x_{\varrho,\varepsilon}-x_{\varrho',\varepsilon})\{Y'(x_1, t')+\theta_2\lambda_1\Omega_2(x_1, t')\},$$

where x_1 lies on the left of $x_{\varrho,\varepsilon}$ and on the right of $x_{\varrho',\varepsilon}$,

$$x_{\varrho,\varepsilon}-x_{\varrho',\varepsilon}<2\lambda_1, \qquad |\theta_2|<1,$$

and $\Omega_2(x_1, t')$ is the greatest value of $|Y''(x, t')|$ within the interval

$$(x_1-2\lambda_1, x_1+2\lambda_1).$$

Now

$$x_{\varrho,\varepsilon}-x_{\varrho',\varepsilon} = (\bar{x}_\varrho-\bar{x}_{\varrho'})\left(1+\theta_3\frac{2}{s}\right), \qquad |\theta_3|<1.$$

Therefore it follows from symmetry and from (α_1), (β_1) that the quantity of heat which flows across a unit area L, placed parallel to the faces of the slab and distant x_1 from the origin, in the positive direction of the axis of x in any interval $(t, t+\tau)$ is equal to

$$\left\{-\int_t^{t+\tau}Y'(x_1, t')dt'+\int_t^{t+\tau}|Y'(x_1, t')|dt'\right\}\Sigma\overline{R}_{\varrho_m,\varrho_n}(\bar{x}_{\varrho_m}-\bar{x}_{\varrho_n})$$

$$-(1+2\theta_4\lambda_1)\left(1+\theta_5\cdot\frac{2}{s}\right)\left\{\int_t^{t+\tau}|Y'(x_1, t')|dt'+\theta_6\lambda_1P_2(x_1, t, t+\tau)\right\}\Sigma\overline{R}_{\varrho_m,\varrho_n}(\bar{x}_{\varrho_m}-\bar{x}_{\varrho_n}), \quad (1)$$

$$|\theta_4|, \ |\theta_5|, \ |\theta_6|<1,$$

where $P_2(x_1, t, t+\tau)$ stands for $\int_t^{t+\tau}\Omega_2(x_1, t')dt'$ and the summation extends to every pair of assemblages A_{ϱ_m}, A_{ϱ_n}, situated on the right and on the left of x_1, respectively, for which

$$x_{\varrho_m,\varepsilon}-x_{\varrho_n,\varepsilon}<2\lambda_1$$

and the line joining whose centres crosses the area perpendicularly.

Now, suppose it to follow from the homogeneity of the slab that

$$\Sigma'\overline{R}_{\varrho_m,\varrho_n}(\bar{x}_{\varrho_m}-\bar{x}_{\varrho_n}) = kK\frac{\pi\lambda^2}{4},$$

www.libtool.com.cn

where Σ' indicates summation with respect to a single row of the assemblages $A_{\varrho_m}, A_{\varrho_n}$, K is a constant called the thermal conductivity of the slab, and k stands for 1 or k_1 according as x_1 lies or does not lie in the interval

$$(-\pi+2\lambda_1, \pi-2\lambda_1), \quad 0 \leq k_1 \leq 1.$$

Then it is easily seen that

$$\Sigma \bar{R}_{\varrho_m, \varrho_n}(\bar{x}_{\varrho_m} - \bar{x}_{\varrho_n}) = kK\sigma_1$$

where σ_1 is the sum of the areas of the bases of the rows. Therefore the quantity of heat given by (1) is equal to

$$p(1-d_1)kK\left\{-\int_t^{t+\tau} Y'(x_1, t')\,dt' + \int_t^{t+\tau} |Y'(x_1, t')|\,dt'\right\}$$

$$-(1+2\theta_4\lambda_1)\left(1+\theta_5 \cdot \frac{2}{s}\right)p(1-d_1)kK\left\{\int_t^{t+\tau} |Y'(x_1, t')|\,dt' + \theta_6\lambda_1 P_2(x_1, t, t+\tau)\right\}$$

where p is the greatest value that σ_1 can have when L is of a standard shape, say circular, and d_1 stands for $1-\frac{\sigma_1}{p}$ and evidently depends on λ, the position of L in the plane containing it, and the size and shape of the periphery of L.

Let $\bar{d}_1$ be the greatest value that $|d_1|$ can have, whatever be the position of L in the plane containing it. Now let $P_1(x_1, t, t+\tau)$ stand for

$$\int_t^{t+\tau} |Y'(x_1, t')|\,dt';$$

further, suppose that $\lambda_1 \geq \frac{2}{s}$ and $\lambda_1 <$, say, 10^{-2}. Then, if $\bar{d}_1 < \frac{1}{4}$, — a condition which will be shown to hold when L is a circle, — it is easily seen that, neglecting

$$pE_1(x_1, t, t+\tau, \bar{d}_1) = pkK\{2\lambda_1 P_2(x_1, t, t+\tau) + (\bar{d}_1 + 4\lambda_1) P_1(x_1, t, t+\tau)\},$$

the quantity of heat which flows across the unit area is equal to

$$-pkK\int_t^{t+\tau} Y'(x_1, t')\,dt', \qquad (I)$$

whatever be its position in the plane containing it.

29. I proceed now to find the quantity of heat which is absorbed by a cylinder, with its axis parallel to the axis of x and its faces, of unit area, $x = x_1$, $x = x_2$, in any interval $(t, t+\tau)$.

Let H represent this quantity; also let L stand for one of the faces.

Now, there may exist assemblages, near the surface of the cylinder, each of which is sometimes partly or wholly inside the cylinder, none remaining wholly inside it throughout the interval; it is easily seen that the portion of

www.libtool.com.cn

the cylindrical volume, occupied by such assemblages, is, at any time in the interval, less than, say,

$$2\tfrac{1}{4}\lambda_2+\frac{\pi\lambda^2}{2}(x_2-x_1),$$

where λ_2 represents the greatest length that an assemblage can have.

Let H_1 represent the part of H absorbed by these assemblages.

Then

$$|H_1|<c\left\{2\tfrac{1}{4}\lambda_2+\frac{\pi\lambda^2}{2}(x_2-x_1)\right\}\Omega(t,t+\tau),$$

where $\Omega(t,t+\tau)$ stands for the greatest value of $|Y(x,t+\tau)-Y(x,t)|$. But evidently $3p\lambda_2>2\tfrac{1}{4}\lambda_2+\pi^2\lambda^2$. Therefore

$$H_1 = 3p\lambda_2\theta_7 c\Omega(t,t+\tau), \quad |\theta_7|<1.$$

Consider $H_2 = H-H_1$ the quantity of heat absorbed by those assemblages which remain wholly inside the cylinder throughout the interval.

Let $A_{m_1+1}, A_{m_1+2}, \ldots A_{m_1+r_1}, \ldots A_{m_1+n}$ be a row of these assemblages; further, let

$$x = X_{r_1},$$
$$x = X'_{r_1},$$

be the faces of $A_{m_1+r_1}$ at time $t+\frac{\tau}{2}$, X'_{r_1} being greater than X_{r_1}. Then it follows from (γ_1) that

$$H_2 = c\sigma_2\sum_{r_1=1}^{r_1=n}(X'_{r_1}-X_{r_1})\{T_{m_1+r_1}(t+\tau)-T_{m_1+r_1}(t)\}, \tag{1}$$

where σ_2 is the sum of the areas of the bases of the rows.

Consider

$$I = c\int_{x_1}^{x_2}\{Y(x',t+\tau)-Y(x',t)\}dx'.$$

Now,

$$\begin{aligned} I/c = {} & 2\tfrac{1}{4}\lambda_2\theta_8\Omega(t,t+\tau)+\sum_{r_1=1}^{r_1=n}\left[\int_{X_{r_1}}^{X'_{r_1}}\{Y(x',t+\tau)-Y(x',t)\}dx'\right] \\ & +\sum_{r_1=1}^{r_1=n-1}\left[\int_{X'_{r_1}}^{X_{r_1+1}}\{Y(x',t+\tau)-Y(x',t)\}dx'\right], \quad |\theta_8|<1. \end{aligned} \tag{2}$$

Let $\overline{\Omega}(x_1,x_2)$ stand for the greatest of the values of the fluctuation of $Y(x',t)$ in intervals, of length λ_2, taken anywhere within the interval (x_1,x_2); further, let d_2 represent $1-\frac{\sigma_2}{p}$ where d_2 evidently depends on λ, the position of L in the plane containing it, and the size and shape of the periphery of L. Then, noting that

www.libtool.com.cn

$$X'_{r_1} - X_{r_1} \leq \lambda_2$$

and

$$X_{r_1+1} - X'_{r_1} \leq 2\lambda < \frac{2}{s}(X'_{r_1} - X_{r_1}),$$

it is easily seen from (1) and (2) that

$$H_2/c = p(1-d_2)\left[\int_{x_1}^{x_2} \{Y(x', t+\tau) - Y(x', t)\}dx' - 2\tfrac{1}{4}\lambda_2\theta_8\Omega(t, t+\tau)\right]$$
$$+ 2\theta_9(x_2 - x_1)\,\overline{\Omega}(x_1, x_2)$$
$$+ \frac{2}{s}\theta_{10}(x_2 - x_1)\,\Omega(t, t+\tau), \quad |\theta_9|, \ |\theta_{10}| < 1.$$

Let $\bar{d}_2$ be the greatest value that $|d_2|$ can have whatever be the position of L in the plane containing it. Then, neglecting

$$pE_2(x_1, x_2, t, t+\tau, \bar{d}_2) = 6pc\lambda_2\Omega(t, t+\tau) + pc(x_2 - x_1)\{(\bar{d}_2 + 2\lambda_1)\Omega(t, t+\tau) + 3\overline{\Omega}(x_1, x_2)\},$$

the quantity of heat H absorbed by the cylinder is equal to

$$pc\int_{x_1}^{x_2} \{Y(x', t+\tau) - Y(x', t)\}dx',$$

whatever be the position of L in the plane containing it. (II)

30. Let $E_1(\bar{d}_1)$, $E_2(\bar{d}_2)$ be the greatest values of

$$E_1(x_1, t, t+\tau, \bar{d}_1), \ E_2(x_1, x_2, t, t+\tau, \bar{d}_2)$$

respectively, whatever x_1, x_2, t, $t+\tau$ may be; further, let $E(d)$ stand for the greater of the two quantities $E_1(\bar{d}_1)$, $E_2(\bar{d}_2)$, d being the greater of the two quantities $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$. Also let Π_1, Π_2, W, and $\overline{W}$ stand for the greatest values of $P_1(x_1, t, t+\tau)$, $P_2(x_1, t, t+\tau)$, $\Omega(t, t+\tau)$, and $\overline{\Omega}(x_1, x_2)$, respectively, whatever x_1, x_2, t, $t+\tau$ may be.

Now, it has been tacitly assumed in the last two articles that not only are $Y'(x, t)$ and $Y''(x, t)$ existent and, together with $Y(x, t)$, integrable in t but also Π_1, Π_2 are finite. These conditions are therefore necessary though not sufficient. For, it is evidently necessary that $E(d)$ be not only finite but also negligible; for the sake of clearness, I will call $E(d)$ negligible when $E(d)/g$ is less than, say, 10^{-2}, where g stands for

$$K\left|\int_{-\pi}^{\pi} Y(x', 0)\,dx'\right|.$$

Therefore, in order that a suitable approximation to the quantity of heat which flows across a unit area, or to the quantity of heat absorbed by any cylinder standing on a unit area, be at all possible, it is necessary that the periphery of the area be of such size and shape that

$$d < 10^{-2}.$$

www.libtool.com.cn

For example, when the area is a rectangle $\left(\frac{\lambda}{2} \prec \frac{2}{\lambda}\right)$, neither of the two quantities of heat can be approximated to, since d is unity.

It should be noted that $Y(x, t)$ need not satisfy any conditions other than those indicated above and the approximate conditions of the phenomenon, expressed in terms of $Y(x, t)$, which I will give in the next article. For example, $Y(x, t)$ need not be differentiable with respect to t.

31. The result as regards the *translation of the actual conditions of the phenomenon into approximate conditions*, expressed in terms of $Y(x, t)$, may be stated now.

The *first* of the three actual conditions of the phenomenon is that the principle of the conservation of energy be satisfied. In other words, the first condition is that the quantity of heat which flows into *any* closed surface S in any interval be equal to the quantity of heat absorbed by the enclosed solid in the same interval. Now this condition, in all its generality, cannot be approximated to. For example, when S is such that the greatest length, parallel to the axis of x, taken inside it is less than λ_2, or, the greatest length, in even one direction perpendicular to the axis of x, is less than λ, then the fact of the conservation of the energy inside S cannot be approximated to; on the other hand, when S is not reentrant and is, further, such that the greatest length, in any direction, taken inside it exceeds, say, unity, then an approximation to the fact of the conservation of the energy inside S can be obtained, the degree of the approximation depending on the size and shape of S.

The fact of the conservation of the energy inside any circular cylinder O, with its axis parallel to the axis of x and its faces, of unit area, $x = x_1$, $x = x_1+1$, is expressed by the equation

$$k' K\int_0^t Y'(x_1+1, t')\,dt' - kK\int_0^t Y'(x_1, t')\,dt'$$
$$= c\int_{x_1}^{x_1+1} \{Y(x', t) - Y(x', 0)\}\,dx' + 3\theta_{11} \boldsymbol{E}, \qquad |\theta_{11}| < 1, \qquad (1)$$
$$-\pi < x_1 < \pi - 1,$$

where $\boldsymbol{E}$ stands for $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{d})$, $\boldsymbol{d}$ being the value of d for a circle, and it follows, from Art. 28, that (k, k') equals 1 or (k_1, k_1') according as (x_1, x_1+1) lies or does not lie in the interval $(-\pi+2\lambda_1, \pi-2\lambda_1)$, $0 \leq (k_1, k_1') \leq 1$.

Let ε stand for the greatest value of $K\left|\int_0^t Y'(x, t')\,dt'\right|$, t having any value and x lying outside the interval $(-\pi+2\lambda_1, \pi-2\lambda_1)$. Then, if (x_1, x_1+1) does not lie in this interval, the left side of (1) equals

$$K\int_0^t \{Y'(x_1+1, t') - Y'(x_1, t')\}\,dt' + \theta_{12}\varepsilon, \qquad |\theta_{12}| \leq 1.$$

www.libtool.com.cn

Therefore (1) becomes

$$K\int_0^t \{Y'(x_1+1, t')-Y'(x_1, t')\}\,dt' = c\int_{x_1}^{x_1+1} \{Y(x', t)-Y(x', 0)\}\,dx' + \theta_{13}(3E+\varepsilon), \quad (2)$$
$$|\theta_{13}|<1, \quad -\pi<x_1<\pi-1.$$

Therefore, supposing the units to be so chosen that $\frac{K}{c}=1$, the equation

$$\int_0^t \{Y'(x_1+1, t')-Y'(x_1, t')\}\,dt' = \int_{x_1}^{x_1+1} \{Y(x', t)-Y(x', 0)\}\,dx', \quad (A_1)$$
$$-\pi<x_1<\pi-1,$$

is an approximation to the fact of the conservation of the energy inside any O, $\frac{1}{K}(3E+\varepsilon)$ being neglected.

Now, from the conservation of the energy inside *any* O of course follows the conservation of the energy inside any closed surface S; but a little reflection shews that the possibility of an approximation to the former does not necessarily involve the possibility of an approximation to the latter. With this understanding (A_1) may be regarded as the *first approximate condition of the phenomenon.*

The *second* actual condition of the phenomenon is this. $T_\varrho(t)$ is continuous in t, or, if it has any discontinuities, they are of the second kind; further, if t_ω is a point of discontinuity, $T_\varrho(t_\omega)$ is contained in the aggregate of values assumed by $T_\varrho(t)$ as t approaches t_ω.

Now

$$T_\varrho(t) = Y(x_{\varrho,t}, t) = Y(x_{\varrho,0}+\theta_{14}\lambda, t), \qquad |\theta_{14}|<1.$$

Let e stand for the greatest of the values of the fluctuation of $Y(x, t)$ in the intervals $(x_{\varrho,0}-\lambda,\ x_{\varrho,0}+\lambda)$ whatever t may be. Then, if t_1, t_2 be any two values of t,

$$T_\varrho(t_2)-T_\varrho(t_1) = Y(x_{\varrho,0}+\theta_{15}\lambda, t_2)-Y(x_{\varrho,0}+\theta_{15}\lambda, t_1)+\theta_{16}e,$$
$$|\theta_{15}|<1, \ |\theta_{16}|\leq 1.$$

Therefore, if $T_\varrho(t)$ be replaced by $Y(x_i, t)$ in the above statement of the actual condition, an approximation, (B_1), to it is obtained, e being neglected; here x_i stands for any x lying in the interval $(x_{\varrho,0}-\lambda,\ x_{\varrho,0}+\lambda)$.

The *third* actual condition of the phenomenon is the impermeability to heat of the faces of the slab. In other words, the third condition is that the quantity of heat which flows across *any* area σ, situated on any face of the slab, in any interval $(0, t)$ be nil. Therefore, making use of the fact of the conservation of the energy inside any closed surface, it is easily seen that the third condition is equivalent to

www.libtool.com.cn

$$\begin{aligned} \lim_{x=-\pi+0} Q_1(\sigma, x, t) &= 0, \\ \lim_{x=\pi-0} Q_1(\sigma, x, t) &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

where $Q_1(\sigma, x, t)$ is the quantity of heat which flows across any area σ, placed parallel to the faces and distant x from the origin, in the interval $(0, t)$. Now, as has been already indicated in Art. 30, $Q_1(\sigma)$ cannot be approximated to for every area σ. Therefore the third condition, in all its generality, cannot be approximated to.

The equations

$$\begin{aligned} \lim_{x=-\pi+0} \left\{ \int_0^t Y'(x, t')\, dt' \right\} &= 0, \\ \lim_{x=\pi-0} \left\{ \int_0^t Y'(x, t')\, dt' \right\} &= 0, \end{aligned} \tag{C_1}$$

are equivalent to (3) when σ is restricted to be circular and of unit area, the quantity neglected being $\frac{1}{K}E$. Thus, (C_1) is an approximation to the fact that the quantity of heat which flows across any circle of unit area, situated anywhere on any face of the slab, is nil. Now from this fact, of course, follows the fact that the quantity of heat which flows across any area σ, situated on any face of the slab, is nil; but it is seen without difficulty that the possibility of an approximation to the former does not necessarily involve the possibility of an approximation to the latter. With this understanding, (C_1) may be regarded as the *third approximate condition of the phenomenon.*

Auxiliary[1]) Functions of Fourier's Type.

32. Let the initial auxiliary function $Y(x, 0)$ be $f(x)$, a finite, integrable, and even function of x; further, let $f'(x)$, $f''(x)$ not only exist but also be finite and continuous. It will be sufficient for the purposes of this essay to consider only such functions $f(x)$ in the present theory. I proceed now to find what necessary and sufficient conditions $f(x)$ must satisfy in order that the auxiliary function at any subsequent time be given by $V(x, t)$ where, as in the last part, $V(x, t)$ stands for

1) It is scarcely necessary to mention that the function $Y(x, t)$ which *exactly* satisfies (A_1), (B_1), (C_1) is not the same as the real auxiliary function. The real auxiliary function satisfies (A_1), (B_1), (C_1) only approximately; thus the exact solution of these conditions can be only an approximation to the real auxiliary function, and may be called the pro-auxiliary function. However, in this and subsequent articles, I will use the briefer name „auxiliary function" as there is no chance of its being confused with the real auxiliary function.

www.libtool.com.cn

$$\tfrac{1}{2}a_0+\sum_1^{m=\infty} a_m \cos mx\, e^{-m^2t},$$

a_m being given by

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha)\cos m\alpha\, d\alpha.$$

Now the conditions (A_1), (B_1), (C_1) for $Y(x, t)$ are practically the same as the conditions (A), (B), (C), of the previous part, for $T(x, t)$. Therefore, since $f(x)$ is continuous and $f'(x)$ is finite, it is evident from the results of the previous part that (A_1), (B_1), (C_1) are satisfied by

$$Y(x, 0) = f(x),$$
$$Y(x, t) = V(x, t).$$

There remains, therefore, only one condition to be satisfied; it is that $3E+\varepsilon$ and e be negligible. This condition is a necessary one; for, otherwise, (A_1), (B_1), (C_1) would cease to be approximations to the actual conditions of the phenomenon. For the sake of clearness I will call $(3E+\varepsilon)$ and e negligible when $\frac{3E+\varepsilon}{g}$ and $\frac{e}{g_1}$ are each less than 10^{-4}, where g has the same meaning as in Art. 30 and g_1 stands for the greatest value of $|Y(x, 0)|$.

Superior Limits of E, ε, and e.

33. Consider E.

Going back to the definitions of E_1, E_2, and E given in Art. 30, it is easily seen that, for a circular area,

$$E_1(\bar{d}_1) \leq K\{2\lambda_1 \Pi_2+(d+4\lambda_1)\Pi_1\}, \quad (1)$$
$$E_2(\bar{d}_2) = 6K\lambda_2 W+2\pi K\{(d+2\lambda_1)W+3\overline{W}\}. \quad (2)$$

Let G be the greater of the two quantities, G_1, G_2, on the right in the above; then

$$E \leq G.$$

Now,

$$Y''(x, t) = V''(x, t) = -\sum_1^{\infty} m^2 a_m \cos mx\, e^{-m^2t}.$$

Therefore

$$\Omega_2(x, t) \leq \sum_1^{\infty} m^2 |a_m| e^{-m^2t};$$

$$\text{hence } \Pi_2 \leq \int_0^{\infty}\left\{\sum_1^{\infty} m^2|a_m| e^{-m^2t'}\right\}dt', \quad \text{i. e., } \sum_1^{\infty}|a_m|.$$

But

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha)\cos m\alpha\, d\alpha = \frac{2}{\pi m^2}\{(-1)^m f'(\pi)-\int_0^{\pi} f''(\alpha)\cos m\alpha\, d\alpha\}.$$

www.libtool.com.cn

$$\text{Therefore } |a_m| \leq \frac{2}{\pi m^2}\left\{|f'(\pi)| + \frac{\pi}{2}b\right\},$$

where b stands for the greatest value of $|b_m|$ whatever m may be, b_m being $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f''(\alpha)\cos m\alpha\, d\alpha$.

Thus

$$\Pi_2 < \left\{\frac{2}{\pi}|f'(\pi)| + b\right\}\sum_1^\infty \frac{1}{m^2}, \quad \text{i. e.,} \quad \frac{\pi^2}{6}\left\{\frac{2}{\pi}|f'(\pi)| + b\right\}. \tag{3}$$

$$Y'(x,t) = V'(x,t) = -\sum_1^\infty m a_m \sin mx\, e^{-m^2 t};$$

$$\text{hence } \int_t^{t+\tau} |Y'(x,t')|\, dt' < -\sum_1^\infty \frac{|a_m|}{m}\left\{e^{-m^2(t+\tau)} - e^{-m^2 t}\right\}$$

$$\text{and, consequently, } P_1(x,t,t+\tau) < \sum_1^\infty \frac{|a_m|}{m}$$

whatever x, t, $t+\tau$ may be.

$$\text{Therefore } \Pi_1 < \sum_1^\infty \frac{|a_m|}{m} < \left\{\frac{2}{\pi}|f'(\pi)| + b\right\}\sum_1^\infty \frac{1}{m^2} < \frac{4}{3}\left\{\frac{2}{\pi}|f'(\pi)| + b\right\}. \tag{4}$$

$$Y(x,t+\tau) - Y(x,t) = V(x,t+\tau) - V(x,t) = \sum_1^\infty a_m \cos mx\left\{e^{-m^2(t+\tau)} - e^{-m^2 t}\right\};$$

$$\text{hence } \Omega(t, t+\tau) \leq \sum_1^\infty |a_m|$$

whatever t, $t+\tau$ may be.

$$\text{Therefore } W \leq \sum_1^\infty |a_m| < \frac{\pi^2}{6}\left\{\frac{2}{\pi}|f'(\pi)| + b\right\}. \tag{5}$$

$$Y'(x,t) = -\sum_1^\infty m a_m \sin mx\, e^{-m^2 t}$$

$$= -\frac{2}{\pi}f'(\pi)\sum_1^\infty (-1)^m \frac{\sin mx}{m} e^{-m^2 t} + \sum_1^\infty \frac{b_m}{m}\sin mx\, e^{-m^2 t};$$

$$\text{hence } |Y'(x,t)| < |f'(\pi)| + \sum_1^\infty \frac{|b_m|}{m}$$

whatever x, t, $t+\tau$ may be.

Now $\overline{\Omega}(x_1, x_2)$ is evidently less than or equal to the product of λ_2 and the greatest value of $|Y'(x,t)|$ within the interval (x_1, x_2). Therefore

$$\overline{W} < \lambda_2\left\{|f'(\pi)| + \sum_1^\infty \frac{|b_m|}{m}\right\}. \tag{6}$$

Therefore it follows from the inequalities (3), (4), (5), and (6) that

$$G_1 < \tfrac{1}{3}K\left\{\frac{2}{\pi}|f'(\pi)| + b\right\}\left\{(\pi^2+16)\lambda_1 + 4\overline{\omega}\right\}, \tag{7}$$

www.libtool.com.cn

$$G_2 < \frac{\pi^2 K}{3}\left\{\frac{2}{\pi}|f'(\pi)|+b\right\}(3\lambda_2+\pi d+2\pi\lambda_1)+6\pi K\lambda_2\left\{|f'(\pi)|+\sum_1^\infty \frac{|b_m|}{m}\right\}. \quad (8)$$

Therefore G is less than the right side in (8), for this is evidently greater than the right side of (7).

34. Consider d. Going back to Arts. 28 and 29 it is easily seen that σ_1, p, σ_2 may be thus defined:

Consider circles of diameter λ to be most closely packed in a plane. Then, if a circle of unit area be placed in any position in the plane it will cover the centres of a certain number, N_1, of these circles; and for the particular position

$$\sigma_1 = N_1 \times \frac{\pi\lambda^2}{4}.$$

Let N be the greatest possible value that N_1 can have; then

$$p = N \times \frac{\pi\lambda^2}{4}.$$

If a circle of unit area be placed in any position in the plane it will wholly cover a certain number, N_2, of the circles of diameter λ: for the particular position

$$\sigma_2 = N_2 \times \frac{\pi\lambda^2}{4}.$$

It is easily seen from these definitions that pd, the greatest of the values that $p-\sigma_1$ and $p-\sigma_2$ can have, is less than $\lambda \times$ the circumference of the circle of unit area.

Thus,

$$pd < 2\lambda\sqrt{\pi}.$$

But $1-p$ is evidently very nearly zero since λ is so.

Therefore

$$d < 3\lambda\sqrt{\pi}. \quad (1)$$

It need scarcely be mentioned that definitions, exactly similar to those given above, hold for the general case when L is of any shape; also it is evident that

$$pd < \lambda l,$$

where l is the periphery of L.

35. Suppose that $\lambda_2 \leq 10^{-3}\lambda_1$. Now it has already been supposed in Art. 28 that

$$\lambda_1 \geq \frac{2}{s} \quad \text{and} \quad < 10^{-3},$$

whence

$$\lambda < 2^{-1} \times 10^{-3}\lambda_2.$$

www.libtool.com.cn

Therefore, using (1) of the last article, it follows from the end of Art. 33 that

$$G < K\lambda_1\left\{13\tfrac{1}{2}|f'(\pi)|+21b+\tfrac{1}{8}\sum_1^\infty \frac{|b_m|}{m}\right\}.$$

Thus

$$E < K\lambda_1\left\{13\tfrac{1}{2}|f'(\pi)|+21b+\tfrac{1}{8}\sum_1^\infty \frac{|b_m|}{m}\right\}. \qquad \text{(III)}$$

36. Consider ε.

$$J(x,t) = \int_0^t Y'(x,t')\,dt' = \sum_1^\infty \frac{a_m}{m}\sin mx\left\{e^{-m^2t}-1\right\};$$

$$\text{hence } J'(x,t) = \sum_1^\infty a_m \cos mx\left\{e^{-m^2t}-1\right\}$$

$$\text{and, consequently, } |J'(x,t)| \leq \sum_1^\infty |a_m|,$$

whatever x and t may be. Let J_1 stand for the greatest value that $|J'(x,t)|$ can have, whatever x and t may be.

Then

$$J_1 \leq \sum_1^\infty |a_m| < \frac{\pi^2}{6}\left\{\frac{2}{\pi}|f'(\pi)|+b\right\}. \qquad (1)$$

Now $K|J(x,t)|$ is evidently less than $2K\lambda_1 J_1$, if x does not lie in the interval $(-\pi+2\lambda_1,\ \pi-2\lambda_1)$.

Therefore

$$\varepsilon < \frac{K\pi^2}{3}\lambda_1\left\{\frac{2}{\pi}|f'(\pi)|+b\right\}. \qquad \text{(IV)}$$

It at once follows, from the procedure in the case of $\overline{W}$ in Art. 33, that

$$e < 2\lambda\left\{|f'(\pi)|+\sum_1^\infty \frac{|b_m|}{m}\right\}. \qquad \text{(V)}$$

Sufficient and quasi-necessary conditions for $f(x)$.

37. It follows from (III) and (IV) that

$$3E+\varepsilon < K\lambda_2\left\{43|f'(\pi)|+67b+\tfrac{3}{8}\sum_1^\infty \frac{|b_m|}{m}\right\}. \qquad (1)$$

Now, let $\overline{f}$ stand for $\frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi f(x')\,dx'\right|$. Then it is evident, from the definitions of g and g_1, that

$$g = 2K\pi\overline{f},$$
$$g_1 > \overline{f}.$$

www.libtool.com.cn

Therefore it follows from (1) and (V) that

$$\frac{3E+\varepsilon}{g} < \frac{\lambda_1}{2\pi f}\left\{43\,|f'(\pi)|+67b+\tfrac{3}{5}\sum_1^\infty \frac{|b_m|}{m}\right\}, \tag{2}$$

$$\frac{e}{g_1} < \frac{2\lambda}{f}\left\{|f'(\pi)|+\sum_1^\infty \frac{|b_m|}{m}\right\}. \tag{3}$$

But it follows, from the suppositions in the beginning of Art. 35, that

$$\lambda < 2^{-1}10^{-4}\lambda_1.$$

Therefore the right side of (2) is greater than the right side of (3).

Thus, in order that

$$\frac{3E+\varepsilon}{g} < 10^{-3},$$

$$\frac{e}{g_1} < 10^{-3},$$

it is sufficient that

$$\frac{\lambda_1}{2\pi f}\left\{43\,|f'(\pi)|+67b+\tfrac{3}{5}\sum_1^\infty \frac{|b_m|}{m}\right\} < 10^{-3}.$$

The final result, regarding the condition to be satisfied by $f(x)$, may now be thus stated:

If it be supposed that

$$\lambda_1 < 10^{-3},$$

$$\lambda_2 \leq 10^{-3}\lambda_1,$$

and

$$\lambda_1 \geq \frac{2}{s},$$

then, in order that the approximate conditions of the phenomenon be satisfied, it is sufficient that

$$\frac{\lambda_1}{2\pi f}\left\{43\,|f'(\pi)|+67b+\tfrac{3}{5}\sum_1^\infty \frac{|b_m|}{m}\right\} \text{ be negligible, i. e. } <, \text{ say, } 10^{-3}. \tag{$\mathfrak{B}_1$}$$

38. By a *quasi-necessary condition* I mean a sufficient condition which, though itself not necessary, is *similar* to the condition which is both sufficient and necessary. Thus the condition ($\mathfrak{B}_1$) is a quasi-necessary one.

If G_3 stand for the greater of the two quantities

$$\frac{3E+\varepsilon}{g} \text{ and } \frac{e}{g_1},$$

then

$$G_3 < 10^{-3}$$

www.libtool.com.cn

may be regarded as the sufficient and necessary condition. In reality it is only a quasi-necessary condition but less restrictive than ($\mathfrak{P}_1$). To see this point let us go back to Arts. 28 and 29. Now, making use of the result (1) of Art. 34, it is easily seen that (I) holds even when the quantity neglected is smaller than $pE_1(x_1, t, t+\tau, \bar{d}_1)$. In fact $E_1(x_1, t, t+\tau, \bar{d}_1)$ may be replaced by, say,

$$kK\left\{\tfrac{3}{2}\lambda_1 P_2(x_1, t, t+\tau)+(\bar{d}_1+3\tfrac{1}{2}\lambda_1) P_1(x_1, t, t+\tau)\right\}.$$

Also, it is evident that, in Art. 29, $E_2(x_1, x_2, t, t+\tau, \bar{d}_2)$ may be replaced by a smaller quantity in which, for example, $c(x_2-x_1)\dfrac{2}{sp}\mathfrak{Q}_0(t, t+\tau)$ takes the place of $c(x_2-x_1)\times 2\lambda_1\mathfrak{Q}(t, t+\tau)$, $\mathfrak{Q}_0$ being less than $\mathfrak{Q}$.

It may be mentioned here that, in the light of these remarks, the sense in which the word „necessary" is used in the beginning of Art. 30 and in Art. 32 is easily understood.

The really sufficient and necessary condition can be obtained in terms of λ_1 and $f(x)$ provided that definite suppositions be made relating to the expression of λ_2, s, and λ in terms of λ_1; for example, it may be supposed that

$$\lambda_2 = 10^{-2}\lambda_1,$$
$$\frac{2}{s} = \lambda_1,$$

and

$$\lambda = 3^{-1}\times 10^{-2}\times \lambda_1^2.$$

But, in the face of the fact that the sufficient and necessary condition rests on suppositions which are of a purely tentative character and any change in which may at once degrade it into a quasi-necessary condition, it is evident that, for the purposes of this essay, a quasi-necessary condition is quite sufficient. In fact, in a professedly inexact theory like the present one, the important thing is the *nature of the restriction* imposed on $f(x)$. And, as ($\mathfrak{P}_1$) clearly shows, this is purely arithmetical.

Illustrative Examples.

39. The following simple examples suffice to illustrate the salient features of the theory:

(i) Suppose that $\lambda_2 = 10^{-2}\lambda_1$, $\dfrac{2}{s} \leq \lambda_1 < \dfrac{2}{s-1}$, and $\lambda = 3^{-1}\times 10^{-2}\times \lambda_1^2$. Let $Y(x, 0) = f(x) = x^2$. Then the left side of ($\mathfrak{P}_1$) is equal to

$$\frac{\lambda_1}{2\pi f}\times 43\,|f'(\pi)| = \frac{129}{\pi^2}\lambda_1 < 13\tfrac{1}{2}\lambda_1.$$

Now, if H stand for the total quantity of heat in any right circular cylinder with its bases of unit area, on the faces of the slab, it follows from

www.libtool.com.cn

(II) that

$$H = p(g + \theta_{17} E), \quad |\theta_{17}| < 1,$$

the part of H due to the temperature $\bar{f}$ being assumed to be *exactly pg*.

Therefore it is easily seen that

$$\frac{p(3E+\varepsilon)}{H} < \frac{13\frac{1}{2}\lambda_1}{1-5\lambda_1}.$$

Therefore the ratio of $p(3E+\varepsilon)$, the greatest quantity of heat, to be neglected, to H as well as the ratio of e, the greatest difference of temperature, to be neglected, to g_1 is less than $4\frac{1}{2} \times 10^{-3}$ or $1\frac{1}{2} \times 10^{-3}$ according as λ is taken equal to $3^{-1} \times 10^{-7}$ or $3^{-1} \times 10^{-8}$, respectively. And, to this degree of approximation, the solution of the problem is furnished by the auxiliary function $V(x, t)$. In other words, the initial temperatures, $T_1(0)$, $T_2(0)$, ... $T_r(0)$, of the assemblages being given equal to $(x_{1,0})^2$, $(x_{2,0})^2$, ... $(x_{r,0})^2$, respectively, their subsequent temperatures, $T_1(t)$, $T_2(t)$, ... $T_r(t)$, are given by $V(x_{1,0}, t)$, $V(x_{2,0}, t)$, ... $V(x_{r,0}, t)$, respectively, to the degree of approximation indicated above.

(ii) Suppose that $\lambda_2 = 10^{-3}\lambda_1$, $\frac{2}{s} \leq \lambda_1 < \frac{2}{s-1}$, and $\lambda = 3^{-1} \times 10^{-3} \times \lambda_1^3$. Let

$$Y(x, 0) = f(x) = x^2 - \sum_{1}^{n=\infty} \frac{a^n \cos(c^n x)}{c^{2n}},$$

where a is a positive constant less than 1, c is an odd integer, and $ac > 1 + \frac{3\pi}{2}$; $f''(x)$ is Weierstrass's function. Then the left side of ($\mathfrak{P}_1$) is equal to

$$\frac{3\lambda_1}{2\pi^2}\left\{86\pi + 67a + \frac{3a}{5(c-a)}\right\} < \frac{3\lambda_1}{2\pi^2}\left\{86\pi + 67a + \tfrac{3}{15}\right\}$$
$$< \frac{129}{\pi^2}\lambda_1\left\{1 + \frac{67a + \frac{3}{15}}{270}\right\} < 17\lambda_1.$$

Therefore $\frac{p(3E+\varepsilon)}{H}$ as well as $\frac{e}{g_1}$ is less than 6×10^{-3} or 2×10^{-3} according as λ is taken equal to $3^{-1} \times 10^{-7}$ or $3^{-1} \times 10^{-8}$, respectively. And, to this degree of approximation, the solution of the problem is furnished by the auxiliary function $V(x, t)$.

(iii) Suppose that $\lambda_2 = 10^{-2}\lambda_1$, $\frac{2}{s} \leq \lambda_1 < \frac{2}{s-1}$, and $\lambda = 3^{-1} \times 10^{-3} \times \lambda_1^3$. Let r be even; and, further, let the x-coordinates, $x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots x_{r,0}$, of the initial positions of the centres of the assemblages be given by the zeroes of $\cos(cx)$ where c stands for the odd number nearest to $\frac{\pi}{\mu}$, μ being equal to, say, $\cdot 75 \times 10^{-3} \times \lambda_1$. Thus

$$x_{\frac{r}{2}+1+q,0} = (q + \tfrac{1}{2})\frac{\pi}{c}, \quad q = -\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}+1, \ldots 0, 1, 2, \ldots \frac{r}{2}-1.$$

www.libtool.com.cn

Now, let $f_1(x)$ and $V_1(x,t)$ stand for the auxiliary functions $Y(x,0)$ and $Y(x,t)$ of (i). Then, with the same initial temperatures as in (i), *any* function of the form

$$f_1(x)+d\sum_1^{n=\infty}\frac{a^n\cos(c^n x)}{c^{2n}}$$

may be taken as the initial auxiliary function, d being any constant whatever. And the solution of the problem is furnished by $V_1(x,t)$, whatever d may be, the degree of the approximation, however, depending on d. Thus, when $0\leq|d|\leq 1$, $\frac{p(3E+\varepsilon)}{H}$ as well as $\frac{e}{\mathcal{J}_1}$ is less than 6×10^{-2} or 2×10^{-2} according as λ is taken equal to $3^{-1}\times 10^{-7}$ or $3^{-1}\times 10^{-8}$, respectively.

(iv) Suppose that $\lambda_2 = 10^{-2}\lambda_1$, $\frac{2}{s}\leq\lambda_1<\frac{2}{s-1}$, and $\lambda = 3^{-1}\times 10^{-2}\times\lambda_1^2$. Let $Y(x,0) = f(x) = x^{2n}$, $n\geq 1$. Then the left side of ($\mathfrak{B}_1$) is less than

$$\frac{\lambda_1}{2\pi\bar{f}}\left\{43f'(\pi)+\frac{2}{\pi}f''(\pi)\left(67+\frac{\pi^2}{10}\right)\right\}<\frac{2n(2n+1)\lambda_1}{\pi^4}\{145+136n\}$$
$$<3n(n+1)(2n+1)\lambda_1.$$

Therefore $\frac{p(3E+\varepsilon)}{H}$ as well as $\frac{e}{\mathcal{J}_1}$ is less than $\frac{3n(n+1)(2n+1)\lambda_1}{1-n(n+1)(2n+1)\lambda_1}$ as long as $\frac{1}{\lambda_1}>n(n+1)(2n+1)$.

The following *table* shows clearly how rapidly the error may increase as n increases, i. e., as the change of initial temperature from one assemblage to another increases:

n	Superior limit of error.	Superior limit of error.		
		$\lambda = 3^{-1}\times 10^{-7}$	$\lambda = 3^{-1}\times 10^{-8}$	$\lambda = 3^{-1}\times 10^{-10}$
1	$18\lambda_1/1-6\lambda_1$	6×10^{-2}	2×10^{-2}	2×10^{-2}
1.25	$30\lambda_1/1-10\lambda_1$	$10\frac{1}{2}\times 10^{-2}$	$3\frac{1}{2}\times 10^{-2}$	$3\frac{1}{2}\times 10^{-2}$
1.5	$45\lambda_1/1-15\lambda_1$	$15\frac{1}{2}\times 10^{-2}$	5×10^{-2}	5×10^{-2}
1.75	$66\lambda_1/1-22\lambda_1$	23×10^{-2}	7×10^{-2}	7×10^{-2}
2	$90\lambda_1/1-30\lambda_1$	$32\frac{1}{2}\times 10^{-2}$	$9\frac{1}{2}\times 10^{-2}$	$9\frac{1}{2}\times 10^{-2}$
3	$252\lambda_1/1-84\lambda_1$	greater than 1	28×10^{-2}	3×10^{-2}
4	$540\lambda_1/1-180\lambda_1$	. . . . .	66×10^{-2}	6×10^{-2}
5	$990\lambda_1/1-330\lambda_1$	. . . . .	greater than 1	$10\frac{1}{2}\times 10^{-2}$
11	$9108\lambda_1/1-3036\lambda_1$	. . . . .	. . . . .	greater than 1

www.libtool.com.cn

(v) Suppose that $\lambda_2 = 10^{-3}\lambda_1$, $\frac{2}{s} = \lambda_1$, and $\lambda = 5^{-1} \times 10^{-3} \times \lambda_1^3$. Let r be odd; and, further, let the x-coordinates, $x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots x_{r,0}$, of the initial positions of the centres of the assemblages be given by the zeroes of $\left(\frac{x\pi}{\mu}\right) + \tan\left(\frac{x\pi}{\mu}\right)$, where μ stands for the sub-multiple of π nearest to, say, $\cdot 75 \times 10^{-3} \times \lambda_1$. Thus

$$x_{\frac{r+1}{2},0} = 0,$$

$$x_{\frac{r+1}{2}+q,0} = \frac{\mu}{\pi} x^{(q)},$$

$$x_{\frac{r+1}{2}-q,0} = -\frac{\mu}{\pi} x^{(q)}, \quad q = 1, 2, \ldots \frac{r-1}{2},$$

$x^{(q)}$ standing for the qth positive root of $x + \tan x = 0$. Now, let the initial auxiliary function $Y(x, 0) = 1 + x \sin\left(\frac{x\pi}{\mu}\right)$. Then, the left side of ($\mathfrak{B}_1$) is greater than $\frac{21\pi^3\lambda_1}{\mu(\pi + 2\mu)} > 8 \times 10^3$. Therefore, however small λ be, the theory fails to give any approximation to the solution of the problem, ever so crude.

Criticism of Fourier's Theory.

40. Comparing Fourier's theory with the theories expounded in the preceding pages, it is readily seen to be a continuous one. I will conclude this part with a *brief criticism of Fourier's theory pointing out its limited scope.*

Starting with the same conditions of the phenomenon as in the preceding part and with — essentially — the same hypotheses as (α) and (β), Fourier's theory [1]) gives the following analytical expressions of the conditions of the phenomenon:

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t), \tag{$\overline{\text{A}}$}$$

$T(x, t)$ is continuous in t, and ($\overline{\text{B}}$)

$$T'(\pi, t) = 0, \quad T'(-\pi, t) = 0. \tag{$\overline{\text{C}}$}$$

It should be noted that these conditions are required by Fourier's theory to hold for $0 \leq t$, $-\pi \leq x \leq \pi$; also, in order that they have *any meaning*, it is necessary and sufficient that $\frac{\partial}{\partial t} T(x, t)$ and $\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t)$ exist and be finite. Therefore ($\overline{\text{B}}$) is involved in the statement of ($\overline{\text{A}}$).

---

1) „Théorie Analytique de la Chaleur", Chapter II. See specially Arts. 117 and 120.

www.libtool.com.cn

I proceed to investigate what further conditions $T(x, t)$ must satisfy in order that ($\bar{A}$) and ($\bar{C}$) follow from (A) and (C).

41. It follows from (A) that

$$\int_{x-x_1}^{x+x_1} \{T(x', t+\tau) - T(x', t)\} dx' = \int_{t}^{t+\tau} \{T'(x+x_1, t') - T'(x-x_1, t')\} dt', \qquad (1)$$

$$-\pi \leq x + x_1 \leq \pi,$$

$$-\pi \leq x - x_1 \leq \pi,$$

$$t \geq 0,\ \tau > 0.$$

Now the first integrand in (1) is continuous in x', and the second integrand is continuous in t'; therefore (1) becomes

$$\frac{T(x+\theta x_1,\ t+\tau) - T(x+\theta x_1, t)}{\tau} = \frac{T'(x+x_1,\ t+\theta_1\tau) - T'(x-x_1,\ t+\theta_1\tau)}{2x_1}$$

i. e.,

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t'}\ T(x+\theta x_1, t')\right\}_{t' = t+\theta_2\tau} = \left\{\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\ T(x', t+\theta_1\tau)\right\}_{x' = x+\theta_3 x_1}$$

where the θ's are functions of x, x_1, t, τ such that $0 \leq (|\theta|, |\theta_3|) < 1, 0 < (\theta_1, \theta_2) < 1$. Therefore, if $\frac{\partial}{\partial t}\ T(x, t)$ and $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ T(x, t)$ be continuous at (x, t), (1) becomes

$$\frac{\partial}{\partial t}\ T(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ T(x, t) + \Sigma,$$

where Σ can be made as small as we please by choosing x_1, τ sufficiently small. Therefore ($\bar{A}$) follows from (A) if $\frac{\partial}{\partial t}\ T(x, t)$ and $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ T(x, t)$ be continuous at (x, t).

It follows from (C) that

$$\lim_{x=\pi-0} \int_{t}^{t+\tau} T'(x, t')\, dt' = 0,\quad t \geq 0, \tau > 0,$$

and

$$\lim_{x=-\pi+0} \int_{t}^{t+\tau} T'(x, t')\, dt' = 0,\quad t \geq 0,\ \tau > 0. \qquad (5)$$

Now $T'(x, t')$ is continuous in t'. Therefore (5) becomes

$$\lim_{x=\pi-0} T'(x, t+\theta_4\tau) = 0,$$

and

$$\lim_{x=-\pi+0} T'(x, t+\theta_4\tau) = 0, \qquad (6)$$

www.libtool.com.cn

θ_4 being a positive fraction dependent on x, t, τ. But $T'(x, t)$ is continuous at (x, t). Therefore $(\bar{C})$ follows from (C).

42. Consider the solutions of Fourier's type, viz.,

$$T(x, t) = V(x, t),$$
$$T(x, 0) = f(x).$$

When $t > 0$, it is evident that $\frac{\partial}{\partial t} V(x, t)$ and $V''(x, t)$ are continuous at (x, t). The important case is that of $t = 0$; and it should be noted that, in order that $(\bar{A})$, $(\bar{B})$, $(\bar{C})$ have any meaning, it is necessary and sufficient that $\left\{\frac{\partial}{\partial t} V(x, t)\right\}_{t=0}$ and $f''(x)$ exist and be finite.

Now, proceeding as in Art. 20, it is easily seen that, if $f''(x)$ be continuous and $f'(\pi)$, $f'(-\pi)$ be zero,

$$\lim_{t=+0} \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) = \lim_{t=+0} V''(x, t) = f''(x).$$

But, since $\lim_{t=+0} \frac{\partial}{\partial t} V(x, t)$ exists, it must equal $\left\{\frac{\partial}{\partial t} V(x, t)\right\}_{t=0}$. Therefore $\frac{\partial}{\partial t} V(x, t)$ and $V''(x, t)$ are continuous at (x, t) whether $t >$ or $= 0$.

Therefore, in order that $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ and $(\bar{C})$ have meaning and necessarily follow from (A), (B) and (C), it is *necessary that* $f''(x)$ *exist and be finite*; and it is *sufficient that* $f''(x)$ *be finite and continuous*, *and* $f'(\pi)$, $f'(-\pi)$ *be zero.*

Illustrative Examples.

43. The following simple examples suffice to illustrate the salient features of the criticism of Fourier's theory:

(i) Let $T(x, 0) = f(x) = x^{2n}$, $n > 1$. Then $f(x)$ as well as $f'(x)$ and $f''(x)$ are finite and continuous. But, as t approaches zero, $\frac{\partial}{\partial t} V(\pi, t)$ and $\frac{\partial}{\partial t} V(-\pi, t)$ behave as $-\frac{2n\pi^{2n-1}}{\sqrt{\pi t}}$. Therefore $\left\{\frac{\partial}{\partial t} V(\pi, t)\right\}_{t=0}$ and $\left\{\frac{\partial}{\partial t} V(-\pi, t)\right\}_{t=0}$ are infinite, and, consequently, $(\bar{A})$ is meaningless when $x = \pi$ or $-\pi$.

(ii) Let $T(x, 0) = f(x) = x$, $0 \leq x \leq \pi$. Then $f''(x)$ does not exist at $x = 0$; also,

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} V(0, t)\right\}_{t=0} = \lim_{t=+0} \frac{\partial}{\partial t} V(0, t) = \lim_{t=+0} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = \infty.$$

www.libtool.com.cn

Again

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}V(-\pi,t)\right\}_{t=0}=\left\{\frac{\partial}{\partial t}V(\pi,t)\right\}_{t=0}=\lim_{t=+0}\frac{\partial}{\partial t}V(\pi,t)=\lim_{t=+0}\frac{-1}{\sqrt{\pi t}}=-\infty.$$

Therefore $(\bar{A})$ is meaningless when $x=0$, π or $-\pi$.

(iii) Let $T(x,0)=f(x)=\int_0^x f_3(x)\,dx$, $0\leq x\leq\pi$, $f_3(x)$ being the $f(x)$ in (ii) of Art. 24. Then $f(x)$ is finite and continuous. At any irrational point or rational point, $\frac{\nu}{2\mu+1}$, with odd denominator, $f_3(x)=f'(x)$ and is finite and continuous; further, at any rational point, $\frac{\nu}{2\mu+1}$, $f_3'(x)$ exists and is finite. At any rational point, $\frac{\nu}{2\mu}$, with even denominator

$$f'(x+0)-f'(x-0)=-\frac{D}{\mu^3},\quad D \text{ standing for } \sum_1^{n=\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}.$$

Now, proceeding as in Art. 20, it is easily seen that, as t approaches zero, $\frac{\partial}{\partial t}V(x,t)$ behaves as

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\sigma M(x,x')\,\Theta''(x')\,dx',\qquad 0\leq x\leq\pi,$$

i. e., as $$-\frac{1}{\pi}\int_0^\sigma M'(x,x'+0)\,\Theta'(x')\,dx'.$$

Now

$$M'\left(\frac{\nu}{2\mu},x'+0\right)=\tfrac{1}{2}\left[f'\left\{\left(\frac{\nu}{2\mu}+x'\right)+0\right\}-f'\left\{\left(\frac{\nu}{2\mu}-x'\right)-0\right\}\right];$$

$$\text{hence } \lim_{x'=+0}M'\left(\frac{\nu}{2\mu},x'+0\right)=\tfrac{1}{2}\left\{f'\left(\frac{\nu}{2\mu}+0\right)-f'\left(\frac{\nu}{2\mu}-0\right)\right\}=-\frac{D}{2\mu^3}.$$

Therefore

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}V\left(\frac{\nu}{2\mu},t\right)\right\}_{t=0}=\lim_{t=+0}\frac{\partial}{\partial t}V\left(\frac{\nu}{2\mu},t\right)=\lim_{t=+0}\frac{-D}{2\mu^3\sqrt{\pi t}}=-\infty.$$

Therefore $(\bar{A})$ is meaningless, when x is any rational point, $\frac{\nu}{2\mu}$, not only because $f''(x)$ is non-existent but also because $\left\{\frac{\partial}{\partial t}V(x,t)\right\}_{t=0}$ is infinite.

(iv) Let $T(x,0)=f(x)=\int_0^x dx\int_0^x\cos\left\{l\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\}dx$. Then $f(x)$ as well as $f'(x)$

www.libtool.com.cn

is finite and continuous; $f''(x) = \cos\left\{l\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\}$, when x is different from zero, and is non-existent at $x = 0$.

Now it is easily seen that, as t approaches zero, $\frac{\partial}{\partial t} V(0,t)$ behaves as

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\sigma f''(x') e^{-\frac{x'^2}{4t}} dx'.$$

And, therefore, it follows, from Case I of Art. 21, that $\lim_{t=+0} \frac{\partial}{\partial t} V(0,t)$ does not exist.

Therefore, excepting π and $-\pi$, the only point where any discrepancy occurs is $x = 0$. Here not only is $f''(x)$ non-existent and discontinuous but also $\frac{\partial}{\partial t} V(0,t)$ makes an infinite number of finite oscillations as t approaches zero.

(v) Let $T(x,0) = f(x) = \int_0^x dx \int_0^x f_3(x)\,dx$, $f_3(x)$ being the $f(x)$ in (iii) of Art. 24. Then $f(x)$ as well as $f'(x)$ is finite and continuous. At every point of the everywhere dense aggregate G_1, $f''(x)$ is non-existent and has a discontinuity of the second kind; at all other points $f_3(x) = f''(x)$ and is finite and continuous.

Therefore at any point of G_1, (A) is meaningless. Here not only is $f''(x)$ non-existent and discontinuous but also $\frac{\partial}{\partial t} V(x,t)$ makes an infinite number of finite oscillations as t approaches zero.

(vi) Let $T(x,0) = f(x) = \int_0^x \cos\left\{l\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\} dx$, $0 \leq x \leq \pi$. Then $f(x)$ is finite and continuous. At $x = 0$, $f'(x)$ is non-existent and has a discontinuity of the second kind; at all other points $f'(x)$ as well as $f''(x)$ exists and is finite and continuous.

Now, it is easily seen that, as t approaches zero, $\frac{\partial}{\partial t} V(0,t)$ behaves as

$$\frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} \int_0^\sigma x' \cos\left\{l\left(\frac{1}{x'^2}\right)\right\} e^{-\frac{x'^2}{4t}}.$$

And, therefore, it follows from Art. 17 that $\left\{\frac{\partial}{\partial t} V(0,t)\right\} \pm\!> 1$.

Therefore, excepting π and $-\pi$, the only point where any discrepancy occurs is $x = 0$. Here not only is $f''(x)$ non-existent but also $\frac{\partial}{\partial t} V(0,t) \pm\!> 1$.

www.libtool.com.cn

(vii) Let $T(x, 0) = f(x) = \int_0^x f_2(x)\,dx$, $0 \leq x \leq \pi$. Then $f(x)$ is finite and continuous. At every point of G_1, $f'(x)$ is non-existent and has a discontinuity of the second kind. At all other points $f_2(x) = f'(x)$ and is finite and continuous; further, $f_2'(x)$ exists and is finite at every point of G_2.

Now it is easily seen that $\left\{\frac{\partial}{\partial t} V(\omega_{n_s}, t)\right\}_{t=0}$ exists and is finite. Therefore at any point of G_1, $f''(x)$ is non-existent but $\left\{\frac{\partial}{\partial t} V(x, t)\right\}_{t=0}$ exists and is finite.

www.libtool.com.cn

Part III.

Improperly Continuous Theory[1]).

Notation of Improperly Continuous Analysis.

44. By an *improperly continuous analysis* I mean an analysis in which, at least, one independent variable has for its domain an everywhere dense but enumerable aggregate; it is thus distinguished from continuous analysis in which every independent variable has for its domain a continuum. I proceed to specify a system of notation which it will be convenient to adopt.

I will use the Greek letter ξ for a variable of which the domain is an everywhere dense but enumerable aggregate. The notation relating to limit, infinital relations, derivation, or integration is precisely the same in improperly continuous as in continuous analysis.

Thus, $\varphi(\xi)$ being a function of ξ, and ξ_0, a particular value of ξ, $\lim_{\xi=\xi_0+0} \varphi(\xi)$ means the limit to which $\varphi(\xi)$ approaches as ξ approaches ξ_0 from the right side; and $\lim_{\xi=\xi_0-0} \varphi(\xi)$ has a similar significance. Also, if $\xi_0+\xi'$ be any value of ξ in the right neighbourhood of ξ_0,

$$\varphi'(\xi_0+0) = \lim_{\xi'=+0} \frac{\varphi(\xi_0+\xi')-\varphi(\xi_0)}{\xi'}$$

---

1) In working out this theory I have received great help from

Brodén's „Functionentheoretische Bemerkungen und Sätze," Acta Univ. Lund, Bd. 8; and

Karl Pearson's „Grammar of Science, 2nd edition," specially Chapter VII.

I am also considerably indebted to the following publications:

Larmor's „Address to the Mathematical and Physical Section of the British Association, 1900" (Nature, Vol. 62), pp. 451—55.

Poincaré's „Relations entre la Physique Experimentale et la Physique Mathématique" (Rapports présentés au Congrès International de Physique, Paris 1900).

Weierstrass's „Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen" (Sitzungsberichte der kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1885, pp. 633—39 and 789—805; Math. Werke, Bd. III, pp. 1—37).

www.libtool.com.cn

the first derivative, on the right, of $\varphi(\xi)$ at ξ_0; and $\varphi'(\xi_0-0)$, the derivative on the left, is similarly defined. When $\varphi'(\xi_0+0)$ and $\varphi'(\xi_0-0)$ are equal, their common value, the first differential coefficient of $\varphi(\xi)$ at ξ_0, is represented by $\varphi'(\xi_0)$ or $\left\{\frac{d}{d\xi}\varphi(\xi)\right\}_{\xi=\xi_0}$.

Let x be the continuous variable which has for its domain the continuum in which the domain of ξ lies; also let x_1, x_2 be any two values of x, x_2 being greater than x_1. Then I will call $\int_{x_1}^{x_2}\varphi(\xi)\,d\xi$ the integral of $\varphi(\xi)$ between the limits x_1 and x_2. For the sake of clearness I proceed to state the exact meaning of this symbol.

Divide the interval (x_1, x_2) into n partial intervals $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_s, \ldots \delta_n$. Let L_s and l_s be respectively the upper and lower limits of $\varphi(\xi)$ in the interval δ_s; also let S_1 and S_2 stand for $\sum_1^n \delta_s l_s$ and $\sum_1^n \delta_s L_s$, respectively. Then, if S_1 and S_2 converge to one and the same limit when n approaches infinity and δ_s approaches zero, this limit is the quantity represented by $\int_{x_1}^{x_2}\varphi(\xi)\,d\xi$; and $\varphi(\xi)$ is said to be integrable in the interval (x_1, x_2).

It should be noted that, contrary to what holds true in continuous analysis, the continuity of $\varphi(\xi)$ at every point in the domain of ξ does not involve its uniform continuity in that domain. I will call $\varphi(\xi)$ a continuous function of ξ when it is uniformly continuous in the domain of ξ. Thus, when $\varphi(\xi)$ is a continuous function of ξ it is integrable. More generally, if there exists a function $f(x)$, integrable in x and, further, such that $f(\xi) = \varphi(\xi)$, then $\varphi(\xi)$ is integrable. For the sake of brevity I will call $f(x)$ an *associate function* to $\varphi(\xi)$. It should be noted that if $\{f'(x)\}_{x=\xi}$ exists it equals $\varphi'(\xi)$.

Formulation of an Improperly continuous theory of solids.

45. By an ether theory of matter is understood a theory which, while looking upon ether as a continuous medium endowed with perfect fluidity, regards matter as ether in motion[1]). If, therefore, an ether theory be *thorough-going*, i. e., if it does not stop short at certain finite bodies, called atoms or molecules, simply regarding them as ethereal structures whose internal constitution is inscrutable[2]), but professes to know all about the internal constitution of any material body however small; then it is possible to *exactly* describe the

1) See the article „Matter as Non-Matter in Motion" in Pearson's book, Chapter VII.

2) Cf. Larmor, l. c. p. 455. It should be noted that those ether theories of matter which are not thorough-going — for example, the vortex-atom theory of Lord Kelvin and the theories of H. A. Lorentz, Wiechert, and Larmor — belong to the type discussed in Part II.

www.libtool.com.cn

phenomenon of the linear conduction of heat in the slab in terms of particular types of ethereal motion.

Postulating, as in the preceding parts, that the state of things is the same at points equidistant from the central plane of the slab, I propose to show, in the present part, how the phenomenon of the linear conduction of heat may be exactly described in terms of a certain function associated with the *points of an everywhere dense but enumerable aggregate*. I proceed, therefore, to formulate a theory of solids which admits of interpretation as an ether theory, and which may be regarded as thorough-going for the particular end in view: this theory I will call an *improperly continuous theory*.

Suppose that with the slab is associated an enumerable aggregate G, of positive numbers, which is everywhere dense in the interval $(0, \pi)$ and contains π: I will call G the *discriminating aggregate* of the slab. Also, suppose that two slabs, s_1 and s_2, ordinarily said to be of different materials, say, copper and iron, really differ only in this, that their discriminating aggregates G_1 and G_2 are different. [These suppositions may be interpreted as follows: s_1 as well as s_2 is ether in motion; but, because of the difference, between the two states of motion, due *solely* to the difference between G_1 and G_2, the group of sense-impressions, presented by s_1 and symbolised by K_1 and c_1, its thermal conductivity and thermal capacity, differs so much from the group of sense-impressions, presented by s_2 and similarly symbolised by K_2 and c_2, that the two slabs are ordinarily considered as distinct in kind. To use a crude but effective image, the difference between s_1 and s_2 may be likened to that between M_1 and M_2, two musical instruments, say, open pipes or drums, with different arrangements of nodes but otherwise alike. Now, if M_1 and M_2 be sounded in the hearing, but out of sight, of a savage, it is certain that his impression will lead him to distinguish between M_1 and M_2 in very much the same way as we ordinarily distinguish between s_1 and s_2: just as we find it hard to conceive that there is so much common between s_1 and s_2 as to make an interchange of thermal conductivities and thermal capacities between them possible, so the savage will find it hard to conceive how M_1 and M_2 may be made to interchange their musical properties.]

Let ξ be a variable with the aggregates $-G$ and G as its domain; also, as in the first part, let $T(x, t)$ stand for the temperature at time t at any point in the slab whose x-coordinate is x. Now, let $C(\xi, t)$ be a function of ξ and t, even in ξ and connected with $T(x, t)$ by the equations

$$\left.\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{1}{2l}\int_{x-l}^{x+l} C(\xi, t)\,d\xi, \qquad 0 \leq x \leq \pi - l, \\ T(x, t) &= \frac{1}{\pi - x + l}\int_{x-l}^{\pi} C(\xi, t)\,d\xi, \qquad \pi - l \leq x \leq \pi, \end{aligned}\right\} \tag{$\mathfrak{A}_2$}$$

l being a constant dependent on G. I will call $C(\xi, t)$ the *characteristic function* of the slab: this is the function alluded to above. Also, taking a centimetre as the unit of length, I will suppose, for the sake of fixity of ideas, that $l < 10^{-7}$.

www.libtool.com.cn

The *problem of the linear conduction of heat* may now be thus formulated:

Given the initial characteristic function $C(\xi, 0)$, *find the characteristic function at any subsequent time.*

Analytical representation of the conditions of the phenomenon.

46. The following *three hypotheses* suffice for an analytical representation of the conditions of the phenomenon:

i. The quantity of heat which flows across unit area, placed at ξ at right angles to the axis of x, along this axis in any interval $(t, t+\tau)$ is equal to

$$-K\int_t^{t+\tau} C'(\xi, t')\,dt',$$

where $C'(\xi, t')$ stands for $\frac{\partial}{\partial \xi} C(\xi, t')$ and K is a constant, dependent on G and called the thermal conductivity of the slab, $-\pi < \xi < \pi$. (α_2)

ii. The quantity of heat which is absorbed by a cylinder, with the axis of x as its axis and its faces, of unit area, $\xi = \xi_1$, $\xi = \xi_2$, in any interval $(t, t+\tau)$ is equal to

$$c\int_{\xi_1}^{\xi_2} \{C(\xi', t+\tau) - C(\xi', t)\}\,d\xi',$$

where c is a constant, dependent on G and called the thermal capacity of the slab. (β_2)

iii. Let s and Σ represent cylinders, with the axis of x as their common axis and their faces passing through x_1, x_2 and ξ_1, ξ_2, respectively, x_1, x_2 and ξ_1, ξ_2 being any pairs of values of x and ξ. Then, in order that the energy in *any* s be conserved, it is sufficient that the energy in any Σ be conserved. (γ_2)

It would be convenient to consider the units so chosen that $\frac{K}{c} = 1$.

47. Thus the principle of the conservation of energy together with the supposition of the impermeability of the face, $\xi = -\pi$, of the slab finds expression in the equation

$$\int_{-\pi}^{\xi} \{C(\xi', t) - C(\xi', 0)\}\,d\xi' = \int_0^t C'(\xi, t')\,dt', \quad -\pi < \xi < \pi. \qquad (A_2)$$

This is the *first and the fundamental condition* of the phenomenon.

The *second condition* is the following:

$T(x, t)$ is continuous in t, or, if it has any discontinuities they are of the second kind; further, if t_ω is a point of discontinuity, $T(x, t_\omega)$ is contained in the aggregate of values assumed by $T(x, t)$ as t approaches t_ω. (B_2)

This is merely the analytical representation of the supposition that when,

www.libtool.com.cn

with a given x, $T(x, t)$ passes from one value to another it assumes all the intermediate values.

The *third condition*, (C_3), is for $C(\xi, t)$ what (B_3) is for $T(x, t)$.

The *fourth condition*,

$$\lim_{\xi=-\pi+0} Q(\xi, t) = 0, \qquad \lim_{\xi=\pi-0} Q(\xi, t) = 0, \tag{D_3}$$

expresses the impermeability of the faces, $Q(\xi, t)$ being the quantity of heat which flows across unit area, placed at ξ at right angles to the axis of x, along this axis in the interval $(0, t)$.

48. It should be noted that, in the present theory, of the four actual conditions of the phenomenon three, viz., those corresponding to (A_3), (B_3), and (D_3) are the same as the actual conditions in the preceding theories. The addition of a fourth condition has been deemed necessary because of the subordination of $T(x,t)$ to $C(\xi,t)$ which is thus the dominating factor in the theory; and it should be noted that neither of the conditions (B_3), (C_3) *need* involve the other.

The definition of temperature, as given by (A_3), constitutes the essential feature of the theory. And thus, in order that the problem may have meaning, it is necessary and sufficient that the initial temperature $T(x, 0)$ be not only an even and continuous function of x but also possess a characteristic function $C(\xi, 0)$.

It should be noted that $C(\xi,t)$ need not satisfy any conditions other than those necessary to make the conditions (A_3), (B_3), (C_3) and (D_3) intelligible and these conditions themselves. For example, $C'(\xi, t)$ need only be finite and integrable in t; thus it may not be possible to obtain an interval of time, ever so small, in which there are not an infinite number of instants at which $C'(\xi, t)$ is discontinuous in t. Also $C'(\xi, t)$ may be meaningless for an aggregate of values of t, of zero content; in particular $C'(\xi, 0)$ may not exist.

Characteristic Functions of Fourier's Type.

49. Let the initial characteristic function $C(\xi, 0) = \varphi(\xi)$ possess an associate $f(x)$ which is a finite, integrable and even function of x; I will find the necessary and sufficient conditions, that $\varphi(\xi)$ must satisfy, in order that the characteristic function at any *subsequent* time be given by $\chi(\xi,t)$, where

$$\chi(\xi,t) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_1^\infty \alpha_m \cos m\xi e^{-m^2 t},$$

α_m being given by

$$\alpha_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(\xi') \cos m\xi' d\xi'.$$

It should be noted that $\chi(\xi, t)$ is defined *only* for $t > 0$.

www.libtool.com.cn

50. As in the preceding parts, let $V(x, t)$ stand for

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty a_m \cos mx\, e^{-m^2 t},$$

a_m being given by

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x')\cos mx'dx'.$$

Now, since $f(x)$ is an associate to $\varphi(\xi)$, it follows that $\alpha_m = a_m$. Therefore $V(x, t)$ is an associate to $\chi(\xi, t)$; and, since $V'(x, t)$ exists, it follows that

$$\chi'(\xi, t) = \{V'(x, t)\}_{x=\xi}.$$

Therefore (A_2), (B_2), (C_2) and (D_2) may be expressed in terms of $V(x, t)$ and in the notation of continuous analysis. Thus (A_2) becomes

$$\int_{-\pi}^{\xi}\{V(x', t) - f(x')\}dx' = \int_0^t \{V'(x, t')\}_{x=\xi}dt';$$

and, consequently, it follows from Art. 7 that (A_2) is satisfied if for any value of t', however small, $|\{V'(x, t')\}_{x=\xi}|$ is less than a finite quantity $P(\xi)$.

When $0 \leq x \leq \pi - l$,

$$T(x, t) = \frac{1}{2l}\int_{x-l}^{x+l} C(\xi', t)\,d\xi' = \frac{1}{2l}\int_{x-l}^{x+l}\chi(\xi', t)\,d\xi' = \frac{1}{2l}\int_{x-l}^{x+l} V(x', t)dx'$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty \frac{a_m}{m}\cos\, mx\,\frac{\sin ml}{l}\,e^{-m^2 t}.$$

Now, since a_s becomes indefinitely small with $\frac{1}{m}$, this series is uniformly convergent in t in the interval $(0, +\infty)$. Therefore $T(x, t)$ is continuous in t when $0 \leq x \leq \pi - l$. Similarly it is proved that $T(x, t)$ is continuous in t when $\pi - l < x \leq \pi$. Therefore (B_2) is satisfied whatever $\varphi(\xi)$ may be.

(C_2) is equivalent to the following:

$\operatorname{Lim}_{t=+0} V(\xi, t) = \varphi(\xi)$ if the limit exists, or, the limit does not exist, and then $\varphi(\xi)$ is contained in the aggregate of values assumed by $V(\xi, t)$ as t approaches zero.

It is easily seen that, if the condition relating to $|\{V'(x, t)\}_{x=\xi}|$ be satisfied,

$$-\frac{1}{K}Q(\xi, t) = \int_0^t C'(\xi, t')\,dt' = \int_0^t \{V'(x, t')\}_{x=\xi}dt' = \sum_1^\infty \frac{a_m \sin m\xi}{m}(e^{-m^2 t} - 1),$$

$$-\pi < \xi < \pi.$$

Now this series is uniformly convergent in ξ.

www.libtool.com.cn

Therefore

$$\lim_{\xi=-\pi+0} Q(\xi, t) = 0, \quad \lim_{\xi=\pi-0} Q(\xi, t) = 0.$$

51. Thus the *group of conditions which is necessary and sufficient, in order that* $\chi(\xi, t)$ *be the required characteristic function*, is the following:

i. For every value of ξ, there exists a finite constant P such that, for any value of t however small,

$$|\{V'(x, t)\}_{x=\xi}| \text{ is less than } P, \quad -\pi < \xi < \pi.$$

ii. $\operatorname{Lim}_{t=+0} V(\xi, t) = \varphi(\xi)$ if the limit exists, or, the limit does not exist, and then $\varphi(\xi)$ is contained in the aggregate of values assumed by $V(\xi, t)$ as t approaches zero.

Necessary and sufficient conditions for $\varphi(\xi)$.

52. The group of conditions, given in the last article, leads, with the help of the results given in Arts. 19 and 21, to certain necessary and sufficient conditions, for $\varphi(\xi)$, of an applicability sufficiently extensive for the purposes of this essay. I give the simplest and most important of these conditions below.

i. If $\varphi(\xi)$ is a continuous function of ξ — and, consequently, its *single* associate, which is continuous in the interval $(-\pi, \pi)$, is the limital [1]) function corresponding to it — then, in order that $\chi(\xi, t)$ be the characteristic function of the problem, it is sufficient that for every value of ξ within its domain, either $|D(\xi, x')| \backsim 1$ or $\pm D(\xi, x') \sim x'^{-1+k} \cos\{\psi(x')\}$ where $\psi(x') \succ \frac{1}{x'^{\nu}}$, $k + \nu > 1$.

ii. If any associate $f(x)$ of $\varphi(\xi)$ is discontinuous in the interval $(-\pi, \pi)$ then the condition relating to $D(\xi, x')$, given in i, together with one of the following conditions is sufficient:

(a) If $\lim_{x'=+0} M(\xi, x')$ exists, it is equal to $\varphi(\xi)$.

(b) If $M(\xi, x') = M_1(\xi, x') + M_2(\xi, x')$ such that $\lim_{x'=+0} M_1$ exists and $M_2 \sim \cos\{\psi(x')\}$ where $\psi(x') \succ l\left(\frac{1}{x'}\right)$, then the condition is that $\lim_{x'=+0} M_1 = \varphi(\xi)$.

(c) $M(\xi, x') \sim \cos \psi(x')$ where $\psi(x') \precsim l\left(\frac{1}{x'}\right)$; further, $\varphi(\xi) = 0$.

iii. $\chi(\xi, t)$ ceases to be the characteristic function, if at any point ξ, $\lim_{x'=+0} M(\xi, x')$ exists and is different from $\varphi(\xi)$.

iv. $\chi(\xi, t)$ ceases to be the characteristic function, if $\varphi(\xi)$ possesses an associate $f(x)$ which is such that, for every value of ξ within its domain, $\pm D(\xi, x')$ either $\succ 1$ or $\sim x'^{-1+k} \cos\{\psi(x')\}$ where $\psi(x') \precsim l\left(\frac{1}{x'}\right)$.

1) This is Brodén's Limitäre Function.

www.libtool.com.cn

Stable, unstable, and inadmissible initial states.

53. I will call an initial state, $C(\xi, 0) = \varphi(\xi)$, *stable* or *unstable* according as both the conditions of Art. 51 are satisfied or only the first. An initial state $\varphi(\xi)$ is considered *inadmissible* if it is not known that the first condition is satisfied. A stable initial state is called *non-oscillatory* if $C(\xi, t)$ is continuous, i. e., $\lim_{t=+0} \chi(\xi, t) = \varphi(\xi)$; it is called *oscillatory* if there exists at least one value of ξ for which $\chi(\xi, t)$ makes, within any indefinitely small interval $(0, t_0)$, an infinite number of finite oscillations about $\varphi(\xi)$, i. e., $C(\xi, t)$ has a discontinuity of the second kind at $t = 0$ and $\varphi(\xi)$ is contained in the aggregate of values assumed by $\chi(\xi, t)$ as t approaches zero.

A continuous initial state, if admissible, is always stable and non-oscillatory. A discontinuous initial state, if admissible, may be stable or unstable, non-oscillatory or oscillatory: for example, if it satisfies ii. of the last article it is stable; but it is non-oscillatory or oscillatory according as it corresponds to one of the two (a), (b), or, for at least one value of ξ, to (c). If an admissible initial state corresponds to iii. it is unstable. Remembering the conditions involved in the supposition that $\varphi(\xi)$ possesses an associate, it is easily seen that an unstable initial state can be replaced by a stable one without changing $\chi(\xi, t)$.

An initial state is inadmissible if it corresponds to iv. For $Q(\xi, t)$ is indeterminate, and, consequently, it is not known whether the principle of the conservation of energy, as stated in Art. 3, is satisfied or not. It should be noted that this is a case of failure not of mathematical analysis but of the hypotheses we started with.

Approximations to impossible initial states.

54. Let $T_i(x)$ stand for an even function of x such that there does not exist any even function $C(\xi)$ which can be connected with $T_i(x)$ by the equations

$$T_i(x) = \frac{1}{2l}\int_{x-l}^{x+l} C(\xi)\, d\xi, \quad 0 \leq x \leq \pi - l,$$

$$T_i(x) = \frac{1}{\pi - x + l}\int_{x-l}^{\pi} C(\xi)\, d\xi, \quad \pi - l \leq x \leq \pi.$$

Then $T_i(x)$ cannot represent a temperature; and, therefore, an initial state in which the temperature is supposed to be $T_i(x)$ must be an *impossible* one. I proceed now to prove the following theorem:

If $T_i(x)$ is a continuous function of x and δ an arbitrarily small but fixed quantity, then it is always possible to find an admissible characteristic function $C(\xi, 0)$ such that, for all the points in the interval $(l, \pi - l)$, the difference between $T_i(x)$ and $T(x, 0)$ is numerically less than δ.

www.libtool.com.cn

Consider x^{2m} where m is any positive integer; and let $C_m(\xi)$ stand for the continuous function given by

$$x^{2m} = \frac{1}{2l}\int_{x-l}^{x+l} C_m(\xi)\,d\xi,\ l \leq x \leq \pi - l.$$

Then it is easily seen that

$$C_m(\xi) = \sum_0^{r=m} b_r \xi^{2r},$$

where

$$b_r = 1,\ r = m,$$

$$b_r = 2m(2m-1)\ldots(2r+1)\,l^{2(m-r)} B_r,\ r = m-1, m-2, \ldots 1, 0,$$

the B's being given by the simultaneous equations

$$\frac{1}{(2m+1-2s)!} + \frac{B_{m-1}}{(2m-1-2s)!} + \cdots + \frac{B_r}{(2r+1-2s)!} + \cdots + \frac{B_s}{1!} = 0,$$

$$s = m-1, m-2, \ldots 1, 0.$$

Similarly, if

$$x^{2m+1} = \frac{1}{2l}\int_{x-l}^{x+l} \bar{C}_m(\xi)\,d\xi,\ l \leq x \leq \pi - l,$$

$$\bar{C}_m(\xi) = \sum_0^{r=m} \bar{b}_r \xi^{2r+1},$$

where

$$\bar{b}_r = 1,\quad r = m,$$

$$\bar{b}_r = (2m+1)\,2m\ldots(2r+2)\,l^{2(m-r)} B_r,\quad r = m-1,\ m-2, \ldots,\ 1,\ 0.$$

Now, according to a well-known theorem due to *Weierstrass* [1]), it is always possible, by taking n sufficiently large, to find a rational and integral polynomial $P_n(x)$, of degree n, such that

$$|T_i(x) - P_n(x)| < \delta,\ 0 \leq x \leq \pi.$$

Therefore, if

$$P_n(x) = \sum_0^{\frac{n}{2} \text{ or } \frac{n-1}{2}} A_m x^{2m} + \sum_0^{\frac{n}{2}-1 \text{ or } \frac{n-1}{2}} \bar{A}_m x^{2m+1},$$

the required admissible characteristic function is

$$C(\xi, 0) = \sum_0^{\frac{n}{2} \text{ or } \frac{n-1}{2}} A_m \Big\{\sum_0^{r=m} b_r \xi^{2r}\Big\} + \sum_0^{\frac{n}{2}-1 \text{ or } \frac{n-1}{2}} \bar{A}_m \Big\{\sum_0^{r=m} \bar{b}_r \xi^{2r+1}\Big\}.$$

1) See Weierstrass's Memoir, loc. cit. p. 796.

www.libtool.com.cn

55. The following is a simple method of approximation which is applicable to an extensive class of continuous functions $T_i(x)$:

Let $\varphi_1(\xi)$ be the continuous function of ξ, to which $T_i(x)$ is the limital function. Then two cases arise: the initial characteristic function $C(\xi, 0) = \varphi_1(\xi)$ is either admissible or inadmissible.

i. When $C(\xi, 0)$ is admissible — and this is the case, for example, if $T_i'(x)$ exists and is finite —, an approximation may be furnished by $T(x, 0)$; and it is easily seen that

$$|T(x, 0) - T_i(x)| < \overline{\Omega}, \qquad 0 \leq x \leq \pi,$$

$\overline{\Omega}$ being the greatest of the values of the fluctuation of $T_i(x)$ in intervals, of length $2l$, taken anywhere in the interval $(-\pi, \pi)$. Let g_i stand for the greatest value of $|T_i(x)|$. Then the method may be said to fail when $\frac{\overline{\Omega}}{g_i}$ is not negligible.

ii. Let $\Pi_n(x)$ stand for $P_n(x)$ or $P_n(-x)$ according as x is positive or negative, respectively; also let $\varphi_2(\xi)$ be the continuous function of ξ to which $\Pi_n(x)$ is the limital function. Then, when $C(\xi, 0) = \varphi_1(\xi)$ is inadmissible, the function $T(x, 0)$, defined by the admissible characteristic function $C(\xi, 0) = \varphi_2(\xi)$, may be taken as an approximation to $T_i(x)$; and it is easily seen that

$$|T(x, 0) - T_i(x)| < \delta + \overline{\Omega}',$$

$\overline{\Omega}'$ being the greatest of the values of the fluctuation of $\Pi_n(x)$ in intervals, of length $2l$, taken anywhere in the interval $(-\pi, \pi)$. Since $\overline{\Omega} - 2\delta < \overline{\Omega}' < \overline{\Omega} + 2\delta$, the method may be said to fail when $\frac{\overline{\Omega}}{g_i}$ is not negligible.

Illustrative Examples.

56. The following simple examples suffice to illustrate the salient features of the theory:

(i). Suppose that the discriminating aggregate G of the slab is (π, R_0), R_0 standing for the aggregate of all the rational numbers $\frac{\nu}{2\mu+1}$, with odd denominator, in the interval $(0, \pi)$.

Let

$$C(\xi, 0) = \varphi(\xi) = \sum_{1}^{n=\infty} \frac{(n\xi)}{n^s}, \qquad s > 2, \qquad \xi \geq 0;$$

then $\varphi(\xi)$ possesses an associate $f(x) = f_2(x)$, $f_2(x)$ standing for the $f(x)$ in (ii) of Art. 24.

At any point ξ, $D(\xi, x') \backsim 1$ and, consequently, $\{V'(x, t)\}_{x=\xi} \backsim 1$. Also

www.libtool.com.cn

$f(x)$ is continuous at ξ. Therefore $\chi(\xi, t)$ is the characteristic function of the problem and the initial state, $C(\xi, 0) = \varphi(\xi)$, is stable and non-oscillatory.

(ii). Suppose that the discriminating aggregate G of the slab is (π, R_0). Let

$$C(\xi, 0) = \varphi(\xi) = \sum_{1}^{r=\infty} \frac{\Psi(\xi - \omega_{n_r})}{n_r^{s+1}}, \qquad s > 1, \qquad \xi \geq 0,$$

Ψ and ω_{n_r} having the same meanings as in (iii) of Art. 24 and G being taken to be identical with the sub-aggregate represented there by G_1; then $\varphi(\xi)$ possesses an associate $f(x) = f_2(x)$, $f_2(x)$ standing for the $f(x)$ in (iii) of Art. 24.

At any point ξ, $|V'(x, t)_{x=\xi}| \backsim 1$; also $\chi(\xi, t)$ makes, within any indefinitely small interval $(0, t_0)$, an infinite number of oscillations, about $\varphi(\xi)$, of finite amplitude not greater than $\frac{2}{n_r^{s+1}}$.

Therefore $\chi(\xi, t)$ is the characteristic function of the problem and the initial state, $C(\xi, 0) = \varphi(\xi)$, is stable and oscillatory.

(iii) Suppose that the discriminating aggregate G of the slab is (π, R_0). Let

$$C(\xi, 0) = \varphi(\xi) = \sum_{1}^{r=\infty} \frac{\Psi_1(\xi - \omega_{n_r})}{n_r^{s+1}}, \qquad s > 1, \qquad \xi \geq 0,$$

Ψ_1 and ω_{n_r} having the same meanings as in (iv) of Art. 24 and G being taken to be identical with the sub-aggregate $G_1 = \{\omega_{n_r}\}$; then $\varphi(\xi)$ possesses an associate $f(x) = f_4(x)$, $f_4(x)$ standing for the $f(x)$ in (iv) of Art. 24.

$\chi(\xi, t)$ is the same as in (ii). Since $\Psi_1(0) > 2$, $\varphi(\xi)$ is not contained in the aggregate of values assumed by $\chi(\xi, t)$ as t approaches zero. Therefore the initial state is unstable and, so to speak, runs down *instantaneously* to the initial state of (ii).

(iv) Suppose that the discriminating aggregate G of the slab is (π, R_3), R_3 standing for the aggregate of all the rational numbers $\frac{M}{3^m}$, with an integral power of 3 as denominator, in the interval $(0, \pi)$.

The initial states

$$C(\xi, 0) = \sum_{1}^{n=\infty} \frac{(n\xi)}{n^s}, \qquad s > 2, \qquad \xi \geq 0,$$

$$C(\xi, 0) = \sum_{1}^{r=\infty} \frac{\Psi(\xi - \omega_{n_r})}{n_r^{s+1}}, \qquad s > 1, \qquad \xi \geq 0,$$

$$C(\xi, 0) = \sum_{1}^{r=\infty} \frac{\Psi_1(\xi - \omega_{n_r})}{n_r^{s+1}}, \qquad s > 1, \qquad \xi \geq 0,$$

are, respectively, stable and non-oscillatory, stable and oscillatory, and unstable.

www.libtool.com.cn

(v) Suppose that the discriminating aggregate G of the slab is (π, R_{49}), R_{49} standing for the aggregate of all the rational numbers $\frac{M}{7^{2n}}$, with an integral power of 49 as denominator, in the interval $(0, \pi)$.

Let

$$C(\xi, 0) = \varphi(\xi) = \sum_{1}^{r=\infty} \frac{(\xi - \omega_{n_r})^{\frac{1}{3}}}{n_r^{s+1}}, \qquad s > 2, \qquad \xi \geq 0,$$

ω_{n_r} having the same meaning as in (iii) of Art. 24 and G being taken to be identical with the sub-aggregate represented there by G_2.

The initial state $C(\xi, 0) = \varphi(\xi)$ is admissible, stable, and non-oscillatory. But, for any slab whose discriminating aggregate is (π, R_0) or (π, R_2),

$$C(\xi, 0) = \sum_{1}^{r=\infty} \frac{(\xi - \omega_{n_r})^{\frac{1}{3}}}{n_r^{s+1}}, \qquad s > 2, \qquad \xi \geq 0,$$

would be inadmissible.

(vi). Consider the function x^3. There does not exist any even function $C(\xi)$ which can be connected with x^3 by the equations

$$x^3 = \frac{1}{2l}\int_{x-l}^{x+l} C(\xi)\, d\xi, \qquad 0 \leq x \leq \pi - l,$$

$$x^3 = \frac{1}{\pi - x + l}\int_{x-l}^{\pi} C(\xi)\, d\xi, \qquad \pi - l \leq x \leq \pi.$$

Therefore $x^3 = T_4(x)$ cannot represent a temperature; and, consequently, an initial state in which the temperature is supposed to be x^3 must be an impossible one. The initial state defined by $C(\xi, 0) = \xi^3$ is an approximation to $T_4(x)$; for,

$$T(x, 0) = \frac{1}{2l}\int_{x-l}^{x+l} \xi^3\, d\xi = \frac{1}{2l}\int_{x-l}^{x+l} x^3\, dx = x^3 + \frac{l^2}{3}, \qquad 0 \leq x \leq \pi - l,$$

$$T(x, 0) = \frac{1}{\pi - x + l}\int_{x-l}^{\pi} \xi^3\, d\xi = \frac{1}{\pi - x + l}\int_{x-l}^{\pi} x^3\, dx = \frac{\pi^3 + \pi(x-l) + (x-l)^2}{3},$$
$$\pi - l \leq x \leq \pi,$$

and, consequently,

$$\frac{|T(x, 0) - x^3|}{\pi^3} < \frac{l}{\pi} < \frac{10^{-7}}{\pi},$$

whatever x may be.

(vii) If n be not too large, an approximation to the impossible initial state, $T_4(x) = x^n$, $n \geq 1$, $0 \leq x \leq \pi$, is furnished by the temperature $T(x, 0)$ defined by the admissible characteristic function $C(\xi, 0) = \xi^n$; and

$$\frac{|T(x, 0) - x^n|}{\pi^n} < \frac{2nl}{\pi} < \frac{2n}{3} \times 10^{-7}$$

whatever x may be.

www.libtool.com.cn

(viii) $C(\xi, 0) = \xi^3 - \frac{l^2}{3}$ gives a better approximation to the impossible initial state, $T_i(x) = x^3$, than $C(\xi, 0) = \xi^3$. For, the temperature $T(x, 0)$, defined by $C(\xi, 0) = \xi^3 - \frac{l^2}{3}$, equals x^3 as long as x is in the interval $(0, \pi - l)$.

Similar approximations to the impossible initial states x^4, x^5, x, x^3, x^5, and x^7 are given by the admissible characteristic functions

$$C(\xi, 0) = \xi^4 - 2l^2\xi^2 + \tfrac{7}{15}l^4,$$
$$C(\xi, 0) = \xi^6 - 5l^2\xi^4 + 7l^4\xi^2 - \tfrac{31}{21}l^6,$$
$$C(\xi, 0) = \xi,$$
$$C(\xi, 0) = \xi^3 - l^2\xi,$$
$$C(\xi, 0) = \xi^5 - \frac{10}{3}l^2\xi^3 + \frac{7}{3}l^4\xi,$$

and

$$C(\xi, 0) = \xi^7 - 7l^2\xi^5 + \frac{49}{3}l^4\xi^3 - \frac{31}{3}l^6\xi,$$

respectively.

(ix) Consider the impossible initial state $T_i(x) = x \sin qx$, $|\sin ql| > 0$. However large q may be, the temperature $T(x, 0)$ defined by the admissible characteristic function,

$$C(\xi, 0) = \frac{ql}{\sin ql}\left\{\xi \sin q\xi + l\left(\cot ql - \frac{1}{ql}\right)\cos q\xi\right\},$$

equals $x \sin qx$ as long as x lies in the interval $(0, \pi - l)$. When $\pi - l < x \leq \pi$,

$$\frac{1}{\pi}|T(x, 0) - x \sin qx| < \left(q + \frac{1}{\pi}\right)l < \left(q + \frac{1}{\pi}\right) \times 10^{-l}.$$

Now, if q be integral, putting $x = \pi - \eta + l$, $l \leq \eta < 2l$,

$$T(x, 0) = \frac{-l \cos q\pi}{\eta \sin ql}\{\pi(1 - \cos q\eta) + \eta \cos q\eta - l \cot ql \sin q\eta\}.$$

Therefore, when $q\eta = (2n + 1)\pi$, n being integral,

$$\frac{1}{\pi} | T(x, 0) | > \frac{\pi - l}{\pi} \frac{1}{|\sin ql|}.$$

Thus, if $0 < |\sin ql| <$, say, $\frac{1}{2}$, $T(x, 0)$ ceases to be an approximation, to $T_i(x)$, ever so crude, at any point in the interval $(\pi - l, \pi)$, where

$$x = \pi + l - \frac{2n + 1}{q}\pi.$$

www.libtool.com.cn

For instance, if $l = 10^{-8}$ and $q = 10^{10}$,

$$\frac{1}{\pi} \mid T(x, 0) \mid > 2,$$

when $16 \leq n \leq 31$.

Uniqueness of the Solution.

57. Consider first the *continuous theory*. I proceed to prove the following theorem:

For a given initial temperature, the problem can admit of only one solution $v(x, t)$ which satisfies, — of course, *in addition* to (A), (B), and (C), — the following conditions:

1. $v(x, t)$ is continuous in t as well as in x and possesses a differential coefficient $v'(x, t)$.

ii. There exists an everywhere dense aggregate $g = \{t_\nu\}$ which is the *same* for all possible solutions v and which is, further, such that, for any arbitrarily small but fixed quantity σ, it is always possible to find a positive quantity τ_ν, different from zero and dependent on ν, v and σ, for which

$$\mid v'(x, t_\nu + \tau) - v'(x, t_\nu) \mid < \sigma, \ \tau \leq \tau_\nu,$$

whatever x may be.

iii. There exists an everywhere dense aggregate $\bar{G} = \{\bar{\xi}\}$ which is the *same* for all possible solutions v and which is, further, such that $\mid \{v'(x, t)\}_{x=\bar{\xi}} \mid < p$ whatever $\bar{\xi}$ and t may be, p being a finite constant dependent on v.

It should be noted that $v(x, t)$ is defined *only* for $t > 0$.

58. If possible, let there be two solutions, $v_1(x, t)$ and $v_2(x, t)$, of the problem. Then their difference

$$v_1(x, t) - v_2(x, t) = w(x, t)$$

is also a solution of the problem, the initial temperature being zero. Therefore, it follows from (A) that

$$\int_{-\pi}^{x} \{\omega(x', t_\nu + \tau) - \omega(x', t_\nu)\} \, dx' = \int_{t_\nu}^{t_\nu + \tau} \omega'(x, t') \, dt'. \qquad (1)$$

Now, going back to (ii) of the last article, let τ_ν' and τ_ν'' be the values of τ_ν for v_1 and v_2, respectively. Then it is evident that

$$\mid \omega'(x, t_\nu + \tau) - \omega'(x, t_\nu) \mid < 2\sigma, \tau \leq \bar{\tau}_\nu, \qquad (2)$$

$\bar{\tau}_\nu$ standing for the lesser of the two quantities τ_ν', τ_ν''; and, applying (2) to (1),

www.libtool.com.cn

it is easily seen that $\omega'(x, t_\nu)$ is a continuous function of x, whatever ν may be.

Now, let $J(t)$ stand for $\int_{-\pi}^{\pi} \omega^2(x', t)\, dx'$. Then, representing by $\bar{t}_\nu$ a positive quantity such that $t_\nu + \bar{t}_\nu$ belongs to g,

$$J(t_\nu + \bar{t}_\nu) - J(t_\nu) = \int_{-\pi}^{\pi} \{\omega^2(x', t + \bar{t}_\nu) - \omega^2(x', t_\nu)\}\, dx'. \tag{3}$$

Remembering that $\omega'(x', t_\nu + \bar{t}_\nu) + \omega'(x', t_\nu)$ is continuous in x' and, consequently, integrable, it follows that, if $q(x, t_\nu, \bar{t}_\nu)$ stands for

$$\int_{-\pi}^{x} \{\omega(x', t_\nu + \bar{t}_\nu) - \omega(x', t_\nu)\}\, dx',$$

$$J(t_\nu + \bar{t}_\nu) - J(t_\nu) = [\{\omega(x', t_\nu + \bar{t}_\nu) + \omega(x', t_\nu)\}\, q(x', t_\nu, \bar{t}_\nu)]_{-\pi}^{\pi}$$

$$- \int_{-\pi}^{\pi} \{\omega'(x', t_\nu + \bar{t}_\nu) + \omega'(x', t_\nu)\}\, q(x', t_\nu, \bar{t}_\nu)\, dx'. \tag{4}$$

But it follows from the impermeability of the faces of the slab that the total quantity of heat in it remains unaltered. Therefore

$$q(\pi, t_\nu, \bar{t}_\nu) = 0;$$

and, consequently, (4) becomes

$$J(t_\nu + \bar{t}_\nu) - J(t_\nu) = -\int_{-\pi}^{\pi} \{\omega'(x', t_\nu + \bar{t}_\nu) + \omega'(x', t_\nu)\}\, q(x', t_\nu, \bar{t}_\nu)\, dx'. \tag{5}$$

Now take $\bar{t}_\nu < \tau_\nu$. Then, whatever $\bar{x}'$ may be,

$$\omega'(x', t_\nu + \bar{t}_\nu) = \omega'(x', t_\nu) + 2\theta\sigma,$$

$$q(x', t_\nu, \bar{t}_\nu) = \int_{t_\nu}^{t_\nu + \bar{t}_\nu} \omega'(x', t')\, dt' = \bar{t}_\nu \{\omega'(x', t_\nu) + 2\theta_1\sigma\}, \quad |\theta|, |\theta_1| < 1.$$

Therefore (5) becomes

$$J(t_\nu + \bar{t}_\nu) - J(t_\nu) = -2\bar{t}_\nu \int_{-\pi}^{\pi} \{\omega'(x', t_\nu)\}^2\, dx' + 4\pi\bar{t}_\nu\theta_2\sigma(3\bar{\omega}_\nu + 2\sigma), \tag{6}$$

where $\bar{\omega}_\nu$ stands for the greatest value that $|\omega'(x', t_\nu)|$ can have and $|\theta_2| < 1$. Now, since $\bar{\omega}_\nu$ is finite, $4\pi\sigma(3\bar{\omega}_\nu + 2\sigma)$ can be made as small as we please by choosing σ and, consequently, $\bar{t}_\nu$ sufficiently small. Therefore it follows from (6) that

www.libtool.com.cn

$$\lim_{\bar{t}_\nu=+0} \frac{J(t_\nu+\bar{t}_\nu)-J(t_\nu)}{\bar{t}_\nu} = -2\int_{-\pi}^{\pi} \{\omega'(x', t_\nu)\}^2 dx'.$$

Therefore $J(t_\nu)$ never increases as t_ν increases.

Now consider $\lim_{t_\nu=+0} J(t_\nu)$. Using the notation of discontinuous analysis,

$$J(t_\nu) = \int_{-\pi}^{\pi} \omega^2(\bar{\xi}, t_\nu)\, d\bar{\xi} = [\omega(\bar{\xi}, t_\nu) I(\bar{\xi}, t_\nu)]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \{\omega'(x, t_\nu)\}_{x=\bar{\xi}} I(\bar{\xi}, t_\nu)\, d\bar{\xi}, \qquad (7)$$

where $I(\bar{\xi}, t_\nu)$ stands for $\int_{-\pi}^{\bar{\xi}} \omega(\bar{\xi}', t_\nu)\, d\bar{\xi}'$. But, since the initial temperature is zero, it follows from (A) that, for any arbitrarily small but fixed quantity δ, it is always possible to find a positive quantity t_0 such that

$$| I(\bar{\xi}, t_\nu) | < \delta, t_\nu \leq t_0$$

whatever $\bar{\xi}$ may be. Therefore, according to iii. of Art. 57, it follows from (7) that

$$J(t_\nu) < 4\pi\bar{p}\,\delta, t_\nu \leq t_0,$$

$\bar{p}$ standing for the greater of the two quantities p', p'' which are the values of p for v_1, v_2. Therefore $\lim_{t_\nu=+0} J(t_\nu) = 0$. Therefore $J(t_\nu)$ can never decrease with the increase of t_ν, for it can never be negative. Therefore $J(t_\nu)$ remains equal to zero whatever t_ν may be. But, according to i. of Art. 57, $J(t_\nu)$ is a continuous function of t_ν; and $J(t)$ is the limital function corresponding to it. Therefore $J(t)$ is zero whatever t may be. And, since according to i. of Art. 57, $\omega(x, t)$ is continuous in x, it follows that $\omega(x, t)$ is zero whatever x and t may be. Therefore $v_1(x, t) = v_2(x, t)$ for all values of x and t.

59. Consider the *improperly continuous theory*. I proceed to prove the following theorem:

For a given initial characteristic function which possesses an associate, the problem can admit of only one solution $C(\xi, t) = \mathfrak{k}(\xi, t)$ which satisfies, — of course, *in addition* to (A_2), (B_2), (C_2), and (D_2), — the following conditions:

i. $\mathfrak{k}(\xi, t)$ is a continuous function of ξ, and its single continuous associate, viz., the limital function $\mathfrak{v}(x, t)$, is continuous in t and possesses a differential coefficient $\mathfrak{v}'(x, t)$.

ii. There exists an everywhere dense aggregate $g_2 = \{t_\nu\}$ which is the *same* for all possible solutions $\mathfrak{k}$ and which is, further, such that, for any arbitrarily small but fixed quantity σ, it is always possible to find a positive quantity τ_ν, different from zero and dependent on ν, $\mathfrak{k}$ and σ, for which

www.libtool.com.cn

$$| \mathfrak{v}'(x, t_\nu + \tau) - \mathfrak{v}'(x, t_\nu) | < \sigma, \tau \leq \tau_\nu,$$

whatever x may be; also, $\mathfrak{v}'(x, t_\nu)$ is a continuous function of x.

iii. There exists an everywhere dense aggregate $\overline{G}_3 = \{\overline{\xi}\}$ which is the *same* for all possible solutions $\mathfrak{k}$ and which is, further, such that $|\{\mathfrak{v}'(x,t)\}_{x=\overline{\xi}}| < p_3$ whatever $\overline{\xi}$ and t may be, p_3 being a finite constant dependent on $\mathfrak{k}$.

It should be noted that $\mathfrak{k}(\xi, t)$ and, consequently, $\mathfrak{v}(x, t)$ are defined only for $t > 0$.

If possible, let there be two solutions $\mathfrak{k}_1(\xi, t)$ and $\mathfrak{k}_2(\xi, t)$; and let $\mathfrak{v}_1(x, t)$ and $\mathfrak{v}_2(x, t)$ be the corresponding limital functions. Then, expressing (A_3), (C_3), and (D_3) in terms of $\mathfrak{v}(x, t)$ and in the notation of continuous analysis, it is easily seen, by a procedure similar to that of the last article, that $\mathfrak{v}_1(x, t) = \mathfrak{v}_2(x, t)$ for all values of x and t. Therefore $\mathfrak{k}_1(\xi, t) = \mathfrak{k}_2(\xi, t)$ for all values of ξ and t.

In the *discontinuous theory*, there can be no question as to the uniqueness of the solution because *the* solution is non-existent and, in fact, impossible.

www.libtool.com.cn

Part IV.

Summary.

The Relation of Mathematical Analysis to Physics.

60. In the present part I propose to discuss briefly the theories expounded in the preceding pages. With this end in view, I proceed first to consider the nature of the relation of mathematical analysis to physics. Like grammar, mathematical analysis helps the physicist to express his thoughts with clearness and precision. Its chief characteristic is that it makes use of symbols which are not mere counters but represent operations involving complex processes of thought. Thus the language of mathematical analysis possesses the desired quality of conciseness which is necessary for the proper concentration of attention; but the mind fails to grasp its full meaning without considerable effort.

61. *The application of mathematical analysis to physics consists in describing the results of observation in analytical language;* and, of course, in order that the description may have any meaning, it is necessary that it be *consistent*: this is the first requisite of the analytical description of a physical phenomenon. The second requisite is that the description should be *true*[1]); and the third requisite is that the description should be so *simple* that it can be recognised as a true one with the least possible expenditure of thought.

The object of the essay.

62. The object of this essay is to shew how, in the present state of mathematical analysis, it is fully possible to work out analytical theories of the linear conduction of heat in a homogeneous solid; each theory being based on definite suppositions as to the constitution of the solid, and the description furnished by it being, in all the cases that can possibly come under observation, not only consistent and the simplest possible but also true. I have thus worked out three analytical theories. Of these the first treats the solid as a continuum with the same properties in all its points, and is exact; the second postulates the existence of molecules but takes no account of their internal constitution,

1) The sense in which the word „true“ is used here is made fully clear by the example in Art. 63.

www.libtool.com.cn

and is therefore essentially inexact; finally, the third is thorough-going and exact although it does not regard the solid as a continuum with the same properties in all its points.

The Continuous Theory.

63. The theory, worked out in Part I., is distinguished from Fourier's theory not only by its *wider scope* but also by its *greater simplicity*; for its description of the actual conditions of the phenomenon is recognised as a true one from the very form of the description: it is therefore the simplest possible continuous theory.

The essential feature of the theory is that, in any particular case, it can describe the phenomenon in an *infinite number of ways*, the initial temperature being assumed to be continuous or discontinuous, stable or unstable, non-oscillatory or oscillatory: and all these descriptions will be consistent and true. The precise import of this remark is made clear by the following example:

Suppose that the result of the observation of the initial temperature of the slab is embodied in the statement that

$$T(x, 0) = f(x) = x^2 + e\theta(x), \qquad (1)$$

where e represents the greatest possible error of observation and $0 \leq |\theta(x)| \leq 1$. Now, let $T_1(x, t)$, $T_2(x, t)$, $T_3(x, t)$, $T_4(x, t)$ and $T_5(x, t)$ stand for the $T(x, t)$ in the first, second, third, fourth and fifth examples of Art. 24, respectively; also let T' be, numerically, the greatest value that any of the five T's can have. Then, representing by $T_0(x, t)$ the $T(x, t)$ corresponding to $T(x, 0) = x^2$, the descriptions embodied in the equations,

$$T(x, t) = T_0(x, t),$$

$$T(x, t) = T_0(x, t) + \frac{e}{T'} T_1(x, t),$$

$$T(x, t) = T_0(x, t) + \frac{e}{T'} T_2(x, t),$$

$$T(x, t) = T_0(x, t) + \frac{e}{T'} T_3(x, t),$$

$$T(x, t) = T_0(x, t) + \frac{e}{T'} T_4(x, t),$$

and

$$T(x, t) = T_0(x, t) + \frac{e}{T'} T_5(x, t),$$

are all *consistent and true*. And, in each of the first two of these descriptions, the initial temperature is continuous, stable and non-oscillatory; in the third, discontinuous, but stable and non-oscillatory; in the fourth, discontinuous, stable and oscillatory; and in the fifth as well as in the sixth, discontinuous and unstable.

www.libtool.com.cn

An important feature of the theory is the distinction between *admissible and inadmissible initial states.* For example, let $\theta(x) = \theta_i(x)$ where $T(x, 0) = \theta_i(x)$ is an inadmissible initial state; further, let $V_i(x, t)$ be the function $V(x, t)$ corresponding to $\theta_i(x)$. Also let V_i' be the greatest value that $|V_i(x, t)|$ can have. Then the description embodied in the equation

$$T(x, t) = V_0(x, t) + \frac{e}{V_i'} V_i(x, t), \qquad t > 0,$$

is inconsistent and, consequently, untrue; although the result of the observation of the initial temperature is still truly described by the equation

$$T(x, 0) = x^2 + e\theta_i(x).$$

The Discontinuous Theory.

64. The importance of the theory, worked out in Part II., lies in the fact that, in all the cases that can possibly come under our observation, it consistently and truly describes the phenomenon by aid of an old and familiar mechanism: it may, therefore, be regarded as the simplest of the type of theories which, in their analysis of the constitution of the solid, stop short at certain finite entities, called atoms or molecules, simply regarding them as structures whose constitution is inscrutable. The essential feature of the theory is that its description of the phenomenon is professedly inexact.

The Improperly Continuous Theory.

65. The theory, worked out in Part III., consistently and truly describes the phenomenon in terms of the characteristic function. And in width of scope it is scarcely inferior to the continuous theory. Thus, in any particular case, it can describe the phenomenon in *an infinite number of ways*, the initial characteristic function being assumed to be continuous or discontinuous, stable or unstable, oscillatory or non-oscillatory.

The theory is marked out from the continuous and the discontinuous theories by two important features. One is that, although it does not regard the solid as a continuum with the same properties in all its points, its description of the phenomenon is not only consistent and true but also thoroughgoing and exact. The other feature is that the hypotheses on which it is based admit of an interpretation which is not in disagreement with our physical conceptions. This, of course, cannot be affirmed of the continuous theory; and even in the discontinuous theory the hypothesis that conduction is *wholly* due to molecular radiations is questioned by high authorities[1]).

1) See Larmor's Memoir (Phil. Trans. Vol. 190), Art. 11.

www.libtool.com.cn

Contents.

		Page
Introduction		1

Part I. Continuous Theory.

Art.		
1	Formulation of the problem	7
2—5	Analytical representation of the conditions of the phenomenon	7
6—10	Solutions of Fourier's type	9
11—18	Behaviour of $V'(x,t)$ for t small	11
19	Summary relating to the behaviour of $V'(x,t)$ for t small	20
20—21	Behaviour of $V(x,t)$ for t small	20
22	Necessary and sufficient conditions for $f(x)$	21
23	Stable, unstable, and inadmissible initial states	22
24	Illustrative examples	22

Part II. Discontinuous Theory.

25	Formulation of a discontinuous theory of solids	25
26—31	Approximate analytical representation of the conditions of the phenomenon	26
32	Auxiliary functions of Fourier's type	33
33—36	Superior limits of E, ε, and e	34
37—38	Sufficient and quasi-necessary conditions for $f(x)$	37
39	Illustrative examples	39
40—42	Criticism of Fourier's theory	42
43	Illustrative examples	44

Part III. Improperly Continuous Theory.

44	Notation of improperly continuous analysis	48
45	Formulation of an improperly continuous theory of solids	49
46—48	Analytical representation of the conditions of the phenomenon	51
49—51	Characteristic functions of Fourier's type	52
52	Necessary and sufficient conditions for $\varphi(\xi)$	54
53	Stable, unstable, and inadmissible initial states	55
54—55	Approximations to impossible initial states	55
56	Illustrative examples	57
57—59	Uniqueness of the solution	61

Part IV. Summary.

60—61	The relation of mathematical analysis to physics	65
62	The object of the essay	65
63	The continuous theory	66
64	The discontinuous theory	67
65	The improperly continuous theory	67

www.libtool.com.cn

Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.

www.libtool.com.cn

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.

PHILOLOG.-HIST. KL. NEUE FOLGE.

I. Band, No. 1. **Kehr, P.,** *Ueber eine römische Papyrusurkunde im Staatsarchiv zu Marburg.* Mit drei Facsimile auf zwei Tafeln. 4. (28 S.) 1896. 3 M.

I. Band, No. 2. **Meyer, Wilhelm** (aus Speyer), *Ueber Lauterbachs und Aurifabers Sammlungen der Tischreden Luthers.* 4. (43 S.) 1896. 3 M.

I. Band, No. 3. **Bonwetsch, N.,** *Das slavische Henochbuch.* 4. (57 S.) 1896. 4 M.

I. Band, No. 4. **Wellhausen, J.,** *Der arabische Josippus.* 4. (50 S.) 1897. 3 M. 50 Pf.

I. Band, No. 5. **Hultsch, Fr.,** *Poseidonios über die Größe und Entfernung der Sonne.* 4. (48 S.) 1897. 3 M.

I. Band, No. 6. **Meyer, Wilhelm.** (aus Speyer). *Die Buchstabenverbindungen der sogenannten gothischen Schrift.* Mit 5 Tafeln. 4. (124 S.) 1897. 9 M. 50 Pf.

I. Band, No. 7. **Leo, Fr.,** *Die plautinischen Cantica und die hellenistische Lyrik.* 4. (114 S.) 1897. 7 M. 50 Pf.

I. Band, No. 8. *Asadi's neupersisches Wörterbuch Lughat-i Furs* nach der einzigen vatikanischen Handschrift herausgegeben von Paul Horn. 4. (37 u. 133 S.) 1897. 18 M.

II. Band, No. 1. **Wellmann, M.,** *Krateuas.* Mit 2 Tafeln. 4. (32 S.) 1897. 3 M.

II. Band, No. 2. *Das hebräische Fragment der Weisheit des Jesus Sirach* herausgegeben von **Rudolf Smend.** 4. (34 S.) 1897. 3 M. 50 Pf.

II. Band, No. 3. **Schulten, Adolf,** *Die Lex Manciana,* eine afrikanische Domänenordnung. 4. (51 S.) 1897. 3 M. 50 Pf.

II. Band, No. 4. **Kaibel, Georg,** *Die Prolegomena ΠΕΡΙ ΚΩΜΩΙΑΙΑΣ.* 4. (70 S.) 1898. 4 M. 50 Pf.

II. Band, No. 5. **Bechtel, Fr.,** *Die einstämmigen männlichen Personennamen des Griechischen,* die aus Spitznamen hervorgegangen sind. 4. (85 S.) 1898. 5 M. 50 Pf.

II. Band, No. 6. **Meyer, Wilhelm** (aus Speyer), *Die Spaltung des Patriarchats Aquileja.* 4. (37 S.) 1898. 2 M. 50 Pf.

II. Band, No. 7. **Schulten, Adolf,** *Die römische Flurteilung und ihre Reste.* Mit 5 Figuren im Text und 7 Karten. 4. (38 S.) 1898. 5 M.

II. Band, Nr. 8. **Roethe, Gustav,** *Die Reimvorreden des Sachsenspiegels.* 4. (110 S.) 1899. 8 M.

III. Band, Nr. 1. *Die charakteristischen Unterschiede der Brüder van Eyck* von **Otto Seek.** 4. (77. S.) 1899. 5. M.

III. Band, Nr. 2. **Marquardt, J.,** *Ērānšahr nach der Geographie des Ps. Moses Xorenac'i.* Mit historisch kritischem Kommentar und topographischen Excursen. 4. (358 S.) 1901. 30 M.

III. Band, No. 3. **Achelis, H.,** *Die Martyrologien, ihre Geschichte und ihr Wert.* 4. (VIII u. 247 S.) 1900. 16 M.

IV. Band, No. 1. **Tüselmann, Otto,** *Die Paraphrase des Euteknios zu Oppians Kynegetika.* 4. (43 S.) 1900. 4 M.

IV. Band, No. 2. **Schulten, Adolf,** *Die Mosaikkarte von Madaba* und ihr Verhältnis zu den ältesten Karten und Beschreibungen des heiligen Landes. Mit 3 Kartenbildern u. 1. Figurentafel. 4. (121 S.) 1900. 10 M.

IV. Band, No. 3. **Wilamowitz-Moellendorff, U. v.,** *Die Textgeschichte der griechischen Lyriker.* 4. (121 S.) 1900. 8 M.

IV. Band, No. 4 **Rahlfs, Alfred,** *Die Berliner Handschrift des sahidischen Psalters.* Mit drei Lichtdrucktafeln. 4. (154 S.) 1901. 11 M.

IV. Band, No. 5. **Meyer, Wilhelm** (aus Speyer), *Der Gelegenheitsdichter Venantius Fortunatus.* 4. (140 S.) 1901. 9 M.

IV. Band, No. 6. **Lüders, Heinrich,** *Über die Grantharecension des Mahābhārata.* (Epische Studien I). 4. (91 S.) 1901. 6 M.

V. Band, No. 1. **Roethe, Gustav.** *Brentanos ‚Ponce de Leon'*, eine Saecularstudie. 4. (100 S.) 1901. 6 M. 50 Pf.

V. Band, No. 2. **Wellhausen, J.,** *Die religiös-politischen Oppositionsparteien im alten Islam.* 4. (99 S.) 1901. 6 M. 50 Pf.

V. Bd. No. 3. *Neuarabische Volkspoesie* gesammelt und übersetzt von **Enno Littmann** 4. (159 S.) 1901. 12 M.

V. Bd. No. 4. **Pischel, R.,** *Materialien zur Kenntnis des Apabhraṁśa.* Ein Nachtrag zur Grammatik der Prākrit-Sprachen. 4. (86 S.) 1902. 6 M.

V. Bd. No. 5. **Schulze, Wilhelm,** *Zur Geschichte lateinischer Eigennamen.* Im Druck.

VI. Bd. No. 1. **Kraus, Carl.** *Metrische Untersuchungen über Reinbots Georg.* Mit zwei Excursen. 4. (225 S.) 1902. 16 M.

VI. Bd. No. 2. **Meyer, Wilhelm** (aus Speyer), *Henricus Stephanus über die Regii Typi Graeci.* Mit 2 Tafeln. 4. (32 S.) 1902. 3 M.

VI. Bd. No. 3. **Möller, Hermann,** *Ein hebräisches und zwei niederdeutsche Lieder 1563—1565 aus dem siebenjährigen [illegible] schen Kriege.* Mit einem Anhang: *Jüdische Lieder aus der Grafenfehde.* 4. [illegible] 1902. 5

VI. Bd. No. 4. **Pietschmann, R.,** Pietro Sarmiento Geschichte des Inkareiches. Im Druck.

VII. Bd. No. 1. **Bonwetsch, N.,** Die Theologie des Methodius von Olympus. 12

VII. Bd. No. 2. **Wilmanns, W.,** Der Untergang der Nibelunge in alter Sage und Dichtung.

MATH.-PHYSIKAL. KL. NEUE FOLGE.

I. Band, No. 1. **Koenen, A. v.,** *Ueber Fossilien der Unteren Kreide am Ufer des Mungo in Kamerun.* Mit 4 Tafeln. 4. 1897.

Nachtrag dazu. 4 (S. 49—65 mit Taf. V—VII.) 1898.

I. Band, No. 2. **Brendel, Martin,** *Theorie der kleinen Planeten.* Erster Teil. 4. (171 S.) 1898.

I. Band, No. 3. **Schur, W.,** *Ableitung [illegible] Oerter des Mondes gegen die Sonne aus heliometrischen Messungen von Schwerdtfeger ausgeführt auf der Sternwarte zu Göttingen während der partiellen Sonnenfinsternisse von 1890 Juni 16/17 (Beobachter: Schwerdtfeger, Ambronn und Hayn) und von 1891 Juni 6 (Beobachter: Schur).* Mit 3 Plänen. Sternwarte nebst Verzeichniss der grösseren Instrumente. 4. (26 S.) 1898.

I. Band, No. 4. **Schur, W.,** *Vermessung der beiden Sternhaufen h und x Persei auf sechszölligen Heliometer der Sternwarte Göttingen verbunden mit einer Untersuchung aller bis zum Jahre 1900 ausgeführten Instrumentaluntersuchungen.* Mit einer Sternkarte. 4. (88 S.) 1900.

II. Bd. No. 1. **Wiechert, E.,** *Theorie der astatischen Seismographen.* 4. (125 S.)

II. Bd. No. 2. **Kramer, Julius,** *Theorie der Planeten. Die Planeten vom Hecuba-Typus.* 4. (153 S.) 1902.

II. Bd. No. 3. **Furtwängler, Ph.,** *Ueber die Reciprocitätsgesetz der [illegible]ten Potenzreste in quadratischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet.* 4. (82 S.)

Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner), Göttingen.

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

www.libtool.com.cn

Widener Library
3 2044 092 891 167
www.libtool.com.cn